Espacios vectoriales desde la realidad a la abstracción

Humberto Madrid; Josefina M. Cribeiro; Martha L. Sánchez
Universidad Autónoma de Coahuila; Instituto Tecnológico de Sabinas
México
hmadrid@gmail.com; josefina.cribeiro@gmail.com;
lili_sanchez10@hotmail.com

Resumen. En reuniones sobre reformas curriculares escuchamos propuestas de eliminar el tema de espacios vectoriales del programa de Algebra Lineal por no tener aplicaciones, no estar vinculado con el resto del programa, su carácter teórico y dificultar la asimilación de los conocimientos. Por lo que se presenta una investigación detallada de las dificultades intrínsecas del concepto, las que presentan los estudiantes para comprenderlo y la forma de tratar el tema en las aulas. Diseñamos instrumentos didácticos, que establecen un puente entre aspectos conocidos en la realidad diaria de los estudiantes y el conjunto de objetos matemáticos con leyes y propiedades que conforman el espacio vectorial.

Palabras clave: lenguaje natural, lenguaje matemático, espacio vectorial

Abstrac. In meetings on curricular reforms, we heard proposals to eliminate the topic of vector spaces from the Linear Algebra program because it does not have applications, is not linked to the rest of the program, is theoretical in nature, and makes it difficult to assimilate knowledge. Therefore, a detailed investigation of the intrinsic difficulties of the concept, those presented by students to understand it and the way of dealing with the subject in the classroom is presented. We design didactic instruments that establish a bridge between known aspects in the daily reality of students and the set of mathematical objects with laws and properties that make up the vector space.

Keywords: natural language, mathematical language, vector space

1. Introducción

En reuniones de expertos para hacer reformas curriculares escuchamos propuestas de eliminar el tema de espacios vectoriales del programa de Algebra Lineal por no tener aplicaciones, no estar vinculado con el resto del programa y su carácter teórico dificulta la asimilación de los conocimientos. Esto nos llevó a realizar una investigación detallada de las dificultades intrínsecas del concepto, las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto y la forma de tratar el tema en las aulas. Después de establecer un diagnóstico, diseñamos instrumentos didácticos, los cuales se ponen en práctica en estos momentos en el Instituto Tecnológico de la Región Carbonífera en Sabinas, Coahuila en México.

Recepción: 25 de octubre 2016 - Aceptación 28 de noviembre 2016. P.p. 1-8

Para analizar las dificultades intrínsecas del concepto de espacio vectorial y las dificultades que presentan los estudiantes para comprenderlo nos remitimos a los trabajos de Dorier (2000); Dorier y Sierpinska (2001) y Sierpinska, Nnadozie y Oktaç (2002), en ellos queda claro que el corazón de las dificultades que se presentan en el aprendizajeenseñanza de espacio vectorial se encuentran en las notaciones matemáticas, el lenguaje matemático muy lejano al lenguaje natural de los estudiantes y la distancia existente entre pensamiento práctico de acción inmediata de los estudiantes y el pensamiento teórico basado en la reflexión del concepto. Madrid (1981) añade otras dos dificultades para los estudiantes, la primera, la de ver a los vectores desde puntos de vista diferentes en Física, en Cálculo y en Álgebra, llegando a decir “esos son los vectores de tal materia”, como si fueran tres conceptos diferentes con el mismo nombre; y la segunda, la de no ver nada en su entorno que tenga que ver con vectores, es más no asocian los conceptos de vector con el de espacio vectorial. Al pedir a los estudiantes que expresen lo que es un vector o un espacio vectorial, las respuestas son ambiguas y no reflejan las características de los mismos ni la relación entre ambos.

En las aulas, por lo general, el profesor recita un libro y los estudiantes memorizan los conceptos sin entenderlos y en la mayoría de los libros de texto se aborda el tema en cuestión en forma axiomática para posteriormente introducir conceptos como subespacios, dependencia e independencia lineal, bases, dimensión, etc., y sus correspondientes teoremas. La falta de referencias contextuales hace que el estudiante sienta que pasa abruptamente del planeta Tierra a un planeta desconocido.

A partir de analizar estos trabajos de investigación comprendimos la necesidad de establecer un puente entre aspectos conocidos en la realidad diaria de los estudiantes y el conjunto de objetos matemáticos con leyes y propiedades que conforman el espacio vectorial. Donde ellos pudiesen ver los vectores, trabajar con ellos, sentir la necesidad de realizar operaciones de suma, resta, multiplicación por un escalar y comprobar la posibilidad de aplicar ciertas propiedades. Ese puente es el lenguaje natural, los ejemplos que aparecen en todos los aspectos de la vida, con actividades con *n-adas* y el tránsito entre diferentes representaciones de vectores en forma física, geométrica y algebraica.

Para transitar por el puente antes mencionado, Cribeiro (2006) establece un instrumento didáctico en forma de Hojas de Trabajo, bajo el marco teórico histórico cultural de Vigotski, la teoría de la actividad del aprendizaje, la teoría de Galperin de la formación de las acciones mentales por etapas, considerada como modelo psicológico del proceso de asimilación que permite analizar la actividad cognoscitiva del proceso de enseñanza y utilizando el papel del lenguaje en lograr el paso de la etapa en forma externa a la etapa en forma interna. Ese instrumento didáctico lleva a los estudiantes por las etapas de motivación, formación de la base orientadora de la acción, representación en el plano externo de un esquema de trabajo que permita trabajar las características esenciales del objeto de estudio, la socialización de las ideas para, en forma de lenguaje natural y en forma externa, expresar las características esenciales y pasarlas luego a notaciones y lenguaje matemático. Para las etapas verbal interna y mental se pide sintetizar el proceso destacando los aspectos esenciales en forma de lenguaje natural y de lenguaje matemático. Por otro lado, Madrid, García y Reséndiz (2004) aportan ejemplos del uso de espacios vectoriales en aplicaciones contemporáneas familiares al estudiante. Sánchez (2011) presenta instrumentos didácticos que plasman todas las ideas anteriores.

2. El obstáculo del formalismo en el Álgebra Lineal y su incidencia en la teoría de Espacios Vectoriales

Continuando con este estudio, en Dorier et. al. (2000b), se plantea que, en Francia, en los años sesenta, con la reforma de "la matemática moderna", la enseñanza del álgebra lineal, cambió por completo debido a la influencia Bourbaki, quienes consideraban que la geometría puede ser más accesible a los estudiantes si se basa en los axiomas de la estructura de espacios afines.

Por lo tanto, la teoría axiomática de los espacios vectoriales de dimensión finita se enseñaba en el primer año de la escuela secundaria (a una edad de 15 años). Sin embargo, al inicio de los ochentas, y tras la reforma de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias francesas, se llevó gradualmente a la eliminación de cualquier tema relacionado con el álgebra moderna. Además, la enseñanza de la geometría se centró en el estudio de las transformaciones de la geometría elemental, generando con esto, que las teorías formales fueran poco conocidas por los estudiantes y al entrar a la universidad, hoy en día, tienen poca práctica con cualquier disciplina matemática formal.

Debido a esto, la enseñanza del álgebra lineal, en el primer año del nivel universitario, cambió y se convirtió en menos teórica, por representar el primer contacto con un "enfoque" moderno. Como alternativa a esta situación, se decidió, en muchas universidades, preparar a los estudiantes para la enseñanza del álgebra lineal con un curso preparatorio de geometría cartesiana y/o un curso de lógica y teoría de conjuntos.

Robert y Robinet (1989) citado por Dorier et. al. (2000b, 86), muestra las principales críticas hechas por los estudiantes de álgebra lineal, su preocupación hacia el uso del formalismo, la enorme cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ya saben en Matemáticas.

Por otra parte, los profesores se quejan de sus estudiantes por la aplicación incorrecta de los elementos básicos de la lógica o la teoría de conjuntos, y de la falta de habilidades elementales de la geometría cartesiana, teniendo como consecuencia no poder utilizar la intuición para construir representaciones geométricas de los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales.

Estas investigaciones, revelan que los pocos intentos de restablecer la enseñanza anterior, en la geometría cartesiana y/o la lógica y la teoría de conjuntos, no parece mejorar sustancialmente la situación. De hecho, muchos trabajos han demostrado que las dificultades con la lógica o la teoría de conjuntos no pueden interpretarse sin tener en cuenta el contexto particular en que estas herramientas se utilizan.

Además, en 1990, Dorier et. al. (2000b, 86), estudió con herramientas estadísticas la correlación entre las dificultades con el uso de la definición formal de independencia lineal y las dificultades con el uso de la implicación matemática en diferentes contextos. Aunque estos dos tipos de dificultades muestran en un principio conexión, los resultados muestran claramente que no existen correlación sistemática.

Diversos estudios de diagnóstico realizados entre 1987 y 1994, revelaron mediante ejemplos, que las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal no sólo son las dificultades comunes, debido a las manipulaciones formales, sino también la falta de conocimiento previo en la lógica y la teoría elemental de conjuntos. Esto significa, que no es sólo problema del formalismo las dificultades de los estudiantes, la mayor parte de las dificultades radica en la comprensión del uso específico del formalismo de la teoría de espacios vectoriales, y la interpretación de los conceptos formales. Históricamente los espacios vectoriales surgieron con una relación más intuitiva, en contextos como la geometría o los sistemas de ecuaciones lineales. Para su comprensión se requiere de capacidades para establecer igualdades de conjuntos, distinguir entre objetos, subobjetos y subconjuntos.

3. El pensamiento teórico y el pensamiento práctico según Sierpinska

En Hurman (2002), Sierpinska establece una distinción entre estas dos maneras de pensar, inspirándose en la noción del científico Vigotsky:

- El pensamiento teórico es una actividad mental especializada en sí mismo. □ El pensamiento práctico es una actividad auxiliar que acompaña y guía otras actividades.
- El pensamiento teórico se expresa a sí mismo en la palabra escrita o textos.
- El pensamiento práctico se expresa a sí mismo en la acción directa en el ambiente.

En Sierpinska et. al. (2002), se estima que la manera de pensar teórica es necesaria para el aprendizaje de álgebra lineal, ya que tras años de investigación en conocer las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de álgebra lineal, sugiere que la tendencia de los estudiantes, es acercarse con un pensamiento práctico (caracterizado por intuiciones que dependen de un contexto), en vez de un pensamiento teórico en álgebra lineal y ésta es una de las razones de muchas de las dificultades, especialmente con los aspectos estructurales de la teoría.

En Sierpinska (2000, 209-246), se menciona que la diferencia entre el pensamiento teórico y el pensamiento práctico, es metodológica, no distingue entre procedimientos actuales del pensamiento, que parecen tener siempre una parte práctica y una parte teórica. Señalando, que el conocimiento científico es teórico, aunque los científicos no siempre piensan de forma teórica, ya que la mayoría de las veces los científicos piensan en formas prácticas, entendiendo por pensamiento práctico investigaciones científicas de paradigmas conocidos y no como práctica de la vida cotidiana, aunque en algunas ocasiones, su práctica cambia al pensamiento teórico, poniendo a prueba su sentido común, por ejemplo en matemáticas, cuando se enfrentan a una contradicción, o una pregunta particularmente confusa, o cuando tienen que defender su teoría, de las críticas.

Por otra parte, menciona que el pensamiento práctico es el que conduce a la identificación de problemas. Estos pueden ser enmarcados dentro de una teoría ya formulada y, posiblemente, solucionados o entendidos sobre la base de herramientas técnicas y analíticas. Aunque también, puede llevar a confusión y errores, no sólo en los estudiantes, sino también en los científicos.

Agregando, que el pensamiento práctico funciona como un obstáculo epistemológico; es decir, como una manera de pensar, que es útil o incluso necesaria para el desarrollo del conocimiento científico, pero con un dominio limitado de validez, y que el pensamiento teórico es pensar en un sistema de conceptos, donde el significado de un concepto se basa en sus relaciones con otros conceptos. En otras palabras, el pensamiento teórico produce teorías.

4. Dificultades en el aprendizaje de espacios vectoriales

En Cihan et. al. (2003) se menciona que en un curso de álgebra lineal, la teoría de espacios vectoriales se presenta generalmente de manera muy formal, provocando graves dificultades en muchos de los estudiantes. Por lo que se realizó un estudio, donde se investigó el efecto que tiene la enseñanza de la teoría del espacio vectorial, desde el punto de vista geométrico, en el aprendizaje de los estudiantes.

Encontrando que uno de los más importantes problemas relacionados con la enseñanza del concepto, es entender el establecimiento de la relación entre el conocimiento, la intuición acerca de las estructuras concretas y la naturaleza abstracta del lenguaje axiomático de la teoría del espacio vectorial. Enfatizando que hay una especial importancia de las estructuras geométricas llamadas semi-concretas, en donde se establece la conexión; ya que los resultados de este estudio indican que los estudiantes que tomaron el curso de álgebra lineal, dada desde el punto de vista geométrico, lograron establecer esta conexión. Además, los resultados sugieren que los estudiantes son más capaces para describir los conceptos desde el punto de vista geométrico y también desde el punto de vista algebraico. Concluyendo, que la visualización en el proceso de enseñanza, de la teoría de este concepto, desde el punto de vista geométrico aumentó el aprendizaje significativo, ya que aumenta la motivación.

En Kú et. al. (2008) se estudia las dificultades en la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial, apoyándose en la teoría APOE (acción-proceso-objeto-esquema). En ella se presenta un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión del concepto de base en álgebra lineal. Para esto se diseñó una entrevista que permitió analizar el proceso de construcción del concepto.

El aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal debe empezar por el establecimiento de las relaciones adecuadas entre los conceptos conocidos, necesarios en la construcción de los nuevos conceptos.

Los vectores se introducen por primera vez a los estudiantes, en Física, desde el punto de vista de fuerzas con magnitud, dirección y sentido. Posteriormente se introducen en Cálculo con un sentido geométrico y algebraico. Por último, en Algebra Lineal se les habla de vectores como los elementos de un Espacio Vectorial, el cual se introduce como una estructura algebraica mediante un conjunto de axiomas. El hecho de establecer diferentes representaciones y definiciones hace que los estudiantes consideren que tienen definiciones diferentes de acuerdo a la asignatura que lleven y que se trata de conceptos diferentes.

Se pueden presentar ejemplos donde se muestran vectores representados desde el punto de vista físico, los cuales son representados en forma geométrica y algebraica, comprobándose que con ellos se pueden realizar las operaciones de suma y multiplicación por un escalar y para los cuales se cumplen los axiomas de Espacio Vectorial. Posteriormente, se presentan situaciones que pueden ser modeladas por *n-adas*, las cuales no se pueden representar geométricamente, ni tienen un sentido de fuerzas físicas. Para algunos de esos problemas tiene sentido la definición de suma y multiplicación por un escalar, aunque para otros no tiene sentido alguna de estas operaciones.

El objetivo de trabajar con estos ejemplos, es el de presentar situaciones concretas donde se puedan trabajar conjuntos de elementos, para los cuales está definida la suma y la multiplicación por un escalar y otros en los cuales no lo están y comprobar si se cumplen los axiomas de Espacio Vectorial. Estos ejemplos facilitan la comprensión de que un vector es un elemento de un conjunto para el cual está definida la suma y el producto por un escalar y donde se cumplen los axiomas de Espacio Vectorial, no importa la representación que se utilice ni el tipo de elemento que sea.

Se presenta una propuesta didáctica sobre la construcción del concepto de Espacio Vectorial. Conformada por tres hojas de trabajo basadas en competencias. Presentamos aspectos generales relacionados con el diseño de las Hojas de Trabajo, donde se describe la forma en como el estudiante transita por las diferentes etapas de aprendizaje, enseguida damos una breve explicación del concepto de competencia según el Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica y finalmente presentamos las hojas de trabajo.

5. Características de las Hojas de Trabajo

Estas hojas de trabajo, están diseñadas para facilitar la comprensión del concepto de Espacio Vectorial, basadas en las etapas de aprendizaje planteadas por Galperin, las ideas de Piaget de manipular el objeto de estudio para conocerlo y de Vigotsky trabajar en la zona de desarrollo próximo. Donde se favorecen el desarrollo de competencias y el trabajo en asamblea, así como el incremento de habilidades. La estructura de las Hojas es la siguiente:

I. Acciones y competencias a desarrollar.

II. Problema detonante de la motivación III. Preparación previa:

IV.

1.- Seleccionar material y observar:

2.- Identificar, interpretar y analizar

3.- Problemas de contexto.

4.- Sintetizar las ideas principales

5.- Establecer conjeturas

V. Acciones en el aula y centro de cómputo.

VI. Trabajo independiente extra clase.

VII. Conclusiones

6. El proceso de Enseñanza-Aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales a través de la aplicación de tres hojas de trabajo tituladas basadas en competencias genéricas

Las tres hojas de trabajo son:

Hoja de trabajo, con énfasis en la noción física de vector.

Hoja de trabajo, con énfasis en la noción algebraica de vector.

Hoja de trabajo, con énfasis en la noción geométrica de vector.

Todas basadas en las siguientes competencias genéricas:

- Competencia de lenguaje matemático
- Competencias de conceptualización
- Competencias de razonamiento lógico
- Competencias de abstracción
- Competencias de solución de problemas
- Competencias de manejo de herramientas
- Competencias de aplicación de la estructura matemática (aritmética, álgebra, geometría, geometría analítica y cálculo)

En estas tres hojas se aborda igual estructura de aprendizaje.

Bibliografía

Cihan, K., Sabri, İ. y Ahmet, I. (2003). “On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces”. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*. 7(1): 59–67.

Cribeiro, J. (2006). Importancia en matemática educativa, de la interrelación entre la teoría matemática, técnicas modernas de cómputo y problemas del contexto empresarial para motivar a docentes y estudiantes. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano.* Clame: 39-60.

Dorier, J.L. (2000). “Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces”. En: J.L. Dorier (ed.). (2000). *On the teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet J. y Rogalski, M. (2000b). "The obstacle of formalism in Linear Algebra”. En: J.L. Dorier (ed.). (2000b). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers: 86-124.

Dorier, J.L. y Sierpinska, A. (2001). “Research into the teaching and learning of linear algebra”. En: D. Holton (ed.). *The teaching and Learning of Mathematics al University Level, An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers

Hurman, A. (2002). “El papel de las aplicaciones en Álgebra Lineal”. Recuperable en: http://ecovirtual.uncu.edu.ar/investigacion/2002/Dis/Matematicas/24/T24.pdf

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). “Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE”. *Educación Matemática*, 20(2): 65-89.

Madrid, H. (1981). “Quisicosas Vectoriales”. *Cuadernos de educación matemática 1. Serie Enseñanza de la Matemática*. Facultad de Ciencias, UNAM.

Madrid, H., García I. y Resendiz, E. (2004). “Motores de búsqueda en Internet y la descomposición matricial SVD”. *Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones.* Sociedad Matemática Mexicana, 33: 123-135.

Sánchez, M.L. (2011). *Dificultades en el aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial: el caso* R^n. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, México

Sierpinska, A. (2000). “On Some Aspects of Students’ Thinking in Linear Algebra”. En: J.L. Dorier (ed.). (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers: 209246

Sierpinska, A, Nnadozie, A. y Oktac, A. (2002). *A study of relationships between Theoretical Thinking and high Achievement in Linear Algebra*. Concordia University: Montreal.