La matemática formal, una alternativa para la resolución de problemas técnicos en la empresa

Adiel Basurto Guerrero, Juan Reséndiz Ríos, Martín Sauza Toledo.
Universidad Tecnológica de Tula Tepeji
México
abasurto@uttt.edu.mx, jresendiz@uttt.edu.mx, msauza@uttt.edu.mx

Resumen. Ante los grandes retos de capacitación tecnológica que la empresa moderna demanda a la Universidad Tecnológica de Tula Tepeji, la enseñanza de la matemática ocupa un lugar prioritario en la currícula de la carrera de Mantenimiento Industrial, aunado a esto, el fundamento del conocimiento que en ella se imparte, es la pertinencia del mismo. Es por ello que el presente estudio busca evaluar y recolectar materiales de aplicación de las matemáticas, las cuales tradicionalmente se les imparten a los alumnos de carreras tecnológicas universitarias, esperando que posteriormente en el desarrollo de su vida profesional las apliquen para resolver problemas en la empresa, por lo cual, en este artículo se dan a conocer los resultados de las primeras investigaciones que se han desarrollado en un ambiente Empresa – Universidad. Resultado de esta incursión en las empresas de la región Tula - Tepeji, México, se propone un método de enseñanza que se ha experimentado en esta Universidad Tecnológica, el cual está fundamentado en las teorías de investigadores como Piaget, Resnick y Polya, entre otros, además, la presente investigación tiene sólidas bases en la matematización y articulación de saberes, privilegiando en todo momento el razonamiento, primeramente del catedrático y consecuentemente el del alumno.

Palabras clave: Matemáticas, Pertinencia, Matemátización y razonamiento.

Abstrac. Faced with the great challenges of technological training that the modern company demands from the Technological University of Tula Tepeji, the teaching of mathematics occupies a priority place in the curriculum of the Industrial Maintenance career, added to this, the foundation of the knowledge that in it is taught, is the relevance of it. That is why the present study seeks to evaluate and collect materials for the application of mathematics, which are traditionally taught to students of university technological careers, hoping that later in the development of their professional life they apply them to solve problems in the company. Therefore, in this article the results of the first investigations that have been developed in a Company-University environment are disclosed. As a result of this incursion in the companies of the Tula - Tepeji region, Mexico, a teaching method is proposed that has been experimented in this Technological University, which is based on the theories of researchers such as Piaget, Resnick and Polya, among others, In addition, this research has solid foundations in the mathematization and articulation of knowledge, prioritizing reasoning at all times, first of the professor and consequently that of the student.

Keywords: Mathematics, Relevance, Mathematics and reasoning.

Recepción: 09 de septiembre 2016 - Aceptación 10 de octubre 2016. P.p. 48-62

1. Introducción

La carrera de Ingeniería en Mantenimiento Industrial en la Universidad Tecnológica de Tula Tepeji, México, muestra características propias de docentes y alumnos. A los alumnos que ingresan se les ha clasificado de acuerdo a la tabla siguiente, que corresponde a los resultados del examen aplicado para el ingreso al programa educativo de Mantenimiento área Industrial:

Grado de satisfacción ingreso	**Área de conocimiento evaluado**			
	Matemáticas %	Física %	Lenguaje escrito %	Inglés %
Satisfactorio	45.02	28.44	49.76	40.75
Insatisfactorio	54.98	71.56	50.24	59.25

Tabla 1: Reporte de resultados CENEVAL, EXANI-II (2015).

En la tabla se puede observar que, en todas las áreas de conocimiento, los resultados se encuentran por debajo del 50 % de conocimiento satisfactorio, si se observan las dos primeras áreas del conocimiento, correspondientes a matemáticas y física, que dada la naturaleza tecnológica de la carrera debieran ser prioritarias, se puede apreciar que los resultados del examen de ingreso son muy bajos y la aceptación para estudiar la carrera es del total de alumnos que soliciten su ingreso. Una observación de los alumnos realizada en aula, es la falta de hábitos de estudio bajo una buena metodología, pero sobre todo una actitud positiva para lograr la adquisición de conocimientos.

Con fundamento en los resultados de encuestas aplicadas a los actores de la educación en esta Universidad, se puede observar que el 82 % de los docentes han adoptado una actitud de pasividad e inercia en la impartición de cursos de matemáticas, desistiendo de la práctica de transmitir la cultura matemática a los alumnos a través del razonamiento y conformándose con guiar al alumno a la repetición de conocimientos o resolución de ejercicios a través de procesos algorítmicos, conduciendo al grupo hacia un sistema de *enseñanza tradicional*, término que aquí se utiliza en el sentido que menciona Cuevas y Pluvinage (2015):

> Por enseñanza tradicional nos referimos a un sistema derivado de la escuela sensorio-empirista, en donde, en síntesis, esta corriente supone que acudiendo a los sentidos y con una actuación meramente pasiva por parte del estudiante, se pueden aprender conceptos matemáticos.

Lo anterior lleva a reflexionar sobre las cuestiones: ¿Será que hasta este nivel educativo la enseñanza impartida a los alumnos haya sido carente de significado?, ¿Los docentes se han adaptado y están convencidos de la efectividad de un sistema tradicional de aparente transmisión de conocimientos repetitivos dentro de un modelo en el que ellos mismos fueron preparados? Este sistema de repetición de conocimientos mecanizados que han sido aprendidos primeramente por el profesionista en su formación universitaria y ahora son a su vez reproducidos en su actividad profesional como docentes, lleva a que el alumno solamente replique el modelo de *repetición de conocimientos* sin visualizar por parte de los dos actores (Maestro – Alumno), la aplicabilidad de los mismos.

Por lo anterior, en este proyecto se ha estudiado la aplicación del conocimiento matemático y un método de impartición en el aula, fundamentado en la didáctica, pues se considera que esto hará crecer en el alumno una necesidad para resolver problemas, como lo menciona Piaget (1991): “Puede decirse que toda acción –es decir, todo movimiento, todo pensamiento o todo sentimiento- responde a una necesidad”. La aparición de una necesidad en el aprendizaje, se torna más efectiva en comparación con una serie de cursos teóricos para el dominio de habilidades profesionales, como se ha podido observar en el desempeño de los alumnos exitosos dentro de las empresas, por lo que cabe preguntar ¿Es la empresa la que forma profesionalmente a los alumnos egresados de las diferentes carreras tecnológicas?, o, ¿la universidad deberá jugar un papel fundamental basando su educación en el uso de materiales y problemas que estén directamente relacionados con los retos que la empresa demanda?

Al incursionar en la resolución de problemas técnicos en las empresas, los retos requieren de la inmersión en un proceso de análisis continuo del profesor en primer lugar y posteriormente el alumno, donde se requiere forzosamente la integración de saberes, principalmente los matemáticos, sin olvidar los saberes producto de una cultura general del estudiante o profesionista. La pertinencia del conocimiento que en este estudio se pretende abordar, ha sido tratada por muchos investigadores de la enseñanza de las matemáticas, entre ellos:

Para Chevallard (2009), "hay más de un modo en que un concepto pierde su carácter incisivo. Son los usos que sabemos darle y que le damos los que le otorgan su fuerza explicativa, su valencia epistemológica". Para Ímaz y Moreno (2010), "el verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el del rigor, sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos […] si hay que elegir entre el rigor y el significado, sin duda elijo el significado". En Camarena (2013):

> No se trata de impartir cursos de matemáticas por la matemática misma, o por que sea un tema establecido en los programas de estudio de una profesión: se trata de reflexionar sobre todas las interrogantes arriba expuestas, de modo que la matemática tenga sentido para el estudiante, que tenga aplicación en la praxis social de su profesión, constituya el conocimiento, desarrolle en él habilidades del pensamiento, y que su comportamiento sea para el bien de la sociedad y de sí mismo (Camarena, 1984, 1999).

Cuevas y Pluvinage (2003) plantean: Revenons à des considérations sur le rôle à impartir à l'action. Pour Piaget. (1967, p. 23), les opérations intellectuelles dont la forme supérieure est logique et mathématique constituent des actions réeles, sous le doublé aspect d'une production propre au sujet et d'une expérience posible sur la réalité.

Ante este escenario, es evidente que las actividades de educación superior deben voltear a ver los retos que la empresa demanda. Las diferentes disciplinas que se imparten deben estar regidas por el ambiente empresarial. La práctica tradicional de transmitir conocimientos a través de aprendizajes mecanizados, podrían ser apropiados y atractivos para los estudiantes de matemáticas o física pura, pero, ¿estos conocimientos serán apropiados para los futuros técnicos que ingresan a las universidades con la esperanza de adquirir las herramientas necesarias para resolver los problemas en su vida profesional?, o tal vez, ¿será necesario reestructurar totalmente la curricula de enseñanza de las matemáticas para futuros técnicos profesionales?

2. Metodología

La investigación fue realizada dentro de una metodología cualitativa y presenta un enfoque de investigación descriptiva. Se busca evaluar la aplicación de las matemáticas que los técnicos profesionales hacen en sus rutinas cotidianas dentro de las empresas, con el fin de experimentar algunos cambios a los métodos de transmisión de conocimientos a nivel universitario, específicamente a los estudiantes de la carrera de Mantenimiento Industrial de la Universidad Tecnológica de Tula Tepeji, México.

Tomando en cuenta las diferencias académicas de los estudiantes (arriba expuestas), se han diseñado y sometidos a un rigor didáctico modelos de problemas que se presentaron ante los grupos de la generación que ingresó a la carrera en septiembre de 2015. En este artículo solo se presenta un problema y la forma en que fue resuelto en clase.

Secuencia metodológica utilizada para el análisis de problemas en aula

Se ha iniciado la presente investigación para adaptar una metodología práctica de enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo. Siendo necesario que se establezcan los fundamentos que regirán el ambiente de aprendizaje de los alumnos motivo de este estudio, puesto que, sus problemas de adquisición de conocimientos son únicos y diferentes comparados con otros alumnos de Universidades e Institutos de educación superior.

Ante este panorama se ha puesto en práctica los siguientes ocho pasos que conforman la metodología propuesta, misma que se encuentra fundamentada en los trabajos de diversos investigadores y teóricos de la educación como Resnick (1990) y Polya (2016), esto ha dejado una experiencia en la cual a través de la observación directa se enfatiza una marcada actitud de interés por parte del alumno.

A. **Presentación y análisis preliminar del problema a resolver**: Como primer paso y a partir de la siguiente imagen se establece el enunciado para plantear el problema, el cual corresponde a la necesidad de diseñar e instalar un dispositivo para medir volúmenes parciales para diferentes niveles de líquido, donde la altura con respecto al fondo del tanque cilíndrico vertical con tapas toriesféricas, resulta ser la variable independiente, por lo cual, se deben calcular los volúmenes parciales del líquido. En este punto es fundamental a través del análisis conjunto (docente – alumno), reconocer las incógnitas y los datos que se deben obtener para resolver el problema.

Después de realizar la investigación correspondiente en la empresa y la bibliográfica, se determina que el tanque es del tipo toriesférico 80:10, por lo cual, el radio del abombado es de 80 % del diámetro de la sección cilíndrica y el radio de esquina o de nudillos corresponde al 10% del mismo diámetro. Estas tapas por motivos constructivos, en México se utilizan como equivalente a las semielípticas 2:1.

Imagen 1. Tanque cilíndrico vertical con cabezales toriesféricos 80:10.

B. **Toma de datos físicos del tanque (Dimensionamiento).** En este segundo paso un equipo de estudiantes asiste a la empresa para tomar las dimensiones necesarias, las cuales se han definido en el grupo. En este caso, los alumnos procedieron a dimensionar la altura utilizando dos reglas colocadas horizontalmente en la parte superior e inferior del tanque, además se dimensionó el perímetro de la parte central y se obtuvo el espesor de placa. Para este caso particular los datos de campo se midieron físicamente con longímetro y sensor piezoeléctrico, determinando que: Altura total del tanque = 2.15 m., Perímetro del cilindro = 4.80 m., Espesor de placa = 1/4 de pulgada.

C. **Cálculo de datos requeridos para inicio de proceso algorítmico.** En este tercer paso se procede a calcular los datos que ayudarán a obtener la resolución del problema, para este fin, se esquematiza y modela matemáticamente el problema, resultando relativamente fácil el modelo matemático de la sección cilíndrica; sin embargo, las secciones esféricas y toroidales, se han trabajado con menor facilidad, ya que hay que abordarlas con ayuda de las ecuaciones de la circunferencia, estudiadas en los cursos de geometría analítica. Al respecto Hitt y Dufour (2013), nos dicen:

> El estudiante preuniversitario que quiere seguir sus estudios universitarios ligados a la ciencia o la ingeniería, está obligado a seguir un curso de cálculo en donde los procesos de modelación matemática son explícita o implícitamente invocados en los programas de estudio. Para llevar a cabo el propósito de esta comunicación, se debe aproximar al problema del aprendizaje del cálculo desde la perspectiva de los procesos de la modelación matemática.

De acuerdo a estos autores, la modelación del problema es fundamental, siendo por ello que aquí se abordó de la siguiente manera: Para este problema se utilizaron las ecuaciones correspondientes a la circunferencia para las secciones esférica y toroidal. Las dimensiones de la altura se han ubicado en dirección del eje de las "*equis*", ya que la altura será la variable independiente de la función. El eje de las "*yes*" determinará el radio del tanque para la variación de alturas.

A partir del perímetro del cuerpo del tanque se ha determinado el diámetro y radio exteriores del mismo; D = 4.80/π = 1.527887 m., de acuerdo con las referencias del fabricante, éste fue diseñado y construido considerando dimensiones en el sistema inglés, por lo tanto: Diámetro = 5 ft. y radio = 2.5 ft. Para el caso de la altura se ha calculado con los datos obtenidos en campo, sin olvidar restar dos veces el espesor de placa, obteniendo que la altura es de 7 ft.

Con el fin de calcular las dimensiones reales de cada tapa, se ha procedido a ubicar las líneas de medio contorno interno del tanque en el sistema de coordenadas cartesianas, modelación gráfica que se observa en la Figura 1, esto es con el fin de utilizar más adelante el método de solidos de revolución estudiado en cálculo integral, para obtener los volúmenes correspondientes.

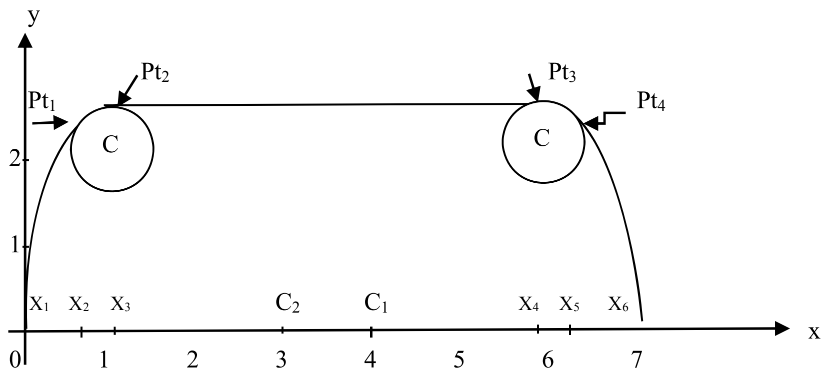

Figura 1. Modelación gráfica en el sistema de coordenadas cartesianas.

Como se estableció anteriormente, el cálculo de las alturas de las secciones toroidales y esféricas de cada tapa, se han obtenido utilizando los conceptos básicos de las propiedades de la circunferencia y sus respectivas funciones en el plano de coordenadas cartesianas (en este caso para las tapas toriesfericas). Es necesario calcular inicialmente los puntos de tangencia Pt_1, Pt_2, Pt_3 y Pt_4. Como se puede observar, la parte más baja de la tapa inferior y la parte más alta de la tapa superior, son iguales y viene dadas por un arco de circunferencia de radio = 80 % del diámetro de la sección cilíndrica del tanque. De acuerdo a la Figura 1, este arco parte desde el origen de coordenadas cartesianas hasta el punto de tangencia donde se une con la sección de circunferencia determinada por el toro, por lo que: Radio de sección esférica = 5 ft. x 80 % = 4 ft., Radio de la sección toroidal = 5 ft. x 10 % = 0.5 ft. Estos radios sirven para tazar gráficamente los límites interiores para cálculo de volúmenes del tanque, así como para ubicar los centros de las circunferencias, definiendo valores de *h* y *k* para las dos circunferencias implicadas.

Determinación de la función matemática para las circunferencias del perfil del tanque. Para determinar los valores de *h* y *k,* que corresponden a los centros de las circunferencias, tendremos: La circunferencias con que se trazan las secciones esféricas, se ha determinado el radio de 4 ft., por lo que debiendo estar dicho centro en el eje central del tanque, deberá ubicarse en el eje de las *"equis"*, quedando así determinado el centro para la primer circunferencia en C_1 (4, 0), para la segunda circunferencia C_2 (3, 0). Los centros para las circunferencias que definen la sección toroidal, será necesario calcular primeramente los valores de x_3 y x_4, considerando los triángulos rectángulos formados por C_1-C_3-X_3 y C_2-C_4-X_4, de los cuales se conocen los valores de las hipotenusas C_1-C_3 = 3.5 ft. y C_2-C_4 = 3.5 ft., así como los catetos menores C_3-X_3 = 2 ft. y C_4-X_4 = 2 ft., resolviendo con el teorema de Pitágoras y restado al valor del radio X_1-C_4, se obtiene X_3 = 1.12772 ft., por lo que, C_3 (1.12772, 2) y restando el valor de X_3 a la altura total del tanque, se obtendrá el valor de X_4 = 5.87228 ft., y por consiguiente el punto C_4 (5.87228, 2).

Para calcular los valores en el eje de las *"equis"*, de X_2 y X_5, se trabaja con los triángulos semejantes C_1-C_3-X_3 y C_3-Pt_1- y el segmento de recta perpendicular a la recta C_3-

Pt_2 que pasa por Pt_1. Cuya longitud de este último segmento horizontal es de 0.41033 y corresponde a la proyección horizontal entre Pt_1 y Pt_2. En este caso se pueden determinar las coordenadas de todos los puntos de tangencia arriba enunciados (Pt_1, Pt_2, Pt_3 y Pt_4), ver Tabla 2.

Puntos de tangencia	**Abscisa (x)**	**Ordenada (y)**
Pt_1	0.717394	2.08163
Pt_2	1.12772	2.5
Pt_3	5.87228	2.5
Pt_4	6.28261	2.08163

Tabla 2: Valores de las coordenadas de los puntos de tangencia.

A partir de estos valores se definen los centros de las circunferencias Tabla 3, con el fin de sustituir valores de "*h* y *k*" en la ecuación de la circunferencia y determinar la función correspondiente al modelo matemático en sus cinco secciones.

Circunferencia	**Valor (*h*)**	**Valor (*k*)**
(1)	4	0
(2)	3	0
(3)	1.12772	2
(4)	5.87228	2

Tabla 3: Valores para "*h* y *k*" de las cuatro circunferencias.

Con los valores establecidos en la Tabla 3 y la siguiente ecuación de la circunferencia estudiada en geometría analítica, ecuación (1), se determina las relaciones (x, y) correspondientes a cada sección toriesférica del tanque:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{1}$$

Donde:

x = Variable independiente que físicamente toma los diversos valores de la altura o profundidad del líquido desde el fondo del cabezal toriesférico hasta el espejo del líquido o su llenado total,

y = Variable dependiente que físicamente toma los valores de los radios conforme se desplaza el líquido dentro del tanque en su proceso de llenado o vaciado.

h = valor de la coordenada en "*equis*" (abscisa), correspondiente al punto donde se encuentra el centro de la circunferencia.

k = valor de la coordenada en "*ye*" (ordenada), correspondiente al punto donde se encuentra el centro de la circunferencia.

Despejando "*y*" para encontrar la función, se obtiene:

$$y=k\pm\sqrt{r^2-(x-h)^2} \tag{2}$$

La ecuación de la recta que se utiliza para obtener el sólido de revolución en su sección cilíndrica, no representa mayor obstáculo para escribirla en forma de función, pues corresponde a una constante donde la "*equis*" propiamente no aparece como variable.

$$y = c \tag{3}$$

Donde:
***c* =** valor constante de la ordenada con respecto a la variable independiente (abscisas), que toma la recta en cada punto, para este caso le corresponde el valor del radio del cilindro.
***y* =** valores de la variable dependiente en la sección cilíndrica del tanque.

Por lo tanto, la función del modelo matemático presentado en la Figura 1 es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{8x - x^2} & \text{sí} \quad 0 \le x \le 0.717394 \\ 2 + \sqrt{0.5^2 - (x - 1.12772)^2} & \text{sí} \quad 0.717394 < x \le 1.12772 \\ 2.5 & \text{sí} \quad 1.12772 < x \le 5.87228 \\ 2 + \sqrt{0.5^2 - (x - 5.87228)^2} & \text{sí} \quad 5.87228 < x \le 6.28261 \\ \sqrt{4^2 - (x - 3)^2} & \text{sí} \quad 6.28261 < x \le 7 \end{cases}$$

Para valores menores de cero (X < 0) y mayores de 7 (X >7), sus correspondientes imágenes no tienen sentido en la realidad tecnológica ya que el tanque no puede contener cualquier cantidad menor a cero unidades cubicas, ni mayores al contenido total del tanque.

D. **Aproximación de la resolución por intuición y/o análisis numérico básico**. Con la información analíticamente obtenida hasta aquí, se continúa con este cuarto paso, que aunque no se considera en el procedimiento la exactitud ni el rigor del cálculo matemático, sin embargo se realiza este análisis aproximado de volumen, ya que se ha observado que el alumno tiende a calcular sin algún referente que le indique la dirección correcta de sus operaciones y resultado final. En la empresa sin embargo, se ha encontrado que una idea inicial de los resultados finales al diseñar, es básica para abordar cualquier problema. La propuesta del grupo en estudio, ha sido considerar un cilindro de diámetro continuo, en este caso de 5 ft. y altura igual a la altura total del tanque menos un tercio de cada tapa.

Entonces: 7 ft. – 2/3 (1.12772) = 6.2482 ft. por lo tanto, utilizando la fórmula geométrica para calcular el volumen del cilindro $V = \pi r^2 h$., se tiene: Volumen aproximado contenido en el tanque $\approx \pi(2.5 \text{ ft.})^2(6.2482 \text{ ft.}) = 122.683 \text{ ft}^3$. Convirtiendo este resultado a metros cúbicos, se obtiene: $122.683 \text{ ft}^3 = 3.474 \text{ m}^3$.

E. **Procedimiento de resolución algorítmica del problema**. Este quinto paso corresponde al proceso de aplicar la fórmula de integración para obtener volúmenes considerando cada una de las partes de la función, sustituyendo los datos obtenidos al calcular las dimensiones interiores del tanque, considerando la variable independiente como las diferentes alturas de nivel del líquido, obteniendo así el volumen contenido a diferentes alturas.

$$V = \pi \int_a^b (y)^2 \, dx \tag{4}$$

Procediendo a aplicar la fórmula (4) para obtener volúmenes por el método de solidos de revolución por medio de integración de la función se tiene:

Para la primera sección de la tapa inferior del tanque que se etiqueta como (V_1), se plantea la integral:

$$V_1 = \pi \int_0^{0.717394} (\sqrt{8x - x^2})^2 dx = \pi \int_0^{0.717394} (8x - x^2) dx$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_1 = \pi \left[4x^2 - \frac{x^3}{3} + c \right]_0^{0.717394} = \pi \left[4(0.717394)^2 - \frac{(0.717394)^3}{3} + c - 0 - c \right] = 6.081\ ft^3$$

Para la segunda sección de la tapa inferior del tanque que se etiqueta como (V_2), se plantea la integral:

$$V_2 = \pi \int_{0.7173943}^{1.12772} (2 + \sqrt{0.25 - (x - 1.12772)^2})^2 dx = \pi \int_{0.7173943}^{1.12772} (2.97825 + 2.25544x - x^2 + 4\sqrt{0.25 - (x - 1.12772)^2}) dx$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_2 = \pi \left[2.97825\ x + 1.12772\ x^2 - \frac{x^3}{3} + 2(x - 1.12772)\sqrt{0.25 - (x - 1.12772)^2} + 0.5\, arcsen\ \frac{x - 1.12772}{0.5} + c \right]_{0.7173943}^{1.12772} =$$

$$= \pi [4.31475 - 1.878147793] = 7.6548\ ft^3$$

Para la tercera sección que corresponde a la parte cilíndrica y se etiqueta como (V_3), se plantea la integral:

$$V_3 = \pi \int_{1.12772}^{5.87228} (2.5)^2 dx = \pi \int_{1.12772}^{5.87228} (6.25) dx =$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_3 = 6.25\pi [x + c]_{1.12772}^{5.87228} = 6.25\pi [5.87228 + c - 1.12772 - c] = 93.1598\ ft^3$$

Para la cuarta sección ubicada en la tapa superior del tanque que se etiqueta como (V_4), se plantea la integral:

$$V_4 = \pi \int_{5.87228}^{6.2826} (2 + \sqrt{0.25 - (x - 5.87228)^2})^2 dx = \pi \int_{5.87228}^{6.2826} (11.74456x - 30.2336724 - x^2 + 4\sqrt{0.25 - (x - 5.87228)^2}) dx$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_4 = \pi \left[5.87228\ x^2 - \frac{x^3}{3} - 30.2336724\ x + (2x - 11.74456)\sqrt{0.25 - (x - 5.87228)^2} + 0.5\, arcsen\ (2x - 11.74456) + c \right]_{5.87228}^{6.2826} =$$

$$= \pi [-40.10546713 - (-42.54206752)] = 7.6548 ft^3$$

Para la quinta sección ubicada en la tapa superior del tanque que se etiqueta como (V_5), se plantea la integral:

$$V_5 = \pi \int_{6.2826}^{7} (\sqrt{16 - (x-3)^2})^2 dx = \pi \int_{6.2826}^{7} (6x - x^2 + 7) dx$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_5 = \pi\left[3x^2 - \frac{x^3}{3} + 7x + c\right]_{6.2826}^{7} = \pi[147 - 114.33 + 49 + c - 118.4132 + 82.66 - 43.9782 - c] = 6.081\,ft^3$$

Calculando la sumatoria de volúmenes por sección para determinar el volumen total contenido en el tanque, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{5}(V_1 + V_2 + ... + V_i) = 6.081 + 7.6548 + 93.1598 + 7.6548 + 6.081 = 120.6314\ ft^3 = 3.4159\,m^3$$

Este resultado final se debe comparar con el resultado aproximado obtenido en la sección (D), el cual arrojó un volumen de 122.683 ft^3 = 3.474 m^3. Siendo esta cantidad aproximadamente la obtenida aquí por integración de la función.

Cálculo de volúmenes parciales: El cálculo hasta aquí realizado permite conocer los volúmenes de secciones definidas por las figuras geométricas, sin embargo, por el mismo método se determinan los volúmenes contenidos a diversas profundidades, calculando en espacios de ½ ft. en ½ ft. Esto se desarrolla desde el inicio del llenado, hasta su capacidad total. Se establecen como ejemplos los primeros tres cálculos.

Para el primer volumen hasta una profundidad de líquido de ½ ft., se plantea la integral:

$$V_{0.5} = \pi\int_0^{0.5}\left(\sqrt{8x - x^2}\right)^2 dx = \pi\int_0^{0.5}(8x - x^2)dx$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_{0.5} = \pi\left[4x^2 - \frac{x^3}{3} + c\right]_0^{0.5} = \pi\left[4(0.5)^2 - \frac{(0.5)^3}{3} + c - 0 - c\right] = 3.011\ ft^3$$

Para el segundo volumen hasta una profundidad de líquido de 1.0 ft., se plantea la integral:

$$V_1 = \pi\int_0^{0.7173943}\left(\sqrt{8x - x^2}\right)^2 dx + \pi\int_{0.7173943}^{1}\left(2 + \sqrt{0.25 - (x - 1.12772)^2}\right)^2 dx =$$

$$V_1 = 6.081\ ft^3 + \pi\left[2.97825\ x + 1.12772\ x^2 - \frac{x^3}{3} + (2x - 2.25544)\sqrt{0.25 - (x - 1.12772)^2} + 0.5 arcsen\ (2x - 2.25544) + c\right]_{0.7173943}^{1}$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_1 = 6.081ft^3 + \pi\left[2.9783 + 1.1277 - \frac{1}{3} + 0.1235 - 7.3998 + c - 2.1366 - 0.5804 + 0.1231 + 0.2345 + 0.4813 - c\right] = 11.239ft^3$$

Para el tercer volumen hasta una profundidad de líquido de 1.5 ft., se plantea la integral:

$$V_{1.5} = \pi\int_0^{0.7173943}\left(\sqrt{8x - x^2}\right)^2 dx + \pi\int_{0.7173943}^{1.12772}\left(2 + \sqrt{0.25 - (x - 1.12772)^2}\right)^2 dx + \pi\int_{1.12772}^{1.5}(2.5)^2 dx =$$

Resolviendo la integral para los límites establecidos:

$$V_{1.5} = 6.081ft^3 + 7.655ft^3 + \pi[6.25x]_{1.12772}^{1.5} = 143.736 + 6.25\pi[1.5 + c - 1.12772 - c] = 21.046ft^3$$

Profundidad de líquido en pies.	Volumen del líquido en pies cúbicos	Volumen del líquido en litros
0.5 ft.	3.011 ft^3	85.26 lts.
1 ft.	11.239 ft^3	318.25 lts.
1.5 ft.	21.046 ft^3	595.96 lts.
2 ft.	30.863 ft^3	873.94 lts.
2.5 ft.	40.68 ft^3	1,151.93 lts.
3 ft.	50.5 ft^3	1,430.0 lts.
3.5 ft.	60.32 ft^3	1.708.07 lts.
4 ft.	70.133 ft^3	1,985.95 lts.
4.5 ft.	79.95 ft^3	2,263.93 lts.
5 ft.	89.768 ft^3	2,541.95 lts.
5.5 ft.	99.585 ft^3	2,819.93 lts.
6 ft.	109.392 ft^3	3097.64 lts.
6.5 ft.	117.62 ft^3	3,330.63 lts.
7 ft.	120.63 ft^3	3,415.86 lts.

Tabla 4: Valores diferenciales para el volumen del tanque.

F. **Análisis de los resultados y/o pruebas a modelos físicos**. Cuando no se tiene la posibilidad de manejar un modelo físico, se aplican dos o tres métodos analíticos o gráficos con apoyo de computadora, todo esto para tener la seguridad de que siempre se obtendrá el resultado correcto. En las Figuras 2 y 3, se pueden observar uno de los modelos físicos elaborados por los alumnos del curso de cálculo integral para evaluar la efectividad del método.

Figura 2: Prototipo de tanque cilíndrico vertical.

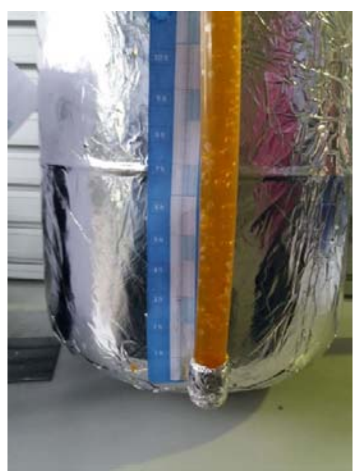

Figura 3: Escala para determinar volumen.

G. **Presentación del reporte final de resultados**. Para este problema planteado y hasta aquí resuelto analíticamente y/o gráficamente, los alumnos proceden a elaborar el reporte final del problema resuelto, aclarando que en este reporte son fundamentales las reflexiones o conclusiones que el alumno realice de su caminar por la senda que conduce a la búsqueda y adquisición de conocimientos. Se establece la resolución definitiva y se elabora un reporte final, brindando así al alumno una experiencia de matemáticas aplicada a la resolución de problemas en la industria.

H. Creación de problemas asociados: En este último paso del método se recolectan a través de una lluvia de ideas en el grupo, las modalidades que pudiesen encontrarse en la empresa. Para este caso se propone analizar diferentes tipos de tanques, desde los de tapas planas, los cuales no trabajan a presión interna pero que el análisis de su comportamiento al llenado resulta un reto cuando son colocados horizontalmente. También se tienen los de tapas semielípticas o los de tapas semiesféricas. Como se puede observar, cada uno de los casos sugeridos genera un nuevo reto de un problema diferente a resolver.

Los pasos del método deberán abordarse con toda la claridad y detenimiento que requiera el grupo, ya que de esto depende la real comprensión del problema y su resolución, pues de acuerdo a Chaitin (2015): “Solo entendemos algo cuando sabemos programarlo (¡uno mismo, no otra persona!). En caso contrario no lo entendemos en realidad, solo creemos entenderlo”.

Esto nos habla de la comprensión de los procesos de resolución de problemas hasta llegar al verdadero conocimiento, pues a la vista salta el análisis paso a paso de cada uno de los conceptos de matemáticas, hasta llegar al fondo de los saberes que, aunque Chaitin (2015) lo relaciona con la programación, el programador y el no programador deberá incursionar en todo momento hasta comprender la génesis del conocimiento.

Los anteriores pasos con los que se guían las clases, se han puesto en práctica a través de una adaptación didáctica a la enseñanza en las aulas. En este proceso y sobretodo en los primeros ejercicios, el alumno es guiado por el catedrático desde la creación del problema hasta la solución del mismo, enfocados a despertar o desarrollar la creatividad e intuición. Se hace uso de esquemas donde el alumno permita expresar la comprensión de dicho problema, aprendiendo a llevar el modelo real del objeto del problema a un modelo matemático gráfico y analítico.

3. Conclusiones

El trabajo que aquí se presenta no muestra un producto final, se trabajará en la obtención de una mayor cantidad de problemas y su metodología didáctica, con el fin de experimentar con diversas generaciones, hasta alcanzar un grado aceptable de aplicabilidad en esta Universidad Tecnológica de Tula Tepeji.

Se ha observado que la enseñanza de las matemáticas mediante el método propuesto, tanto maestro como alumno son participativos, generando interés en el aprendizaje de esta rama de la ciencia. Así mismo cabe aclarar que los alumnos en este proceso, muestran una marcada tendencia a la praxis, por lo que la parte teórica aún sigue siendo tediosa.

Este método de enseñanza normalmente toma un mayor número de horas, en comparación con una clase tradicional, requiriendo para el efecto, la comprensión y el involucramiento de autoridades educativas, pero principalmente de los actores del proceso enseñanza aprendizaje (maestro y alumno), quienes deben privilegiar en todo momento el razonamiento, abriéndose paso en el camino del conocimiento.

Es necesario que el alumno se sienta acompañado por el profesor, al inicio de la aplicación de esta metodología, puesto que se pretende que el estudiante se torne más analítico, pues los problemas aquí planteados resultan no ser de su dominio total.

Reconocimientos

Los autores desean agradecer a las empresas que permitieron la participación en sus procesos de producción, con el fin de adquirir los materiales de resolución práctica de los problemas que se presentaron durante el desarrollo de este proyecto, así mismo a la Universidad Tecnológica de Tula Tepeji, por permitir el tiempo necesario para trabajar en las empresas. A los investigadores de reconocidas trayectorias, quienes aportaron su guía para estructurar el proyecto.

4. Bibliografía

Camarena Gallardo, Patricia. (2013). “A treinta años de la teoría educativa, Matemáticas en el contexto de las ciencias”. *Innovación Educativa,* 13 (62): 18 – 44.

Chaitin, Gregory. (2015). *El número omega. Límites y enigmas de las matemáticas.* México: Tusquets Editores México.

Chevallard, Yves. (2009). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.

Cuevas Vallejo, Carlos A. y Pluvinage, François. (2015). "Una propuesta de ingeniería didáctica para la enseñanza de las matemáticas". *El Cálculo y su enseñanza*, 6 (8): 167 - 190.

Cuevas Vallejo, Carlos A. y Pluvinage, François. (2003). “Les proyets d’action practique, elements d’une ingenierie d’enseignement des mathematiques”. *Annales de didactique et sciences cognitives*, IREM de STRASBOURG, 8: 273-292.

Cuevas Vallejo, Carlos A., et. al. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa.* México: Pearson.

Hitt, Fernando y Dufour, Sarah. (2013). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada. En: Cuevas Vallejo, Carlos A., et.al. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa.* México: Pearson.

Imaz J., Carlos y Moreno A., Luis. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo.* México: Trillas.

OEI. (2016). “Los diez mandamientos del profesor según Polya”. *Revista escolar de la olimpiada interamericana de matemáticas,* 10. Recuperado de: http://www.oei.es/oim/revistaoim/divertimentos10.htm. [Consultado el 25 de julio 2016].

Piaget, Jean. (1991). *Seis estudios de psicología*. España: Labor.

Resnick, Lauren B. y Ford Wendy, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* España: Ediciones Paidós Ibérica.