Comparación de las estructuras mentales del límite de una función en su concepción dinámica de dos estudiantes de matemáticas

Comparison of the mental structures of the limit of a function in its dynamic conception of two mathematics students

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

América Guadalupe Analco Panohaya,ame.lups@gmail.com
Lidia A. Hernández-Rebollar, lidia.hernandez@correo.buap.mx
Estela de Lourdes Juárez-Ruiz, estelajuarez2000@gmail.com
Honorina Ruiz-Estrada[1]
hruizestrada@gmail.com

Recibido:19 de agosto 2021

Aceptado: 23 de diciembre 2021

Autor de Correspondencia: *América Guadalupe Analco Panohaya*

ame.lups@gmail.com

Resumen: *En esta investigación se discute la comparación de las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la concepción dinámica de límite de una función de una variable real, de dos estudiantes de la licenciatura en matemáticas que cursan dos etapas diferentes. El diseño de las actividades contestadas por estos alumnos y el análisis de sus respuestas se enmarcan en las teorías APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y de representaciones semióticas. Se encontró que, el alumno más adelantado en sus estudios construyó la estructura Objeto de límite y realizó transformaciones semióticas entre los registros algebraico-numérico, gráfico y verbal, aspectos que no mostró el alumno de menor avance en la licenciatura en matemáticas, quién evidenció dificultades desde la Estructura Acción.*

Palabras Clave: *Límite de una función, APOE, representaciones semióticas.*

Abstrac: *The aim of this research was to compare the mental structures and mental mechanisms related to the concept of the limit of a function of a real variable of two students who were in different stages of the mathematics career. It is part of a broader investigation that aims to know how the understanding of this concept evolves in mathematics students. The design of the activities and the analysis of the responses were based on APOE (Action, Process, Object and Scheme) and semiotic representations theories. It was found that the most advanced student in their studies built the Limit Object structure and carried out semiotic transformations between the algebraic-numerical, graphic and verbal registers, aspects that the student with the lowest progress in the mathematics degree did not show, who showed difficulties since the Action structure.*

Keywords: *Limit of a function, APOE, semiotic representations.*

[1]Benemérita Universidad Autónoma de Puebla | BUAP · Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

1. Introducción

Las matemáticas constituyen un conocimiento básico para el mundo extramatemático, dada su aplicación en prácticamente todos los ámbitos de la vida cotidiana. A pesar de su importancia, en nuestro país, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas presenta rezagos importantes a nivel de la educación obligatoria. Esto se desprende de los datos de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2018), donde México aparece con un puntaje menor que el promedio de los países evaluados.

Uno de los conocimientos matemáticos más recurrentes en los programas de estudio del nivel preuniversitario y universitario es el cálculo. En particular, el cálculo diferencial y el cálculo integral están presentes en carreras de las ciencias exactas y las ingenierías.

En el ámbito de la educación matemática, el concepto de límite es uno de los más estudiados, porque es el cimiento para la comprensión de otros conceptos matemáticos esenciales como derivada, integral, continuidad y convergencia, entre otros.

Los autores han indagado acerca de las dificultades estudiantiles para acceder al concepto de límite y como construirlo. En relación a este último, la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) permite construir modelos de cómo un individuo construye el concepto de límite. En este marco se desarrolla la presente investigación que se detalla posteriormente.

Ahora, en cuanto a las dificultades para acceder al concepto de límite, diversos autores han evidenciado que el concepto de límite es complejo de entender. Cornu (1991, citado en Fernández et al., 2018, p. 145) afirma que "una de las grandes dificultades emana de la complejidad de entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender partiendo de su definición matemática". A su vez, Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996, citado en Vrancken et al., 2006, p.11) manifiestan, al referirse a los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985) que "la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe tanto a su riqueza y complejidad, como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática". Los estudios de Cornu demostraron que los alumnos tienen "concepciones espontáneas personales" que provienen de su experiencia cotidiana. Dichas concepciones son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo, de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Asimismo, Sierpinska (1987, citado en Morante 2020) propuso una lista de obstáculos alrededor del concepto de límite desde una perspectiva del desarrollo histórico del concepto y de estudios de casos con alumnos. En general, distingue los siguientes obstáculos: horror al infinito, obstáculos ligados a la noción de función, geométricos, lógicos y derivados del uso de símbolos. De igual manera, Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, y Vidakovic (1996) mostraron que el concepto de límite no es estático como se cree. Por el contrario, tiene un esquema muy complicado respecto a su concepción dinámica y para comprender su definición formal, se requiere que los estudiantes tengan una concepción de cuantificación bien construida.

Tall y Viner (1981) observaron diversos conflictos cognitivos en los estudiantes sobre su comprensión. Por ejemplo, la imagen que un individuo tiene sobre el concepto de límite al considerarlo como un proceso dinámico de aproximación sucesiva que converge a un valor sin alcanzarlo entra en conflicto con la definición formal del concepto.

Para Medina (2001), el concepto de límite ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo, y su complejidad resulta ser fuente de dificultades, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero, por su carácter estructural que lo posiciona como eje central y concepto básico, sobre el cual se construye la estructura del Cálculo Diferencial e Integral y otros conceptos de otras ramas de la matemática. Para Blázquez, Gatica y Ortega (2008, citado en Camacho et al., 2013), los estudiantes no logran interpretar con facilidad la definición formal de límite y en poco tiempo dicha definición es olvidada.

Asimismo, Fernández, Sánchez, Moreno y Callejo (2018) mencionan que el papel de la coordinación de los procesos de aproximación en los diferentes modos de representación, resultan esenciales en la comprensión del concepto de límite.

Hasta aquí, se han mencionado algunas de las dificultades estudiantiles para acceder al concepto de límite. Ahora, nos preguntamos acerca de la comprensión de límite. En este sentido, Usman, Juniati y Siswono (2017) mencionan que, "comprender el límite de una función es fundamental, porque consiste en la comprensión del concepto básico del análisis matemático el cual tiene un papel importante en la comprensión de la diferenciación, el análisis integral y matemático" (p. 2).

Derivado de lo anterior, resulta interesante conocer cómo evoluciona la comprensión del concepto de límite en dos etapas diferentes de la formación en la Licenciatura en Matemáticas que se imparte en la Universidad Autónoma de Puebla. Con este fin, se compararon las estructuras mentales y los mecanismos cognitivos relacionados con el concepto de límite de una función de una variable real de dos estudiantes. Se desea explorar una posible evolución de las estructuras mentales y detectar si existen dificultades que prevalecen a lo largo del programa de estudios.

La presente investigación se basó en la teoría APOE. Nos apoyamos en la Descomposición Genética (DG) de Hernández, Juárez y Ruiz (2021), que describe la construcción del concepto de límite de una función de variable real**,** integrando la teoría de Representaciones Semióticas de Duval (2006) a la DG de Swinyard y Larsen (2012). También, se incluyó diseño instruccional de Morante (2020) basado en estas mismas teorías.

El presente trabajo se expone en cuatro secciones. La primera corresponde al marco teórico, donde se hace una exposición sucinta de la Teoría APOE y la Teoría de los registros semióticos, que son los pilares fundamentales de nuestra investigación. También se presenta la descomposición genética a utilizar para evaluar los mecanismos y estructuras mentales de los informantes. En la segunda sección se describe el método seguido, las características de los participantes y las actividades debidamente justificadas, que resolvieron los estudiantes. La tercera sección contiene las soluciones estudiantiles, la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que desarrollaron, así como la discusión de las posibles dificultades que tuvieron para resolver cada actividad. Finalmente, se presentan las conclusiones, señalando las aportaciones de este trabajo.

2. Marco teórico

En esta sección presentamos el marco teórico sobre el cual se desarrolla nuestra investigación.

2.1 Teoría APOE

Esta investigación parte de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), la cual sostiene que un individuo es capaz de aprender cualquier concepto matemático mediante la construcción de estructuras y mecanismos mentales. Esta teoría tiene por objetivo entender cómo se aprenden los conceptos matemáticos y plantea un modelo de lo que podría estar pasando en la mente del individuo cuando intenta comprender un concepto matemático. Además de que su uso aumenta la probabilidad de que el estudiante desarrolle una actitud positiva en relación con las matemáticas, favoreciendo este tipo de pensamiento y por consiguiente la voluntad de mejorar su habilidad matemática (Retno y Nymik, 2017).

Esta teoría surgió a raíz del trabajo de Jean Piaget y fue creada por Dubinsky en la década de los ochenta del siglo pasado, al reflexionar sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en la matemática la educación superior. Pero ¿qué es la abstracción reflexiva? Piaget responde esta pregunta en dos partes, la primera, implica reflexión, en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, lo que el padre de la epistemología genética denominó contenido y operaciones sobre dicho contenido, ya que éste refleja y realiza operaciones de un nivel o etapa cognitiva inferior a una superior; es decir, pasa de procesos a objetos. La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y operaciones, en esta etapa superior las operaciones se pueden convertir en contenido, al que a su vez, se le pueden aplicar nuevas operaciones (Piaget, 1973). Esto condujo a Dubinsky a considerar que la abstracción reflexiva es una herramienta sólida para describir el desarrollo mental de conceptos matemáticos avanzados.

> Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la teoría APOE, de cómo un proceso (acción interiorizada) se transforma en un objeto (operación en la cual, en etapas superiores, se le pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación (Arnon et al., 2014, p. 8).

Pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma A⟶P⟶ O⟶E; sin embargo, aunque se presente de esta forma lineal, el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar y retroceder entre las estructuras mentales. Dubinsky (1991) considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales:

- *Interiorización*: es la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, es decir, es el proceso mediante el cual un sujeto pasa de tener ayudas externas a tener un control interno.

- *Coordinación*: Este mecanismo se usa para describir el acoplamiento de dos o más Procesos combinando Acciones sobre los mismos, que permite generar nuevos Procesos. Dos o más procesos pueden coordinarse para formar nuevos procesos.

- *Encapsulación*: Mecanismo que consiste en transformar un Proceso en un Objeto, de tal manera que siendo el Proceso una estructura dinámica ésta se vuelva estática y se logre una estructura Objeto.

- *Desencapsulación*: Una vez que un individuo ha encapsulado un proceso en un objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo generó; en otras palabras, reinvertir el mecanismo que lo generó.

- *Inversión*. Cuando el proceso existe internamente, el estudiante es capaz de pensarlo de forma inversa (en el sentido de deshacerlo), con la creación de un nuevo proceso consistente con el inverso del proceso inicial.

La Figura 1 muestra cómo se relacionan los mecanismos antes mencionados con las estructuras mentales.

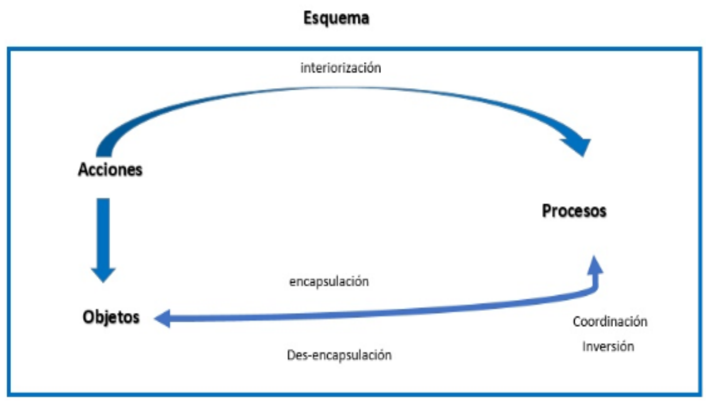


Figura 1. Teoría APOE (Arnon et al., 2014).

A continuación, se presentan las estructuras mentales de la teoría APOE (Dubinsky y MacDonald, 2001):

- *Acción*: Se considera que un estudiante posee una estructura acción si realiza las transformaciones de un objeto dirigido por estímulos externos. Estableciendo una analogía, una acción se puede imaginar como cuando un individuo realiza una actividad mediante un instructivo.

- *Proceso*: Estructura mental que se produce cuando un individuo reflexiona sobre las acciones y puede recrearlas mentalmente sin la necesidad de depender de estímulos externos; es decir, el individuo ha interiorizado las acciones en un Proceso.

- *Objeto*: Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y puede identificar las transformaciones, además de construirlas (acciones o procesos) diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto, por tanto, el individuo posee una concepción objeto del concepto. El mecanismo de desencapsulación es tan importante como el de encapsulación, debido a que permite regresar al proceso que generó dicho concepto.

- *Esquema*: Se construye como una colección coherente de las estructuras de acción, proceso, objeto y otros esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas, éstas se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continua debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

Estas construcciones son la base de las estructuras mentales de un individuo, las cuales fundamentan la construcción de esquemas. Un esquema no es una estructura estática, en el sentido de que no es una estructura terminada, sino que más bien, él está en constante evolución debido a la integración de otros objetos matemáticos que amplían su significado.

Asimismo, se debe señalar que una investigación que se fundamenta en la teoría APOE tiene tres componentes metodológicos: análisis teórico, diseño de cuestionarios o implementación de la enseñanza y análisis de datos. Estos conforman un ciclo de investigación, el cual permite obtener una descripción detallada de la comprensión del concepto a través de la repetición de estos tres elementos.

La investigación se inicia con un *análisis teórico* sobre el concepto matemático a tratar, el cual se hace mediante una exploración de libros de texto, la experiencia del investigador, el conocimiento matemático y de la teoría APOE para establecer un camino viable en la construcción del concepto. A este análisis se le denomina descomposición genética (DG) preliminar del concepto.

> Una descomposición genética es un aspecto clave de la teoría APOE. Es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción de un concepto matemático. Una DG predice cómo un estudiante construye un concepto; debe ser probado experimentalmente y refinado si es necesario. Cabe mencionar que una DG no es única, es decir, no hay pretensión en la teoría de describir cómo se construye exactamente un concepto (Trigueros y Oktaç, 2019, p. 45).

Este análisis teórico fundamenta *el diseño de la instrucción* y *su posterior implementación* a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas en el análisis o de cuestionarios que permitan observar dichas estructuras. Las actividades y ejercicios están encaminados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos y a la coordinación de dos o más procesos para la construcción de nuevos procesos. Una variedad de estrategias pedagógicas tales como el aprendizaje cooperativo, la resolución de problemas en grupo, e incluso algunas conferencias pueden ser altamente efectivas para ayudar a los alumnos a aprender las matemáticas en cuestión.

La fase de *recopilación y análisis* de datos es crucial para la investigación basada en APOE, ya que, sin evidencia empírica, una DG sigue siendo simplemente una hipótesis.

2.2 La teoría de registros de representación semiótica

La teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (2017) proporciona un marco para el análisis del conocimiento matemático, considerando no solo la naturaleza de los objetos estudiados, sino también la forma en que se nos presentan y cómo podemos acceder a ellos por medio de nuestros sentidos y pensamiento.

Un registro de representación debe permitir tres actividades cognitivas: la formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La formación de una representación identificable se asocia con la expresión de una representación mental del objeto. El tratamiento es una transformación interna de la representación en el mismo registro dado y la conversión es una transformación externa; es decir, representa la transición de un registro a otro registo. La coordinación de los diferentes registros es necesaria, pues el dominio de uno de ellos no permite el aprendizaje integral del concepto. Además, Duval (2017) afirma que los registros semióticos proporcionan los medios para crear nuevos conocimientos.

Esta teoría menciona que la manera de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de la producción de representaciones semióticas. Por tal motivo la enseñanza del concepto de límite no se debe restringir a trabajar con un solo registro. Blázquez y Ortega (2001) afirmaron que, "el concepto de límite funcional parte del concepto de función, utiliza sus representaciones, y diversas investigaciones sobre este tópico y sus representaciones sugieren considerar los siguientes sistemas: verbal, numérico, gráfico y algebraico" (p. 225).

Para Amaya (2016, citado en Amaya et al., 2021), los registros más usados para representar una función son: Coloquial o lenguaje materno, analítico, cartesiano, gráfico, figural, tabular y fenomenológico. Aunque por la naturaleza de este estudio veremos las descripciones de los siguientes registros:

- *Coloquial o del leguaje materno*: Se relaciona con la capacidad lingüística indispensable para la descripción de situaciones funcionales, así como la comunicación, interpretación y discusión de resultados, en él se pueden configurar representaciones coloquiales.
- *Analítico*: está íntimamente relacionado con la capacidad simbólica, principalmente con el álgebra y la modelación algebraica o analítica. En él se pueden configurar representaciones analítico-algebraicas y analítico-aritméticas
- *Gráfico*: consiste en un sistema coordenado, donde se pueden hacer representaciones gráficas, correspondientes a un conjunto de puntos que finalmente las determinan.
- *Tabular*: consiste en una tabla, en la que se ubican las entradas, ya sea en las filas o en las columnas, de tal forma que el número de columnas (o filas según se ordenen), corresponda al total de cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función. La tabla llena con la información correspondiente a la función es la representación tabular.

2.3 Concepciones del concepto de límite

Pons (2014) describe el concepto de límite a través de dos concepciones: la concepción dinámica y la concepción métrica. La primera supone construir un proceso en el dominio, en el cual x se aproxima a a, y, construir otro proceso en el rango, donde $f(x)$ se aproxima a L y utilizar la función para coordinarlos. La concepción métrica involucra la construcción de un proceso en el dominio, donde $(x - a)$ en valor absoluto se aproxima a 0, y la construcción de otro proceso en el rango, en el cual $(f(x) - L)$ en valor absoluto se aproxima a 0, y coordinarlos.

2.4 Descomposición genética

La DG que se usa en este trabajo es la de Hernández et al. (2021), la cual se apoya de los registros semióticos para describir la concepción dinámica del límite de una función en una variable. En la Tabla 1 se muestra un resumen de está DG, la cual incorpora los registros: algebraico-numérico (AN) y gráfico (G). Para conocer la versión completa, pueden enviar algún correo a las autoras.

Tabla 1: Resumen de la descomposición genética del límite de una función f en $x=a$ en su concepción dinámica

Registro algebraico-numérico (AN)	Registro gráfico (G)
P1AN. La acción de asociar el valor de la función, dada en una tabla o en una expresión algebraica, con su correspondiente valor *x* cercano a un número *a*.	P1G. La acción de identificar en la gráfica de una función f la imagen de un valor *x* cercano al valor a.
P2AN. La acción de asociar el valor de la función *f*, dada en una tabla o en expresión algebraica, con sus correspondientes valores *x*, cada uno sucesivamente más cercano a *a* que el anterior.	P2G. La acción de identificar en la gráfica de una función f los valores $f(x)$ de algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano al valor *a* que el anterior.
P3AN. Construcción de un Proceso coordinado de la siguiente manera:	P3G. Construcción de un Proceso coordinado de la siguiente manera:
P3ANa) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio que permite imaginar una infinidad de valores *x* aproximándose al valor *a*.	P3Ga) Interiorización del paso 2 para la construcción de un Proceso en el eje X que le permita visualizar una infinidad de valores de *x* aproximándose al número *a*.
P3ANb) Construcción de un Proceso en el rango que permite imaginar una infinidad de valores *y* aproximándose o no a un valor *L*.	P3Gb) Construcción de un Proceso en el eje Y que permite visualizar una infinidad de valores de f aproximándose o no a un cierto valor L.
P3ANc) Coordinación de a) y b) a través de *f*. Es decir, la función *f* se aplica al Proceso en el dominio, de *x* aproximándose al valor *a*, para obtener el Proceso en el rango de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto número *L*.	P3Gc) Coordinación de los Procesos construidos en a) y b) a través de la gráfica de *f*. Es decir, apoyándose en la gráfica es posible relacionar el Proceso en el dominio, de *x* aproximándose al valor *a*, con el Proceso en el rango de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto número *L*.
P4AN. Encapsulación del Proceso del paso 3 en el Objeto límite de f cuando x tiende a a al concebir las aproximaciones en el registro numérico como una totalidad y manifestarlo mediante una conversión en la notación analítica: $\lim_{x\to a} f(x) = L,\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	P4G. Encapsulación del Proceso del paso 3 en el Objeto límite de f cuando x tiende a a al concebir las aproximaciones en el registro gráfico como una totalidad y manifestarlo mediante una conversión en la notación analítica: $\lim_{x\to a} f(x) = L,\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Fuente: Hernández et al. (2021).

3. Método

La investigación es de corte cualitativo y se sustenta en la metodología del ciclo de investigación de la teoría APOE de la siguiente manera: se aplicaron tres actividades diseñadas por Morante (2020), fundamentadas en las teorías APOE y de representaciones semióticas de Duval (1999), y se analizaron los datos con base en la DG de Hernández et al. (2021) para comparar las estructuras mentales construidas.

3.1 Participantes

Los informantes fueron dos estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. El primer estudiante ($E1$) tenía 21 años de edad. Al momento de su participación, acababa de cursar la materia de cálculo diferencial en una variable, perteneciente a la primera mitad de la licenciatura en matemáticas. El segundo estudiante ($E2$), de 20 años de edad, tenía un año de haber cursado esta misma materia y al momento de ser encuestado, acababa de cursar la materia de cálculo diferencial en varias variables que pertenece a la segunda mitad de la carrera de matemáticas.

3.2 Actividades

Las actividades que se aplicaron fueron tomadas de la propuesta de Morante (2020), las cuales fueron diseñadas con base en la DG de Cottrill et al. (1996) para la concepción dinámica y de Swinyard y Larsen (2012) para la concepción métrica, así como los registros semióticos algebraico-numérico, gráfico y verbal, debido a que "los registros son sistemas semióticos que proporcionan los medios para crear nuevos conocimientos" Duval (2017, p. 68). A los participantes de este estudio se les aplicaron solo tres de las 25 actividades diseñadas por Morante (2020) que corresponden a la concepción dinámica.

A continuación, se presentan y describen los objetivos de cada una de las preguntas de las actividades propuestas.

ACTIVIDAD 1

Si $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$					...				

a) Completa la tabla

b) ¿A qué número se aproxima x?

c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

d) ¿Podrías decirme cómo se relaciona $f(x)$ con x?

Esta actividad está presentada en el registro algebraico numérico y hace referencia a los tres primeros pasos de la DG en el registro (AN) . Su objetivo es evaluar si los estudiantes:

a) Realizan acciones en el registro algebraico-numérico, es decir, que a partir de los valores en la tabla cercanos a $x = 1$ asocien estos con su imagen bajo la función f.

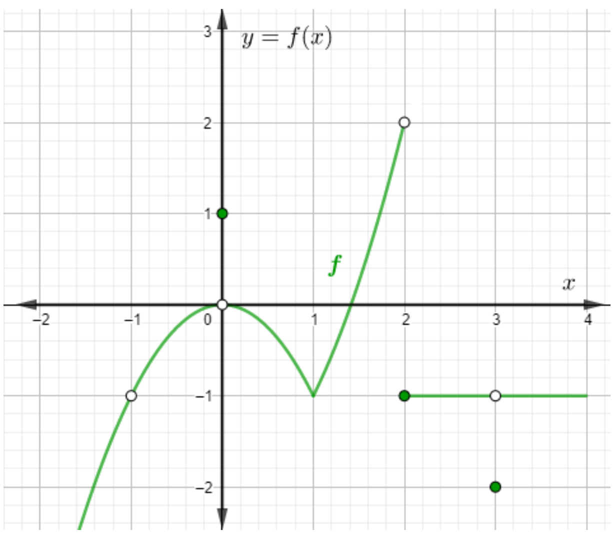
b) Interiorizan las acciones realizadas en a), para construir el Proceso en el dominio, es decir, que centren su atención en el dominio de la función para notar que los valores de x dados se aproximan cada vez más al valor de interés $x = 1$.

c) Interiorizan las acciones realizadas en el inciso a), pero esta vez centrando su atención en el rango, para notar lo que ocurre con los valores $f(x)$ cuando se comparan con $f(1)$ y si esa reflexión los lleva a manifestar que han construido el Proceso en el rango para concluir que las imágenes de $f(x)$ se aproximan a $\frac{1}{2}$.

d) Coordinan los Procesos en el dominio y rango, es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose al valor 1 para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a $\frac{1}{2}$.

ACTIVIDAD 2

Considera la gráfica de la función f y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas.



a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$

c) $f(2) = 2$

d) $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$

e) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

f) $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$

g) $f(3) = -2$

Esta actividad está escrita en dos registros, el gráfico y el algebraico, y hace referencia al paso cuatro de la DG. Su objetivo es evaluar si los estudiantes:

- Logran desencapsular el Objeto límite construido en su concepción dinámica en el registro algebraico (notación del límite de una función) y revierten los procesos de aproximación, haciendo una conversión de estos procesos al registro gráfico. Lo anterior aplica para los incisos a), b), d), e) y f) y corresponde a una reversión del paso P4AN.
- Realizan, en los incisos c) y g), la acción de identificar en la gráfica de una función f la imagen de un valor x cercano al valor a, lo cual corresponde al paso P1G.

ACTIVIDAD 3

Realiza dos representaciones gráficas de una función que tenga límite -4 en $x = -2.5$.

Esta actividad está presentada en el registro verbal y nos permite evaluar si el estudiante desencapsula el Objeto de límite, para volver a los procesos de aproximación, hacer una conversión de estos en el registro gráfico y proponer una función que satisfaga las condiciones.

4. Resultados

En este apartado se presentan las respuestas de los estudiantes y se resaltan las estructuras y los mecanismos mentales que se identificaron, así como las transformaciones semióticas que realizaron. Primero, se muestran las respuestas del estudiante $E1$, seguidas de las respuestas del estudiante $E2$.

ACTIVIDAD 1

Si $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$					...				

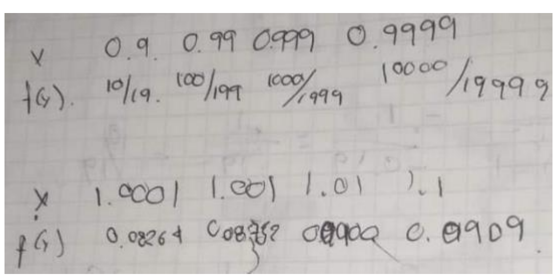


Figura 2. Respuesta del estudiante E1.

a) Completa la tabla

En la Figura 2 se observa que el estudiante realizó la acción de evaluar la función en todos los valores de x dados en la tabla. Cuando x toma los valores de 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999 el alumno completa correctamente la tabla y sus respuestas las expresa mendiante fracciones. Mientras que, para los valores 1.0001, 1.001, 1.01, 1.1, $E1$ cometió errores aritméticos y esto provocó que su respuesta no corresponda al valor de f evaluada en tales puntos. Así, este alumno mostró dificultades para realizar acciones en el registro algebraico-numérico.

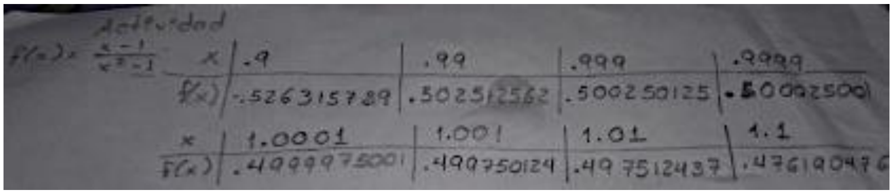


Figura 3. Respuesta del estudiante E2.

El estudiante $E2$ realizó la acción de evaluar la función en puntos cercanos a $x = 1$, las operaciones las hizo a mano y posteriormente verificó sus respuestas con calculadora (vea la Figura 3). Además, completó la tabla correctamente, mencionó que se le había dificultado operar con números decimales y que hubiera preferido trabajar con números fraccionarios. De esta forma, $E2$ dio evidencia de una estructura Acción en el registro algebraico-numérico de una función, lo cual corresponde al paso P2AN.

b. ¿A qué número se aproxima x?

El estudiante E1 respondió "x se aproxima a 1" y argumentó su respuesta de la siguiente manera: "0.9 es una décima más pequeña que 1 pero 0.99 es una centésima más chica que 1 y 0.999 es una milésima más chica que 1. Entonces, cada vez va siendo más chica la diferencia para llegar a 1".

En su argumento utiliza la métrica, pero solo lo hace con los términos a la derecha de 1. A partir de su respuesta se observa que $E1$ no ha interiorizado las acciones de aproximación a un número porque observa la distancia término a término y sólo en el lado derecho de uno. Así, no da indicios de la estructura Proceso en el dominio de la función.

El estudiante $E2$ respondió "x se aproxima a 1, porque los valores de la izquierda de la tabla se están acercando cada vez más a 1, y de igual manera sucede eso por la derecha, los valores se están acercando cada vez más a 1, es decir, de 0.9 a 0.99 encuentro que el menor es el de la izquierda y así sucesivamente así como 0.99 a 0.999 el menor o igual es el de la izquierda, entonces si yo sigo agregando más nueves que es lo que puedo predecir por los puntos suspensivos que están a la derecha me doy cuenta que me pego cada vez más al número 1. Es decir, cada vez me acerco más al número 1 tanto por la izquierda como por la derecha".

Lo anterior prueba que $E2$ ha construido el Proceso en el dominio, que corresponde al paso P3ANa). Expresó cómo imagina los términos de la sucesión acercándose "cada vez más a 1", en un proceso infinito que ocurre tanto por la derecha como por la izquierda de 1.

c. ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

El estudiante $E1$, respondió "x se aproxima a $\frac{1}{2}$" y argumentó su respuesta de la siguiente manera "observé que eran $\frac{10}{19}$, $\frac{100}{199}$, entonces la fracción cada vez se va acercando a $\frac{1}{2}$ ".

En este inciso, $E1$ observó la aproximación por la izquierda. Lo anterior no da evidencia clara de que $E1$ haya construido el Proceso en el rango, el cual corresponde al paso P3ANb) ya que su respuesta es parcial y sin explicaciones.

El estudiante $E2$ respondió "$f(x)$ se aproxima más a 0.5 pues observo que al evaluar cada una de las x dentro de la función, por la izquierda los valores correspondientes a 0.9, 0.99, etc. son muy próximos a 0.5, y en el caso de la derecha es similar, sin embargo, aquí va aumentando el número porque (la imagen de) 1.1 es 0.476 y para 1.01 es 0.49, por lo tanto, los valores que toma x al momento de evaluarlos se aproximan a 0.5".

La respuesta de $E2$ evidencia que construyó el Proceso en el rango, pues notó cómo eran las aproximaciones laterales, lo cual corresponde al paso P3ANb).

d. ¿Podrías decirme cómo se relaciona $f(x)$ con x?

El estudiante $E1$, al principio, respondió que no había encontrado ninguna relación entre ambas variables pero después de solicitarle que a partir de los incisos previos, encontrara alguna relación, mencionó que, "cuando x tiende a 1, $f(x)$ tiende a $\frac{1}{2}$".

Su respuesta muestra que coordinó ambos Procesos, pues se percató de que cuando x se acerca al valor 1, $f(x)$ se aproxima $\frac{1}{2}$, lo cual corresponde al paso P3ANc).

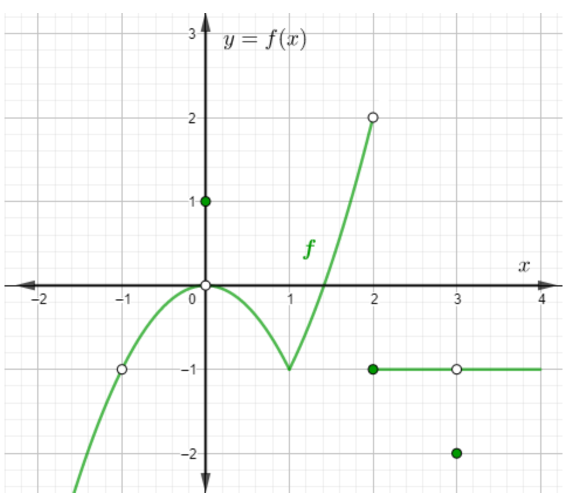
El estudiante $E2$, respondió lo siguiente:

- "$f(x)$ es enteramente dependiente de x, es decir, a cualquier valor que yo le asigne a cualquier valor que yo tome de x me va a arrojar un valor en $f(x)$"
- "$f(x)$ está determinado por el dominio que yo considere en x"
- "…mi intervalo que depende de x mi función va a tomar valores muchos menores, es decir a medida que aumente x, $f(x)$ va a ir decreciendo en su valor eso es lo que puedo notar en relación con x y $f(x)$"
- "…si yo grafico la función, puedo notar que los valores de y van disminuyendo a medida que me acerco a x ".

A partir de las respuestas que proporcionó $E2$ se observa que es capaz de visualizar la relación que existe entre las variables y logra describir su dependencia y covariación. Sin embargo, cuando menciona la aproximación, lo hace solo en el eje x, cuando dice "a medida que me acerco a x" pero no lo hace para los valores en el eje y, en lugar de hablar de la aproximación en el rango, menciona que "los valores de y van disminuyendo".

Arnon et al. (2014) mencionan que APOE no descarta la posibilidad que una vez construidas las estructuras mentales, estas no aparezcan cuando un sujeto requiera resolver ciertas situaciones. Puede ser que, a $E2$ la pregunta le resultara confusa y promoviera que él centrara su atención en la "relación" entre las variables y no en la aproximación.

ACTIVIDAD 2



a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$

El estudiante $E1$ mencionó, “es cierto, porque en la gráfica tenemos un punto el cual no contiene la gráfica, digamos, es como un intervalo abierto en ese punto, o sea es ese punto, pero no lo toca y esa es una de las definiciones de límite que se aproxima a ese punto, pero no llega a ser ese número”.

En la respuesta proporcionada por $E1$ se observa que él nota el acercamiento de $f(x)$ a dos cuando x se aproxima a 2 por la izquierda y no por lo derecha como ahí se indica. Lo cual nos muestra que no consigue hacer la conversión del registro algebraico al gráfico que es requerida para determinar que la expresión dada es falsa. Es posible que esta sea la razón por la que no logra coordinar los Procesos en el dominio y rango que le permitirían responder acertadamente.

En este inciso, el estudiante $E2$ respondió “falso, yo puedo ver en la gráfica que cuando x vale 2 por la derecha es igual a -1”.

El estudiante $E2$ realizó la conversión del registro algebraico al gráfico y se percató de que cuando x tiende a 2 por la derecha, el límite no es 2 sino -1. Por lo tanto, se puede afirmar que ha coordinado los Procesos en el dominio y rango, lo cual corresponde al paso P3Gc).

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$

En este inciso $E1$ y $E2$ respondieron “falso, a medida que x se aproxima a dos por la izquierda, los valores empiezan a ascender a $f(x) = 2$”.

Ambos estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al gráfico, pues notaron que cuando x tiende a 2 por la izquierda, el límite no es -1 sino 2. Por eso, se concluye que coordinaron los Procesos en el dominio y rango en el registro gráfico, paso P3Gc).

c) $f(2) = 2$

$E1$ dio la siguiente respuesta: “no, porque $f(2)$, porque creo que $f(2) = 1/2$ porque es el número que está en la gráfica y 2 no pertenece a la gráfica”

Aunque responde que la igualdad es falsa, se equivoca en el valor de $f(2)$. Lo anterior demuestra que este estudiante tiene dificultades para leer la gráfica y hacer la acción de ubicar las imágenes de ciertos valores de x en este registro.

El estudiante $E2$ respondió**,** “no, porque los puntos me indican si es abierto o cerrado el intervalo en este caso porque se maneja con una función a trozos entonces se está manejando intervalos y puedo percatarme que $f(2) = 2$ no es correcto, como puedo ver $f(2) = -1$”.

En este inciso, el estudiante $E2$ realizó correctamente una conversión del registro algebraico al gráfico y la acción de evaluar f en un solo punto x, que corresponde al paso P1G en este registro.

d) $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$

$E1$ mencionó "sí, es cierto, cuando x tiende a 1, $f(x)$ tiende a -1". Mientras que $E2$ comentó lo siguiente**:** "es correcto porque tanto por la derecha como por la izquierda las evaluaciones de mi función tienden a ese número a $f(x) = -1$".

A partir de sus respuestas, se aprecia que ambos estudiantes lograron desencapsular el Objeto límite representado en la expresión del inciso d) y que han construido el Proceso que resulta de coordinar los procesos en el dominio y rango, lo cual corresponde al paso P3Gc).

e) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

El estudiante $E1$ comentó lo siguiente**:** "sí, porque si fuera una función como de una parábola, entonces el límite de una parábola si sería ese que está diciendo, por ejemplo $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ y creo que si se cumpliría".

De su respuesta se observa que, para interpretar la gráfica, necesitó asociarla con una expresión algebraica. $E1$ evita el análisis en el registro gráfico pues lo traslada al registro algebraico, lo que nos permite suponer que él se siente más cómodo en este registro. Por esta razón, no da evidencia de haber desencapsulado el Objeto límite.

El estudiante $E2$ respondió**:** "el límite de $f(x)$ es cero cuando x tiende a cero, pese a que la evaluación en $f(0) = 1$".

El alumno $E2$ realizó una conversión correcta del registro algebraico al registro gráfico para construir el Proceso que resulta de coordinar los procesos dominio y rango paso P3Gc). Además, realizó la acción de evaluar f en un solo punto x, que corresponde al paso P1G. Esto evidencia que logró desencapsular el Objeto límite.

f) $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$

El estudiante $E1$ respondió**:** "cuando x se va acercando a 3, $f(x)$ se va acercando a -1".

$E1$ muestra que construyó los Procesos en el dominio y rango. Además, los coordinó a través de la gráfica de f, lo cual corresponde al paso P3Gc). Sin embargo, debemos notar que él no menciona acercamientos por la derecha ni por la izquierda, por lo que no se tiene evidencia clara de una concepción dinámica completa.

$E2$ contestó lo siguiente**:** "sí, los límites por la izquierda y la derecha son los mismos por lo tanto el límite existe y es -1".

Su respuesta evidencia que construyó los Procesos en el dominio y rango. Asimismo, los coordinó a través de la gráfica de f, lo cual corresponde al paso P3Gc). Esto nos da evidencia de que logró desencapsular correctamente el Objeto límite representado en la expresión de este inciso.

g) $\boldsymbol{f(3) = -2}$

$E1$ respondió "hay una línea arriba que contiene los puntos de dos a infinito, pero hay un punto que es exactamente $f(3)$ que es igual a -2 que es el que está ahí solito".

Mientras que $E2$ comentó lo siguiente: "$f(3)$ es -2 como lo indica su gráfica"

En la respuesta que proporcionaron ambos estudiantes, se muestra que realizaron una conversión, ya que pasaron del registro algebraico al registro gráfico y efectuaron la acción de evaluar f en un solo punto x, que corresponde al paso P1G en este registro.

ACTIVIDAD 3

Realiza dos representaciones gráficas de una función que tenga límite -4 en $x = -2.5$.

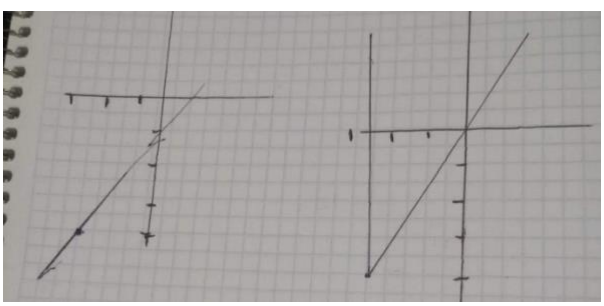


Figura 4. Respuesta del estudiante $E1$.

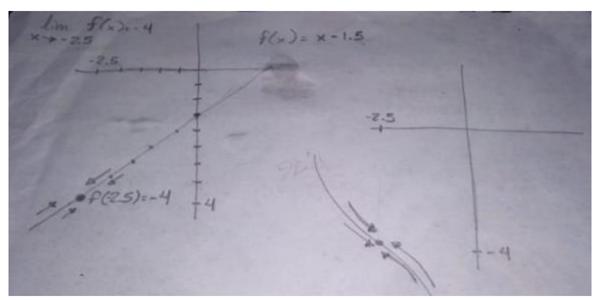


Figura 5. Respuesta del estudiante $E2$

En las Figuras 4 y 5 se observan las gráficas de $E1$ y $E2$ respectivamente, las cuales realizaron sin ninguna dificultad. De ahí se observa que ambos realizaron la conversión del registro verbal al registro gráfico, lograron desencapsular el Objeto límite construido y revirtieron los procesos de aproximación con los que se propone un límite, lo cual corresponde al paso P4G de la descomposición genética.

Reflexiones

En los resultados observamos que las estructuras mentales construidas por los dos estudiantes tienen ciertas diferencias. $E1$ mostró varias dificultades en la estructura Acción al trabajar en el registro algebraico-numérico, dado que no completó correctamente la tabla y, en el registro gráfico, tuvo problemas para ubicar correctamente el valor de la función en los puntos dados. Mientras que $E2$ mostró evidencia suficiente de la estructura Acción en los registros algebraico-numérico y gráfico.

Aunque ambos estudiantes mostraron indicios de la estructura Proceso que resulta de coordinar los Procesos en el dominio y rango (P3AN, P3G) el participante $E1$ mostró dificultades, por lo que esta estructura es cuestionable en él. Por otro lado, el participante E2 presentó evidencias claras de los Procesos dominio y rango, pero ciertas deficiencias para coordinarlos, aunque estas pudieron surgir por la forma en la que estaba redactada la pregunta.

Respecto a la estructura Objeto, $E1$ mostró cómo influye el registro semiótico en sus respuestas ya que en la actividad 2 que está en el registro gráfico mostró dificultades. El no desencapsuló el Objeto límite representado en la expresión, mientras que en la Actividad 3 que está escrita en el registro verbal sí evidenció dicha estructura, es decir, esta estructura está en proceso de construcción en $E1$. Por otro lado, el estudiante $E2$ arrojó evidencia de tener la estructura Objeto, ya que le permitió desencapsular el concepto expresado en el registro algebraico, hacer una conversión al registro gráfico y obtener el proceso que lo generó para justificar la falsedad o veracidad de las afirmaciones propuestas en dicha actividad. Asimismo, esta estructura le posibilitó realizar una conversión de un límite expresado en el registro verbal al mismo límite en el registro gráfico.

En la actividad 2, ambos estudiantes manifestaron dudas en los límites laterales, pues en algún momento los confundieron. También tuvieron dudas sobre la continuidad de una función, pues ellos no estaban seguros si el límite de la función coincidía con el valor de la función en el valor dado o no.

Conclusiones

En esta investigación se informó sobre cómo evoluciona la comprensión de la concepción dinámica de límite de una función de variable real en dos estudiantes que cursan etapas diferentes de formación de la licenciatura en matemáticas. Para ello, se compararon las estructuras mentales, los mecanismos cognitivos y las transformaciones semióticas que manifestaron estos dos informantes al responder un cuestionario diseñado para tal fin.

De sus respuestas se desprende que el alumno de menor avance en los estudios de licenciatura (E1) aún no ha logrado construir la estructura Proceso que resulta de la coordinación de los procesos dominio y rango. Este estudiante dio evidencia de esto en todos los registros semióticos evaluados y mostró mayor dificultad para coordinar dichos procesos cuando los límites laterales no coincidían. Sin embargo, la estructura mental de Objeto de la concepción dinámica del límite está en proceso de contrucción para este estudiante.

Por su parte, el estudiante de la segunda mitad de la carrera (E2) dio evidencia de haber construido cada una de las estructuras evaluadas (Acción, Proceso, Objeto) de la concepción dinámica del límite y de efectuar las transformaciones semióticas necesarias para responder las preguntas de las actividades. Cabe aclarar que la estructura Objeto solo se evaluó a través de la des encapsulación y de una conversión del registro algebraico al gráfico.

Lo anterior da indicios de cómo las estructuras mentales de la concepción dinámica del límite de una función necesitan de un uso fluido de las representaciones semióticas para evolucionar de Acción a Objeto. Esto coincide con lo mencionado por Duval (2006, p. 144) "para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno solo no se obtiene la comprensión integral del concepto".

Es importante destacar que el registro gráfico favoreció el desempeño de ambos estudiantes, por lo que se recomienda incorporar actividades, como las que aquí se propusieron, para la construcción de la concepción dinámica del límite de una función.

En cuanto a la coordinación de los Procesos iterativos infinitos que ocurren en el dominio y el rango de la función involucrada, se mostró que solo el estudiante E2 pudo realizarla. Este resultado es congruente con lo reportado por Cottrill et al. (1996), Pons (2014) y Fernández et al. (2018), quienes mencionan que esta estructura Proceso es donde los estudiantes presentan mayores dificultades y que esta es la razón por la que la concepción dinámica del límite de una función no es tan fácil de alcanzar como suele pensarse. Los resultados de esta investigación sumados a los de Analco (tesis de licenciatura) permiten conjeturar que esta concepción del límite es difícil construirla después del primer curso de Cálculo Diferencial y que es posible que los estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla requieran del curso Cálculo Diferencial en Varias Variables para alcanzarla.

Referencias

Amaya De Armas, T., Castellanos, A., y Pino-Fan, L. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, *35*(2), 1-15. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Analco, A. (2019). Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de actuaría, física y matemáticas *(Tesis de licenciatura)*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigeros, M. y W. K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4(3)*, 219-236.

Camacho Ruiz, C. G., Díaz Martínez, J. R., Mosquera Herreño, A. A., y Salamanca Monroy, Y. P. (2013). El concepto de límite como una aproximación óptima mediante la teoría APOE. *Revista Científica*, *2*, 349–353. https://doi.org/10.14483/23448350.7068

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15(2)*, 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: D. Holton et al. (Eds), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, 273-280, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3–26.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *9*, 143–168. http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representaci?n.pdf

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer, Cham. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/978-3-319-56910-9_3

Fernández, C., Sánchez, G., Moreno, M. y Callejo L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, [en línea], 2018, Vol. 36, Núm. 1, pp. 143-62, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/335278

Hernández, L., Juárez, E., Ruíz, H. (2021). Descomposición genética de la concepción dinámica del límite de una función real. En Prensa

Medina M., A. C. (2001). Concepciones Históricas Asociadas Al Concepto De Límite E Implicaciones Didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, *9*. https://doi.org/10.17227/ted.num9-5622

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE (Tesis de maestría)*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

OCDE, (2018). *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). PISA-2018.* Resultados. OCDE., pp. 1-12 https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: Proceedings of the second international congress on mathematical education* (pp. 79–87). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Pons. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de Bachillerato del concepto de límite de una función en un punto (Tesis de Doctorado)* Universidad de Alicante, España. http://hdl.handle.net/10045/45713

Retno, M. y Nymik, S., (2017). Limit Learning with Apos Theory and Maple to Develop Mathematical Communication and Critical Thinking. Advances in Social Science, Education and Humanities Research (ASSEHR), Vol. 160 (pp 54-59). 10.2991/incomed-17.2018.12

Swinyard, C., y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43(4)*, 465-493.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ Stud Math*, 12, 151–169 https://doi.org/10.1007/BF00305619

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15,* 43-55.

Usman, Juniati, D., Siswono & T. Y. E. (2017). Differences conception prospective students' teacher about limit of function-based gender. *AIP Conference Proceedings*, *1867* (1–7). https://doi.org/10.1063/1.4994406

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, [en línea], Vol. 29, Núm. 3, pp. 325-38, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/247883

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Müller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de concepto de Límite. *Premisa*, *8*(29), 9–19. http://funes.uniandes.edu.co/23103/1/Vrancken2006Dificultades.pdf