Justificaciones matemáticas motivadas por la modelización de un fenómeno físico

Mathematical justifications motivated by the modeling of a physical phenomenon

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Alfredo Martínez Uribe[1]
Álvaro Bustos Rubilar[2]

Recibido: 5 de febrero 2021
Aceptado: 26 de abril 2021

Autor de Correspondencia:
Alfredo Martinez Uribe
alfymago@hotmail.com

Resumen : *Se discutirá la implementación de una actividad de modelización para estudiantes de ingeniería que permite hacer un ajuste de curva como representación del comportamiento de un oscilador armónico amortiguado. La discusión se centra en la relevancia de la aplicación de una actividad de modelización, que se auxilia de herramientas digitales para celular y computadora, con la intención de reconocer elementos que evidencian habilidades a desarrollar, necesarias para proponer justificaciones matemáticas que permitan validar el modelo matemático que describe el fenómeno físico. Se discuten algunas oportunidades de intervención pedagógica.*

Palabras clave : Modelización matemática, Justificación, Ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden, Enseñanza.

Abstrac: *The implementation of a modelling activity for engineering students that allows a curve fit to be made as a representation of the behaviour of a damped harmonic oscillator will be discussed. The discussion is centred on the relevance of the application of a modelling activity that uses digital tools for cell phones and computers, with the intention of recognizing elements that show skills to be developed, necessary to propose mathematical justifications to validate the mathematical model that describes the physical phenomenon. Some opportunities for pedagogical intervention are discussed.*

Keywords: Mathematical modelling, Warrants, Second order homogeneous differential equations, Teaching.

[1] Universidad Autónoma de Querétaro. Correo: alfymago@hotmail.com
[2] Universidad de Valparaíso, Chile, Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias. Correo: alvaro.bustos@uv.cl

Introducción

Cuando se habla de modelización matemática, existen dos interpretaciones que con frecuencia son confundidas según el trabajo que se lleva a cabo, es decir, se puede hacer *modelización matemática* o *modelar la matemática*. La diferencia consiste en que modelar la matemática se refiere a usar representaciones matemáticas para comunicar conceptos o ideas matemáticas; es un proceso que surge en el campo de estudio de la matemática. Por otra parte, la modelización matemática une la matemática con auténticos problemas del mundo real; es un proceso esencial para matemáticos y profesionales aplicados a disciplinas muy diversas. La modelización matemática pretende traducir un problema del mundo real en una representación matemática que permita identificar variables, hacer aproximaciones y establecer conclusiones (Cirillo, et al., 2016).

El trabajo de modelización no sólo permite comprender la secuencia de pasos para desarrollar un *trabajo matemático completo*, sino que además promueve en los estudiantes procesos de conjetura, verificación y argumentación. Entendiendo como *trabajo matemático completo*, al conjunto de procesos y acciones que se ponen en juego para establecer afirmaciones sobre un conjunto de objetos matemáticos o resolver un problema, comenzando con la comprensión y razonamiento, hasta llegar a la comprobación de las posibles hipótesis planteadas al respecto. Estos procesos son necesarios para elaborar una justificación matemática que sustenta el modelo matemático, el cual a su vez puede describir el fenómeno experimental observado y modelado. Malafosse, Lerouge & Dusseau (2000) afirman que, si los estudiantes comprenden el fenómeno que se intenta describir matemáticamente y son capaces de identificar la matemática inherente, se tiene lo necesario para estudiar el fenómeno desde el *marco de racionalidad* de la disciplina, en este caso, de las matemáticas o la física. Un marco de racionalidad es un todo coherente del funcionamiento del pensamiento, caracterizado por cuatro componentes: su mundo de objetos, sus procesos de conceptualización, sus reglas de razonamiento y validación, y finalmente sus registros de significantes.

Debido a que en las actividades que se describen en este trabajo se promueve el desarrollo de competencias para la modelización y se persigue el objetivo de comprender problemas del mundo real a través de la información que brindan sus representaciones, nos ubicamos dentro de la *perspectiva realista o modelización aplicada*, según lo establecieron Kaiser & Sriraman (2006) y posteriormente lo confirman Sevinc y Lesh (2017) y Barbosa (2019).

Durante una actividad de modelización se generan situaciones oportunas para proporcionar a los estudiantes herramientas necesarias para adquirir o desarrollar competencias de validación de modelos descritas por Maaß (2006). De esta manera emergerán desde los estudiantes mismos, y a partir de su nivel de dominio conceptual de la disciplina, *argumentaciones base*; líneas de razonamiento que intentan mostrar o explicar, por qué un resultado matemático es verdadero (Umland & Sriraman, 2014). Estas argumentaciones base, requerirán ser refinadas para ser utilizadas en la confección de una justificación que valide matemáticamente el modelo del fenómeno estudiado. Es por ello que nos planteamos como preguntas: ¿Cómo propiciar el surgimiento de argumentaciones base en los estudiantes a partir de una actividad de modelización? ¿Qué justificaciones matemáticas pueden construir sobre el comportamiento de un fenómeno físico? ¿Qué condiciones se requieren para motivar el intercambio de argumentaciones entre los estudiantes? Para ello nos hemos propuesto como objetivos: Motivar la discusión entre los estudiantes a partir de la observación y experimentación con un oscilador armónico amortiguado; identificar el surgimiento de argumentaciones base de los estudiantes, utilizadas para construir un modelo matemático del fenómeno físico estudiado; validar las justificaciones matemáticas producidas por los estudiantes en relación con las demostraciones asociadas al modelo que se presentan en algunos textos.

Justificar en la enseñanza y su posible relación con la modelización matemática

Se prefiere usar el término justificar, porque como lo describen Hemmi, Lepik & Viholainen (2013) resulta difícil identificar el papel de la prueba o la demostración en el ámbito educativo, debido que las expectativas y concepciones de quienes usan estos términos no están bien definidas, ni por los profesores, ni en el currículo. Sin embargo, es sabido por aquellos que enseñan y estudian física o matemáticas que el término es utilizado con mucha frecuencia. Es común que, entre una serie de ejercicios o problemas, como aquellos que encontramos al final de un capítulo, tanto de un texto de física como de un texto de matemáticas, aparezca la expresión “Demuestre que…”, asumiendo que el lector tiene claridad con respecto a lo que significa demostrar. Además, se asume que los estudiantes dominan los conocimientos necesarios para elaborar la demostración solicitada. Se encuentra fuera del alcance de este escrito hacer un análisis profundo de lo que la demostración significa en el campo de las ciencias, no obstante, exponemos una breve revisión de su uso en educación, para brindar una interpretación en el ámbito educativo.

En el quehacer matemático se distinguen dos procesos estrechamente vinculados; conjeturar y demostrar (Watson, 1980), donde el desarrollo del primero necesariamente conlleva al desarrollo del segundo. En un contexto educativo de las matemáticas se han acuñado diferentes términos para referirse al proceso de demostración; justificación matemática, explicación, argumentación, prueba y demostración, son algunos de los más utilizados. Por lo general, el uso práctico de estos términos deviene en un mismo significado, es decir, un profesor puede utilizar las palabras justificar o argumentar con la intención de solicitar a un estudiante demostrar, situación análoga en enunciados de libros de texto (Apostol, 1969; Halliday, Resnick & Walker, 2001). En investigaciones de educación matemática (Balacheff, 1987, 2019; Hanna & Barbeau, 2002; Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A., 2013) encontramos que puede haber diferencias sutiles entre las acepciones, por lo que es recomendable evitar usarlos como sinónimos. En esta línea de ideas, algunos investigadores, cuyo objeto de estudio ha sido el proceso de demostración en el aula, han notado que las maneras de validar entre los estudiantes, por lo general, difieren unas de otras. Lo anterior, motivó, en momentos y contextos distintos, a estudiar y clasificar los procedimientos proporcionados por estudiantes cuando se les solicita demostrar algún resultado, permitiendo identificar dos tendencias de trabajos documentados relacionados con la categorización de respuestas de estudiantes:

- Tipologías propuestas por algunos investigadores a partir del análisis de los procedimientos proporcionados por estudiantes (Balacheff, 1987; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998).
- Tipologías confeccionadas a partir del análisis de los procedimientos de los estudiantes (Marrades & Gutiérrez, 2000) y de la acomodación de categorías de clasificaciones ya existentes (Balacheff, 1987; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998).

En algunas de estas tipologías encontramos una distinción explícita entre demostrar, argumentar y probar, como la clasificación de *Niveles y Tipos de prueba* en dónde se diferencia cada término de acuerdo con el tipo de razonamiento utilizado (Balacheff, 1987. En la demostración matemática es inherente el razonamiento deductivo, mientras que en la argumentación está involucrado el razonamiento argumentativo (Duval, 1999). En este sentido, en la mayoría de las tipologías encontramos un consenso explícito en la acepción del término demostración; como una secuencia de pasos lógicos relacionados entre sí (Hanna & Barbeau, 2002; Balacheff, 1987; Fischbein, 1982). Además, la demostración tiene una carga social de aprobación ligada a una comunidad específica, los matemáticos.

En este escrito no tenemos como propósito llevar a cabo un estudio exhaustivo de cada una de las tipologías encontradas en la literatura, ni analizar desde un punto de vista cognitivo el razonamiento inherente a cada término usado. Nuestra intención es introducir al lector en los distintos términos acuñados para referirse a algún tipo de justificación en el aula. Lo anterior, con la finalidad de contextualizar el término que utilizaremos en este escrito para referirnos a las producciones que proporcionan los estudiantes, cuando se les solicita demostrar o fundamentar sus afirmaciones desde el marco de racionalidad matemática. En diferentes investigaciones (Barwell, 2013; Balacheff, 1991) se ha reportado que los estudiantes evidencian dificultades para entender y elaborar justificaciones. Cuando se pide a los estudiantes demostrar un resultado matemático, proporcionan argumentos que pueden corresponder a la base de un paso en una justificación, pero no lo hacen en estricto rigor. La mayoría de las veces sus argumentos son de carácter particular, es decir, están contextualizados en un ejemplo, verificación u observación de una representación específica.

Tomando en cuenta las ideas expuestas, planteamos que un estudiante de nivel básico, medio o hasta de nivel superior, que cursa una asignatura de matemáticas o física, generalmente no tendrá los recursos matemáticos suficientes para someterse “necesariamente” a la validación de una comunidad científica. No obstante, sí podría someterse a la validación de una comunidad escolar, en donde el debate se establece entre los pares, profesores y textos educativos de la disciplina. Además, los argumentos que sostendrán tanto las afirmaciones como los resultados alcanzados serán evaluados de acuerdo con los recursos disponibles de sus miembros.

Al considerar lo anterior, y desde nuestra perspectiva, el tratamiento de la demostración en el aula tiene un “matiz” distinto al del tratamiento que se le pueda dar entre un grupo de expertos de una disciplina o una comunidad científica pura. Es por ello, que para referirnos a las producciones de los estudiantes cuando elaboran una demostración, utilizaremos en este artículo la expresión *justificación matemática*. Término que se aplica en un sentido amplio, entendiéndolo como la producción (escrita u oral) que elabora un estudiante con el propósito de convencer a la comunidad de la cual es parte.

En este trabajo se considera que las tareas de modelización pueden resultar útiles para motivar a los estudiantes a generar un debate científico escolar, donde los argumentos surgidos durante el debate serán la génesis de argumentos más sólidos. Argumentos que los estudiantes podrían utilizar cuando confeccionen una justificación matemática del modelo que describe el fenómeno estudiado en una tarea de modelización. En este sentido, nuestra postura se aproxima a la justificación por medio de la argumentación (Boero, 1999; Pedemonte, 2007).

Para entender cómo es que se llevan a cabo las tareas de modelización y los procesos cognitivos que se ponen en juego, utilizamos el ciclo de modelización de Touma (2009), porque a diferencia de otros con amplia aceptación como el de Blum (2011), el modelo de Touma, considera los procesos de formación, tratamiento, conversión y coordinación entre distintos registros de representación semiótica (Duval, 1993). Estos procesos resultan de interés para entender el papel de las representaciones en la interpretación de los fenómenos de estudio y los pasos que se han de seguir para la construcción de modelos, procesos cognitivos de los estudiantes (Halloun, 2007). Además, nos permite dar cuenta de parte del trabajo matemático que se lleva a cabo durante la modelización, así como los procesos de interpretación inductiva y deductiva tan necesarios en el ámbito de las ciencias experimentales, como lo refiere Baird (1991).

En la Figura 1 se muestra el ciclo de modelización propuesto por Touma (2009), en el que se parte de un fenómeno físico con el cual se experimenta. Luego, se obtienen datos experimentales que comúnmente se recuperan como puntos de dispersión en una gráfica, para posteriormente realizar un ajuste de curva que permitirá proponer un modelo matemático. En este proceso entran en juego conversiones y tratamientos que permiten reinterpretar el fenómeno físico a partir de las distintas representaciones obtenidas para el modelo matemático.

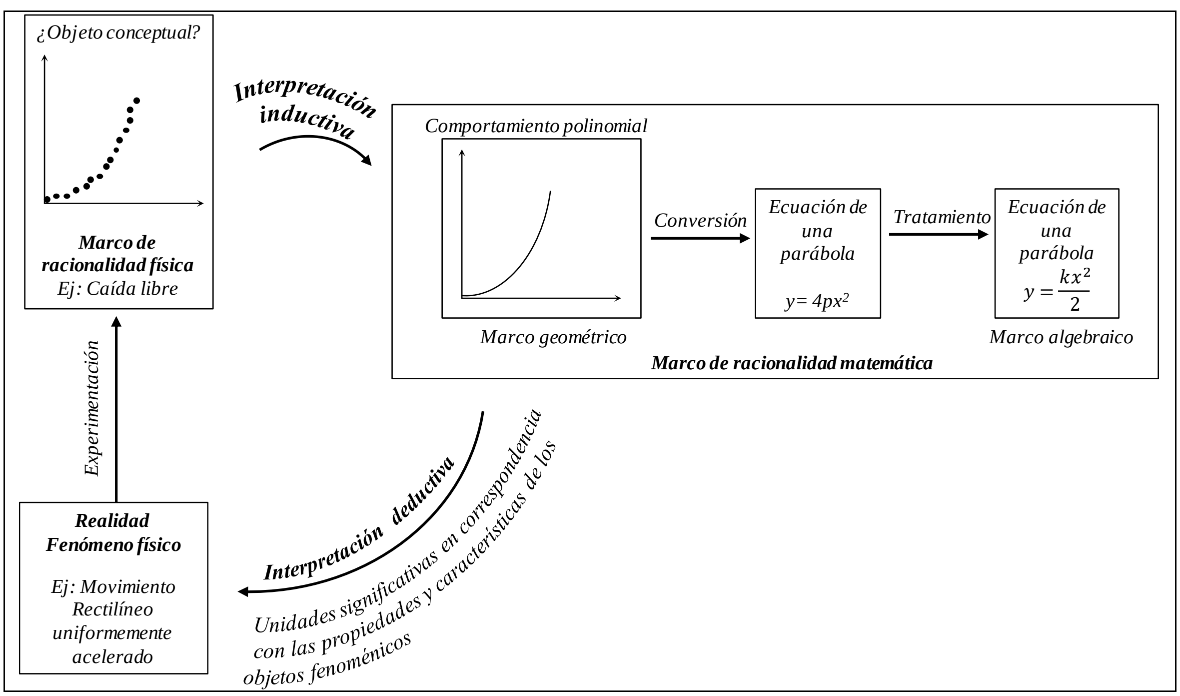


Figura 1. Ciclo de Modelización matemática de Touma (CMMT). Adaptado de Touma (2009).

Metodología

Para llevar a cabo este estudio se diseñó una actividad didáctica basada en la observación, experimentación, modelización y justificación del modelo obtenido. Se presenta un análisis cualitativo de las argumentaciones de estudiantes, surgidas durante el desarrollo; basado en las categorías de Toulmin (1969): hechos, conclusiones, justificaciones y soporte, así como en la propuesta de Kelly, Druker & Chen (1998) que comienza con el discurso del estudiante para inferir lo que puede decir acerca de su conocimiento y su uso en conversaciones naturales sobre fenómenos científicos. Esta secuencia didáctica fue validada con un grupo de entrenamiento de olimpiada de física, lo que permitió realizar algunas precisiones antes de su aplicación final.

Para motivar las discusiones entre los estudiantes se proporcionó un oscilador armónico amortiguado, para ser utilizado como las *cajas misteriosas* de Kelly, Druker & Chen (1998). El estudiante debía hacer predicciones sobre su funcionamiento a partir del comportamiento que muestra. Se trata de un medio que puede ser conocido y comprendido a través del intercambio de expresiones, afirmaciones, justificaciones o argumentos que darán cuenta de un modelo mental en construcción entre los participantes de una comunidad científica escolar. El acercamiento al fenómeno natural u objeto matemático asociado dependerá del propósito didáctico que tenga el profesor de matemáticas o física, así como su nivel de profundización en el contenido matemático subyacente y sus modos de tratarlo en el salón de clases. En este caso el CMMT también permitió seguir las argumentaciones de los estudiantes.

En la ejecución de esta actividad didáctica participaron 14 estudiantes que cursaban la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, correspondiente a segundo semestre de ingeniería. Para facilitar el proceso de modelización se proporcionaron diferentes recursos como: un artefacto físico con un movimiento oscilatorio armónico amortiguado, construido con un resorte acoplado a una caja vacía, la cual se desliza sobre unos cojinetes aceitados para reducir la fricción, diseñado por el autor en el laboratorio de física del Cinvestav-Zacatenco (Figura 2); se utilizó la aplicación capturadora de video llamada *VidAnalysis free*[3] desarrollada por *tsaedek*, para la recolección de datos del experimento por medio de un teléfono celular; un applet diseñado también por el autor en *GeoGebra* para hacer ajuste de curvas[4] y hojas de trabajo.

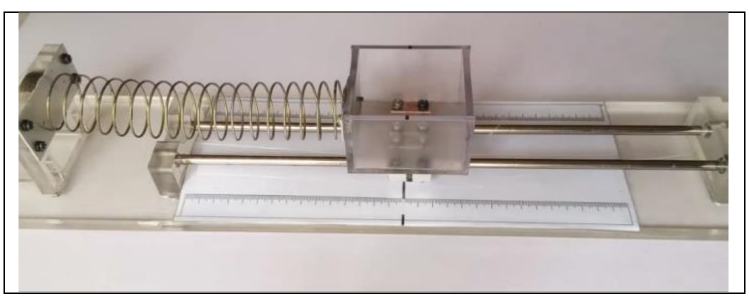


Figura 2. Aparato de experimentación. Oscilador armónico.

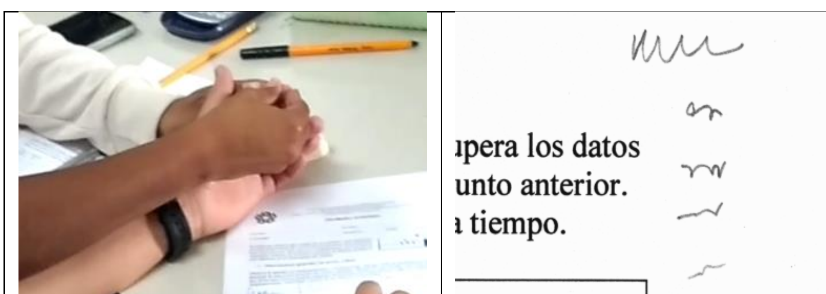
[3] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=es_MX&gl=US
[4] https://www.geogebra.org/m/GjFXcH63

Se solicitó a los estudiantes que trabajaran en equipos. A los integrantes de cada equipo se les entregaron las hojas de trabajo, para responder de forma individual cada uno de los incisos correspondientes a la tarea de modelización propuesta. Primero debían observar el movimiento y hacer argumentaciones para describir el comportamiento del artefacto, para luego videograbar su desplazamiento, y con los datos obtenidos proponer un primer ajuste de curva con el applet de *GeoGebra*. Después ajustarían el modelo de comportamiento. Finalmente, los estudiantes deberían justificar matemáticamente el modelo matemático obtenido que se presenta como solución a la ecuación del movimiento de acuerdo a la segunda ley de Newton. Los resultados que aquí reportamos corresponden al equipo “Verde”, integrado por “Lai, Efrén, Rodrigo y Lizbeth”.

Implementación de la actividad

La actividad inició con la exploración y observación del artefacto físico de experimentación, momento que corresponde al *marco de realidad* del CMMT. En esta etapa se esperaba que cada estudiante proporcionara una descripción verbal de manera individual. Durante esta fase, el equipo verde generó un debate científico para poder decidir el tipo de movimiento observado. Mientras Efrén y Rodrigo grababan el video del aparato en funcionamiento, Lizbeth y Lai comenzaron a tratar de explicarse uno al otro las características del movimiento del oscilador armónico.

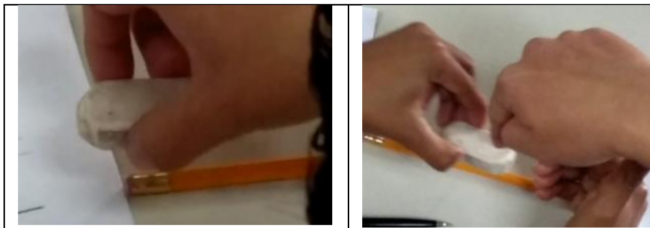
[1]	Lizbeth:	*Cuando lo liberas agarra más fuerza y se sigue* [presiona el dedo índice izquierdo de Lai, como se muestra en Figura 3A].	Establece Hechos
[2]	Lai:	[Dibuja sobre la mesa] [por el movimiento de su mano se infiere que traza un resorte].	Inscripciones
[3]	Lizbeth:	[...] *es así* [dibuja sobre su hoja de trabajo (Figura 3B)].	



A. B.

Figura 3. Interacción entre Lizbeth y Lai.

[4]	Lai:	[...] [Toma la goma] *…la desplazas al final* [mueve la goma sobre el lápiz emulando el estiramiento del resorte, Figura 4A], *para que esto* [la goma, que representa la masa] *vuelva al mismo punto* […].	Hechos



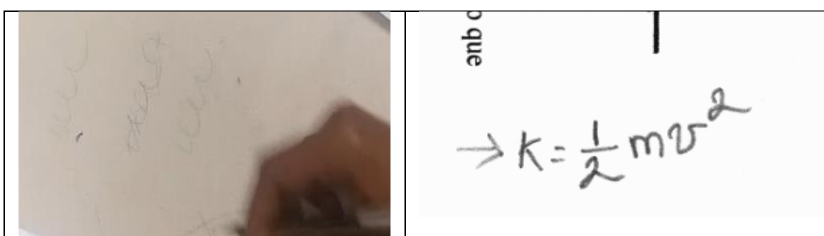
A. B.

Figura 4. Manipulación de la goma.

[5]	Lizbeth:	*No* [...] [le quita la goma a Lai y la posiciona emulando la masa en el resorte en posición de reposo, Figura 4B]. *…y la vuelve a aventar, y la vuelve a aventar, y la vuelve a aventar…* [señala presionando la goma y luego la suelta, así sucesivas veces mientras Lai mueve el dedo sobre la goma].	Hechos

Luego de que Lizbeth y Lai intercambiaran puntos de vista con respecto a lo que cada uno interpreta del fenómeno físico que estaba en discusión, se integraron a la discusión Rodrigo y Efrén.

[6]	Lizbeth:	*...que es una onda... esto* [señala dibujo trazado en mesa, Figura 5A] *estás describiendo el movimiento del resorte, no la oscilación.*	Búsqueda de soporte.



A. B.

Figura 5. Representaciones de Rodrigo y Lizbeth.

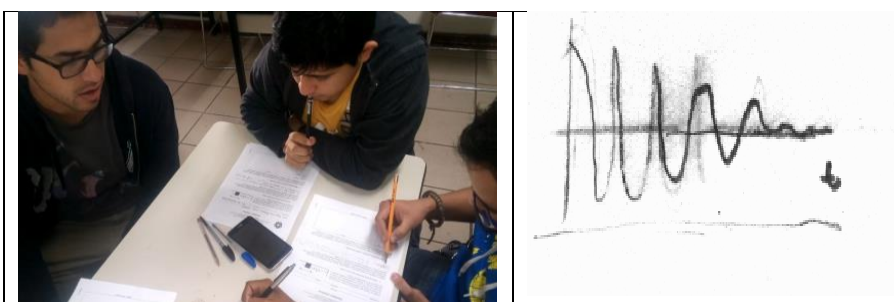
[7]	Rodrigo:	*Y te vuelvo a repetir, si... pones k, digo k es igual a* [escribe fórmula en hoja de Lizbeth, Figura 5B] $K = \frac{1}{2} mv^2$, *que esto* [escribe flecha para señalar la fórmula] *era la elasticidad...*	Confusión entre energía mecánica y ley de Hooke
[8]	Lizbeth:	*Elasticidad del resorte* [reafirma lo dicho por Rodrigo]. *Pero, sí estás de acuerdo que el punto inicial del resorte antes que se deforme es a la mitad, donde está el cero* [tono de pregunta indirecta].	Hechos, soporte. Afirmación
[9]	Rodrigo:	*Ah…* [acepta lo dicho por Lisbeth].	Comunicación

[10]	Lizbeth:	*Entonces, este* [Figura 6A] *es el resorte inicial. El resorte ya deformado es cuando se estira* [Figura 6B].	Hechos

A. B.

Figura 6. Representaciones del resorte dibujada por Lizbeth.

[11]	Rodrigo:	*Sí... ah...* [explicita acuerdo].	Comunicación
[12]	Lizbeth:	*Entonces, por lo mismo, al ya estirarlo le das una fuerza* [explica utilizando el resorte estirado que dibujo en la mesa], *y esa fuerza hace que* [el resorte] *genere dos ondas, la de reacción y la de acción, hasta que llegue al mismo punto cero, que es donde ya no hay movimiento.*	Confusión entre 3ra ley de Newton y movimiento oscilatorio y equilibrio
[13]	Rodrigo:	*A ver, tienes que considerar también el peso que tiene la... la masa.*	Hechos
[14]	Efrén:	*No, es así, pero yo lo único que no sé, si tomarlo como dos ondas nada más porque... según yo en las fórmulas del resorte ya está contemplado que la misma masa hace esto* [mueve su mano derecha de derecha a izquierda y viceversa sobre la mesa, emulando el movimiento de la masa en el resorte]. *Pero no sé, la verdad es que no...* [evidencia estar poco convencido de lo que dice].	Soporte, apela a la autoridad, conocimiento vago.



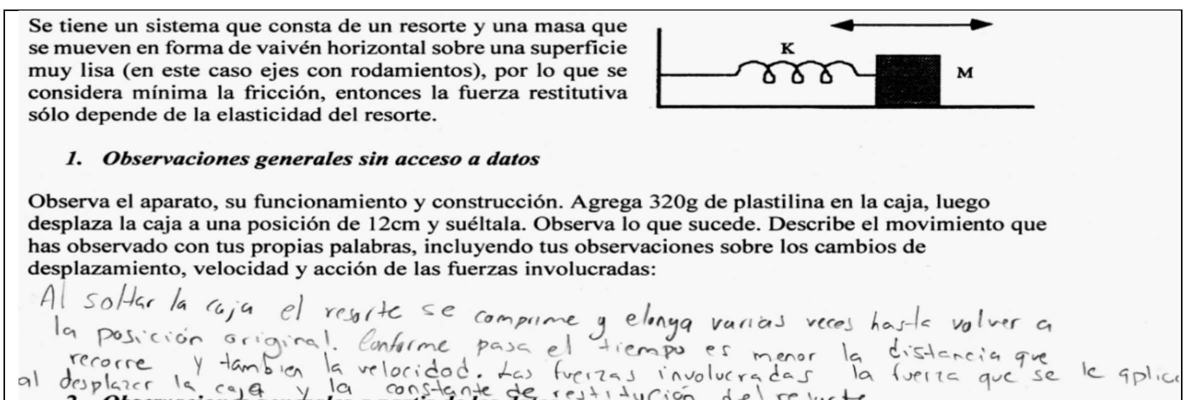
A. B.

Figura 7. Gráfica trazada por Lai.

[15]	Lizbeth:	*Pues así sí, gráficas así, pero este* [señala gráfica trazada por Lai, Figura 7B] *sería más... describiendo el movimiento del agua.*	Busca soporte
[16]	Lai:	*Verdad* [explicita estar de acuerdo con lo que dice Lizbeth]. *Yo siento que hace el mismo efecto* [se	Comunicación

		refiere a la gráfica que él propone y a lo que dice Lizbeth] [mira a su compañero Efrén buscando apoyo en su afirmación].	Busca aprobación
[17]	Efrén:	*Sí, de hecho, así se refleja...* [señala gráfica trazada por Lai] [explicita estar de acuerdo con la gráfica propuesta por Lai, Figura 6B].	Aprobación
[18]	Rodrigo:	*Mm...* [explicita acuerdo con lo que dice Efrén y Lai]. *Vemos el video del gráfico* [del gráfico en VidAnalysis], *para ver si está el...*	Soporte
[19]	Efrén:	*No pues, ¿entonces para qué discutimos si son dos ondas…?*	Refutación
[20]	Lai:	*No tienen tanta relevancia* [mientras mira a Lizbeth].	Refutación
[21]	Lizbeth:	*Un poco por el momento, pero...*	Resistencia
[22]	Lai:	*La reacción de las presas* [...].	Idea aislada
[23]	Lizbeth:	*¡Hay!, pero si tiene acción y reacción…*	Hechos
[24]	Efrén:	*Ah no, de que acción y reacción eso es...* [apoya lo que dice Lizbeth].	Confirmación
[25]	Rodrigo:	*Bueno, esos son mis... pues...* [comienza a manipular el celular para abrir la aplicación].	Soporte

Luego de discutir entre ellos, cada miembro del equipo escribió en sus hojas de trabajo una respuesta para describir el fenómeno observado. En la Figura 8 está la afirmación de Efrén, quien hizo referencia a la compresión y elongación del resorte, cambio de posición con respecto al tiempo, velocidad y a la constante de restitución del resorte. Este momento marca la transición del *marco de la realidad* hacia el *marco de racionalidad física* del CMMT vía la experimentación.


Se tiene un sistema que consta de un resorte y una masa que se mueven en forma de vaivén horizontal sobre una superficie muy lisa (en este caso ejes con rodamientos), por lo que se considera mínima la fricción, entonces la fuerza restitutiva sólo depende de la elasticidad del resorte.

1. Observaciones generales sin acceso a datos

Observa el aparato, su funcionamiento y construcción. Agrega 320g de plastilina en la caja, luego desplaza la caja a una posición de 12cm y suéltala. Observa lo que sucede. Describe el movimiento que has observado con tus propias palabras, incluyendo tus observaciones sobre los cambios de desplazamiento, velocidad y acción de las fuerzas involucradas:

Al soltar la caja el resorte se comprime y elonga varias veces hasta volver a la posición original. Conforme pasa el tiempo es menor la distancia que recorre y tambien la velocidad. Las fuerzas involucradas la fuerza que se le aplica al desplazar la caja y la constante de restitución del resorte

2. Observaciones generales a partir de los datos

Al soltar la caja [,] *el resorte se comprime y elonga varias veces hasta volver a la posición original. Conforme pasa el tiempo es menor la distancia que recorre y también la velocidad. Las fuerzas involucradas* [son] *la fuerza que se le aplica al desplazar la caja y la constante de restitución del resorte.*

Figura 8. Respuesta escrita proporcionada por Efrén.

Después de que los estudiantes elaboraron una descripción verbal del comportamiento del oscilador y plasmaron de manera escrita sus respuestas en las hojas de trabajo, se procedió a adentrarse en el marco de *racionalidad de la física*, que consistió en capturar en video con *VidAnalysis*, el movimiento del objeto para obtener una nube de puntos (pares ordenados dispersos) generada por la aplicación (Figura 9A). Coordenadas que luego transcribieron a sus hojas de trabajo (Figura 9B).

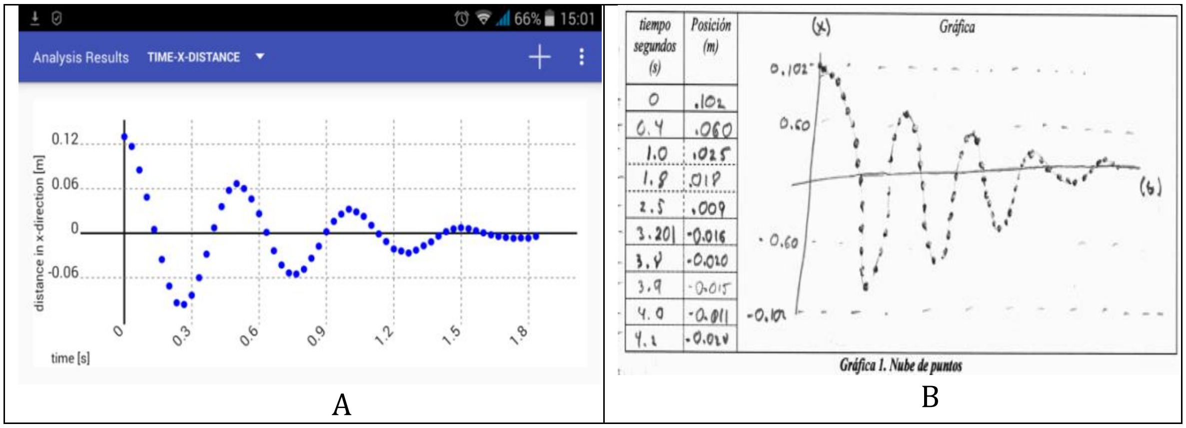
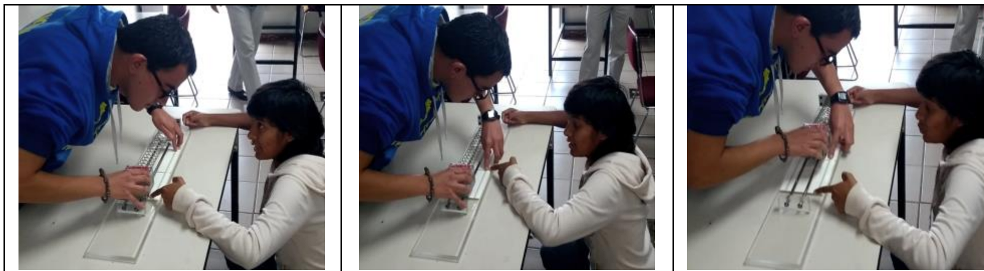


Figura 9. Gráfica de nube de puntos. A) Gráfica VidAnalysis, B) Gráfica de estudiantes.

La finalidad de esta parte de la actividad fue que los estudiantes observaran el comportamiento gráfico del conjunto de puntos. Con esta nueva información, los alumnos debían reinterpretar sus observaciones para describir el movimiento observado. De acuerdo con el equipo Verde, inferimos que Lizbeth y Lai no estaban conformes con sus observaciones, hecho por el cual decidieron regresar a la mesa de experimentación para revisar el movimiento del artefacto, episodio evidenciado en el siguiente diálogo:

[26]	Lai:	*Esto es x…* [señala el eje de desplazamiento del resorte, Figura 10A]. *Cuando vale cero* [señala la marca en posición de reposo y luego estira el resorte hasta su límite máximo]. ...*esto es la distancia* [señala la línea de desplazamiento del resorte mientras lo mantiene estirado, Figura 10B].	Establece hechos relacionados con el desplazamiento
[27]	Lizbeth:	*Pero tu marcador inicial es de aquí* [señala el límite máximo de estiramiento del resorte, Figura 10C], *no inicia de acá* [señala limite reposo del resorte, Figura 10B]. [probablemente se refiere al marcador de los ejes de VidAnalysis]	Hechos relacionados con el punto de equilibrio
[28]	Lai:	*Pero este está en la línea de…* [mueve el resorte a su posición de reposo y lo estira nuevamente, Figura 10B].	



A B C

Figura 10. Experimentación de Lai y Lizbeth.

[29]	Lizbeth:	*No...tu movimiento inicia aquí* [Figura 11A, mientras Lai mueve el resorte].	Justificación. Relación entre las representaciones gráficas y aplicación de fuerzas
[30]	Lai:	*A ver, explícamelo otra vez, ¿tú sabes si sigue resultando aquí?* [señala línea de posición de reposo, Figura 11A] *porque en la aplicación la deformación aquí está. Es... una fuerza aquí* [Figura 11A, mientras mueve desde la posición en reposo hasta el estiramiento máximo].	

A. B.

Figura 11. Manipulación del artefacto por Lai.

[31]	Lizbeth:	*Ah ha, creo que sí, que sería la distancia* [señala las distancias con sus dedos índice y meñique, Figura 11B].	Asimilación
[32]	Lai:	*Tú eje sigue siendo aquí -cero-.*	Hechos
[33]	Lizbeth:	*Ok.*	Confirmación
[34]	Lai:	*Aquí tienes un valor positivo* [señala el límite máximo de estiramiento del resorte, Figura 12A]. *Trata de ponerte* [ubica la masa] *y llegar a acá* [Comprime el resorte, Figura 12B], *vas a tener un valor negativo [suelta el resorte].*	Hechos con respecto al desplazamiento

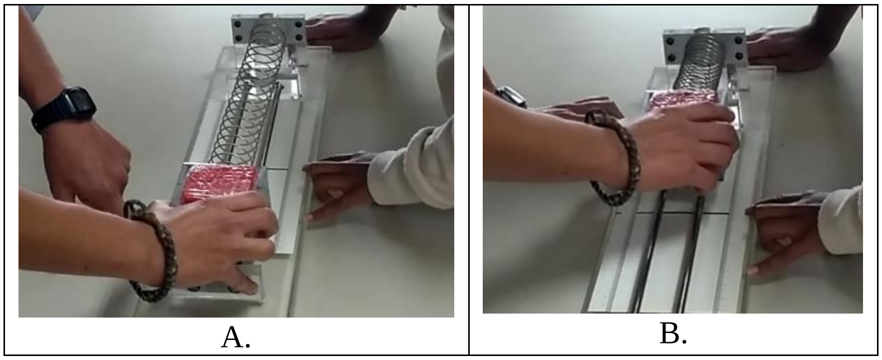


Figura 12. Estiramiento del resorte, explicado por Lai.

[35]	Lizbeth:	*De hecho* [toma el resorte y señala la línea de reposo, Figura 13], *yo no definiría eso cómo valor negativo, sino que lo definiría como estado en reposo, porque hace* [haz] *cuenta que... aquí el resorte no lleva ninguna deformación. Pero ya cuando tú lo empiezas a desplazar ya se deforma, de tal forma que la masa ya tiene fuerza y eso a.... eso afecta a la aceleración.*	Confusión. No identifica la aceleración como segunda variación del desplazamiento.
[36]	Lai:	*Mm…* [muestra acuerdo]. *Entonces...*	Busca soporte
[37]	Lizbeth:	[Suelta la masa desde el punto máximo de estiramiento del resorte y ambos observan lo que sucede]. *Sí, pero son dos ondas que viajan, no es una, son dos.*	Persistencia de idea previa.

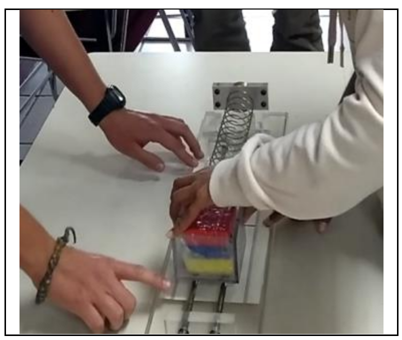


Figura 13. Manipulación de artefacto por Lizbeth.

El episodio descrito establece la complejidad en la construcción de un modelo a través de un proceso de interpretación inductiva. Después de esta segunda observación, al manipular el aparato, los integrantes del equipo Verde regresaron a su mesa para proponer otra descripción del suceso, pero esta vez tomando en cuenta toda la información obtenida hasta el momento. Lai utilizó las representaciones ofrecidas por la aplicación para contrastar las hipótesis planteadas por sus compañeros, advirtiendo características distintas para la aceleración, además de utilizar vocablos más específicos para describir el movimiento observado, tales como: *máximos y mínimos* (Figura 14).

2.1. Con los datos obtenidos en la gráfica anterior describe el movimiento que has observado con tus propias palabras, incluyendo tus observaciones sobre los cambios de desplazamiento, velocidad y acción de las fuerzas involucradas. ¿Qué información puedes agregar o cambiar con respecto a tu descripción anterior?

Con base a los datos obtenidos gracias a la aplicación concluimos que la hipotesis sobre el experimento era correcto Excepto en la velocidad ya que en los puntos maximos y minimos la velocidad es cero, teniendo una aceleracion positiva y una negativa al alcercarse a estos

Con base a los datos obtenidos gracias a la aplicación concluimos que la hipótesis sobre el experimento era correcta. Excepto en la velocidad ya que en los puntos máximos y mínimos la velocidad es cero, teniendo una aceleración positiva y una negativa al acercarse a estos. Conclusión.

Figura 14. Descripción proporcionada por Lai, basada en los nuevos datos.

Luego trazaron una línea a mano alzada para tratar de seguir la tendencia de los puntos con una línea continua, esto fue solicitado con la finalidad de introducir la idea de que en muchos fenómenos la continuidad de la curva de ajuste permite realizar procesos de interpolación y extrapolación. Para la siguiente parte de la actividad debían relacionar el comportamiento del fenómeno con una curva que se le aproxime. Para ello, se propuso a los estudiantes algunos modelos matemáticos comunes, aunque se dejó abierta la posibilidad de proponer alguno no mencionado. El equipo Verde, previo propuso la curva: $x = cos(t)$.

El ajuste de curva se hizo con la participación de todo el grupo en plenaria, con la finalidad de facilitar la transición hacia el *marco de racionalidad matemática* del CMMT. En esta etapa se utilizaron los datos obtenidos en VidAnalysis por el equipo Verde, los cuales fueron exportados a la aplicación de GeoGebra con la intención de que realizaran un ajuste de curva con ayuda del applet. Antes de comenzar, el profesor solicitó el modelo propuesto por el equipo Verde, con la intención de guiar la observación de la nube de puntos y ayudar a identificar los parámetros que no fueron considerados, tales como: amplitud, frecuencia y decaimiento de la curva.

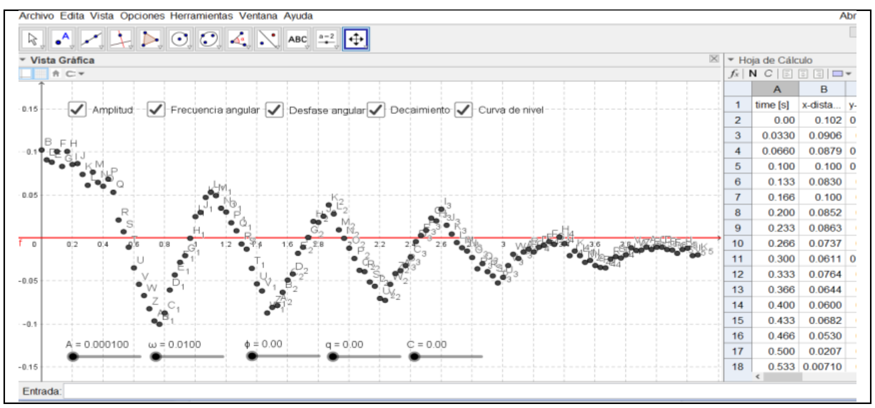


Figura 15. Tabla de datos y gráfico del equipo Verde en applet de GeoGebra.

Los estudiantes, guiados por el profesor trataron de identificar el modelo que podría ajustarse a la curva. Los parámetros relativos a la amplitud y la frecuencia fueron los más fáciles de identificar por los estudiantes (Figura 15). Sin embargo, surgieron dificultades para identificar el decaimiento, razón por la cual el docente solicitó que los alumnos fijaran la atención en los puntos máximos.

De este modo, algunos estudiantes mencionaron que la tendencia de la gráfica era una exponencial, evidenciando la recuperación de un conocimiento matemático. Parte de este episodio se evidencia en los siguientes diálogos:

[38] Profesor: *¿Qué es lo que va a decaer?*
[39] Efrén: *La amplitud.*
[40] Profesor: *Entonces, ¿cómo la metemos?, ¿qué escribo? Entonces, …voy a meter una exponencial . . .*

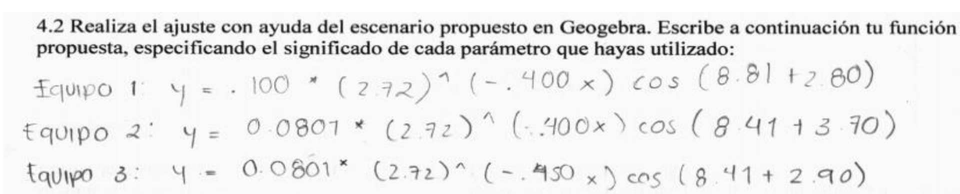
A continuación, el profesor escribió en el pizarrón y dejó pendiente el exponente que llevaría la exponencial, momento en el que Efrén intervino:

[41] Efrén: *Por "e" a la uno sobre...*
[42] Profesor: *¿A la uno sobre…?*
[43] Efrén: *x*
[44] Profesor: *¿Por qué a la uno sobre x?*

A partir del diálogo anterior se generó una discusión con respecto a la forma de la gráfica de e^x, y el hecho de que el signo negativo en el exponente coincide con el comportamiento de la gráfica. Recuperación de otro conocimiento matemático. Entonces, el profesor preguntó a Efrén las razones de su elección.

[45] Profesor: *¿Por qué elegiste e a la uno entre x?*
[46] Efrén: *Por experiencia.*

Aunque la respuesta de Efrén no es suficiente, hace referencia un soporte, tal vez basado en la consulta con alguna autoridad. El profesor y los estudiantes continuaron con el ajuste de los parámetros de la función. Cuando obtuvieron una curva que visualmente se aproximaba a la tendencia de los datos, la inspeccionaron con el comando correspondiente de GeoGebra, obteniendo así una ecuación con la que cual se sintieron satisfechos. En la Figura 16 se muestran las ecuaciones obtenidas por estudiantes al hacer un ajuste "manual".


4.2 Realiza el ajuste con ayuda del escenario propuesto en Geogebra. Escribe a continuación tu función propuesta, especificando el significado de cada parámetro que hayas utilizado:

Equipo 1: y = .100 * (2.72)^(-.400x) cos (8.81 + 2.80)
Equipo 2: y = 0.0801 * (2.72)^(-.400x) cos (8.41 + 3.70)
Equipo 3: y = 0.0801* (2.72)^(-.450x) cos (8.41 + 2.90)

Figura 16. Ajuste manual registrado en la hoja de trabajo de Luisa.

Las aproximaciones obtenidas fueron aceptadas, sin embargo, debían ser validadas con respecto a una tendencia central. Por tal motivo se sugirió aprovechar las herramientas que ofrece GeoGebra para calcular la convergencia media cuadrática (aproximación de funciones). Con el fin de comparar la función obtenida manualmente con una tendencia central ideal relacionada a los datos. Esto se hizo utilizando el comando: *Ajusta (<Lista de puntos>, <Función>)*, para ajustar la curva a la función propuesta por *GeoGebra*; luego, se escribió el comando: *Integral (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*, pero en vez de función se escribe $(f - g)^2$ para calcular la convergencia dentro de un intervalo.

De manera que los estudiantes pudieran reconocer un factor de error o de aproximación a la función ideal (Figura 17).

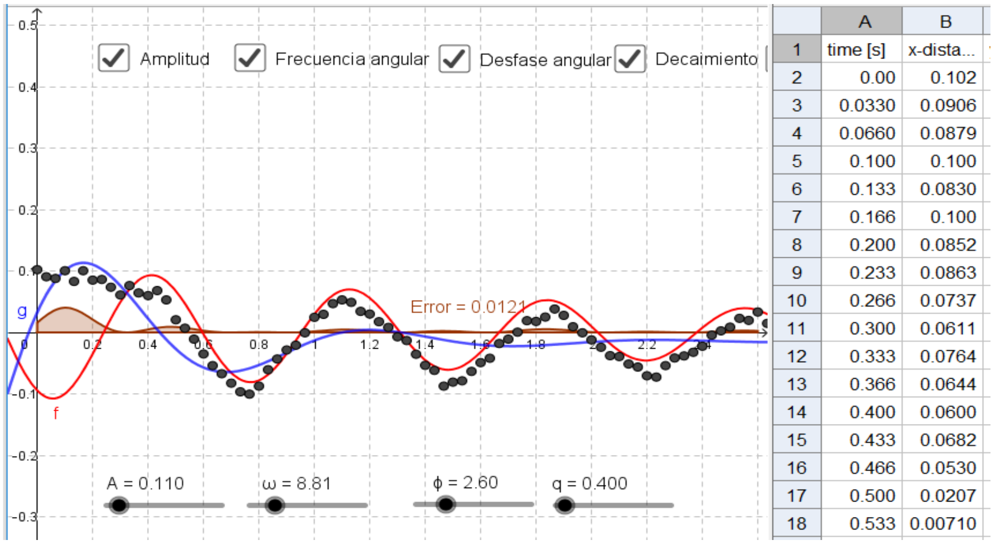


Figura 17. Convergencia media cuadrática.

Posterior a todo el trabajo matemático realizado con el applet de GeoGebra, el profesor inició una etapa de institucionalización de la ecuación de movimiento para el oscilador armónico con base en las leyes de Newton. Para ello, argumentó que el modelo obtenido era la ecuación solución de la ecuación de movimiento. Entonces, como siguiente paso se solicitó a los estudiantes que entregaran en la próxima sesión, la justificación que validara que la ecuación de movimiento correspondía verdaderamente a la del fenómeno físico observado, promoviendo el proceso de interpretación deductiva que permite reinterpretar el fenómeno físico a partir de la información obtenida por el análisis del comportamiento del fenómeno y la discusión sobre sus representaciones.

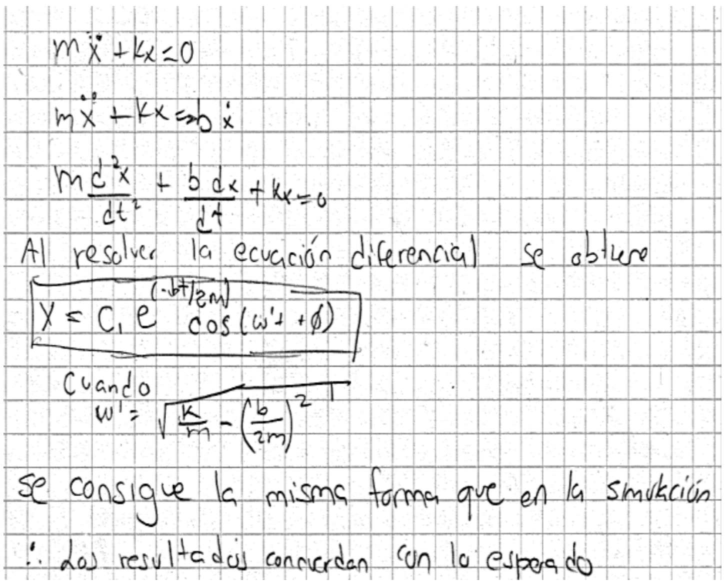
Discusión

Se ha mostrado cómo se implementó la actividad de modelización, con la intención de analizar las actuaciones de los estudiantes y el papel que juega el fenómeno físico como *caja misteriosa*, que esconde modelos y objetos tanto físicos como matemáticos que los estudiantes pueden descubrir a medida que se desarrolla el *debate científico escolar*. La intención de aplicar esta tarea de modelización fue la de desarrollar en los estudiantes la habilidad para relacionar la tarea con la descripción matemática del fenómeno físico. Se reconoce que el profesor podría realizar intervenciones futuras para promover conocimientos matemáticos más profundos a partir de esta tarea.

Consideramos, a manera de hipótesis, que el proceso de modelización motiva la profundización en los conocimientos tanto físicos como matemáticos a través de la apropiación de distintas representaciones de los objetos, advirtiendo que se generaron oportunidades para que los estudiantes elaboraran sus propias justificaciones. Estas justificaciones pueden ser la base de argumentos más sólidos utilizados para sostener una validación matemáticamente aceptable del modelo.

Es por ello que al finalizar la actividad se solicitó a los estudiantes demostrar que la función obtenida es una solución de la ecuación de movimiento que describe el oscilador armónico amortiguado, sin embargo, de los catorce estudiantes, sólo cinco entregaron su justificación matemática, aún con algunas inconsistencias. A continuación, se exponen los análisis cualitativos de las justificaciones matemáticas proporcionadas por algunos de los estudiantes.

En la Figura 18 se compara una forma de la ecuación y su solución como se muestra en un libro de texto, así como la forma que tendría el exponente de la función exponencial sin otra justificación matemática. Se mezclan notaciones: Se utiliza la notación de Newton para primera y segunda derivada con la notación de Leibnitz. Se mezclan técnicas de solución como la algebraica y el resultado de una combinación lineal.



$m\ddot{x} + kx = 0$

$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$

$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

Al resolver la ecuación diferencial se obtiene

$\boxed{x = C_1 e^{(-bt/2m)} \cos(\omega' t + \phi)}$

Cuando

$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

se consigue la misma forma que en la simulación

∴ los resultados concuerdan con lo esperado

Figura 18. Justificación matemática proporcionada por Efrén.

Otro planteamiento se observa en la Figura 19. Se muestra el comienzo de una técnica de solución apoyada en la fórmula de Euler y la fórmula de De Moivre, pero tiene problemas en la notación, lo que lleva al estudiante a obtener un resultado no totalmente correcto.

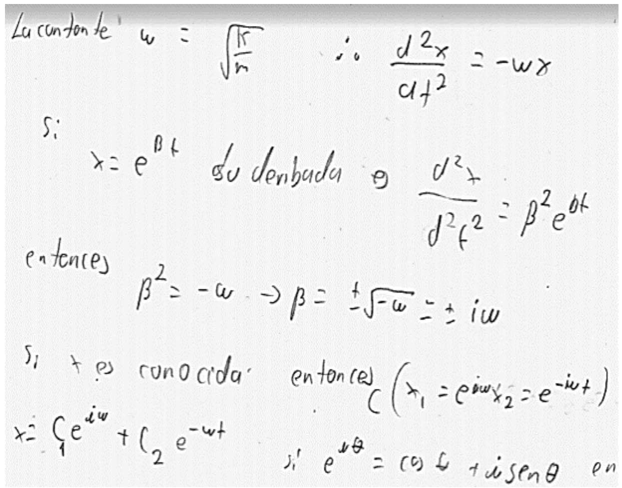


Figura 19. Justificación matemática proporcionada por Sebastián.

Finalmente, Carolina plantea una ecuación de movimiento que tiene un término con aceleración (Figura 20). Al parecer la estudiante divide primero toda la ecuación entre la masa, pero agrega una “dm” que podría sugerir la derivada de la masa, lo cual no es posible, ya que la masa representa un valor constante y físicamente no tiene sentido. La estudiante no reconoció la ecuación de movimiento como una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, la cual se puede resolver usando un factor integrante, técnica que al parecer desconoce, pero que podría ser compatible con lo que se está planteando (Protter & Morrey, 1964).

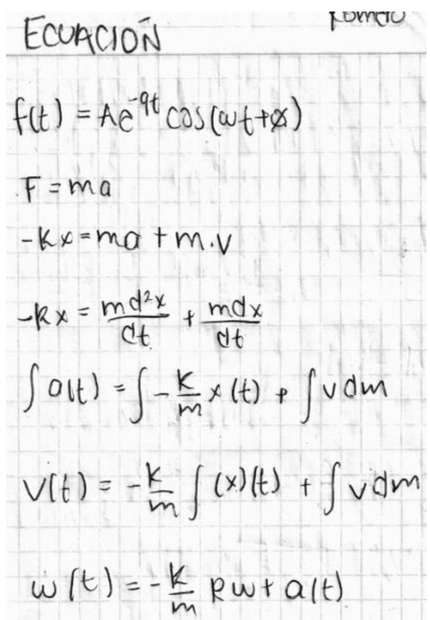


Figura 20. Justificación matemática proporcionada por Carolina.

En las justificaciones matemáticas proporcionadas por los estudiantes se evidencia la consulta de textos que suelen ser considerados como la autoridad a la que han de acudir para sustentarse. Se podría suponer que los textos pueden corresponder a aquellos consultados en una biblioteca, pero no podemos descartar el material consultado a través de medios electrónicos o software. Esto permitiría explicar por qué todas las justificaciones proporcionadas por los estudiantes se muestran incompletas o presentan una mezcla de notaciones usadas tanto por físicos como por matemáticos. No obstante, la relación con cierta autoridad se mantiene. Consideramos que es deseable que las relaciones con distintas figuras de autoridad académica o científica se promuevan, ya sea por medio de la consulta de textos o por otros medios, estableciendo un debate científico escolar entre pares o de preferencia, estableciendo una discusión de las justificaciones matemáticas propuestas junto con el profesor para generar un ambiente de aprendizaje más enriquecedor.

Conclusiones y comentarios finales

Al solicitar que se reúnan en equipos de trabajo para realizar la actividad, se generaron espacios para hacer afirmaciones y construir argumentaciones entre los estudiantes. La dinámica de trabajo propició que los estudiantes construyeran un modelo propio del fenómeno observado a través del uso e interpretación de sus representaciones guiadas por el CMMT.

Se propició el desarrollo de habilidades necesarias para elaborar justificaciones matemáticas del modelo y poder validarlo, sin embargo, fueron similares a las propuestas de solución que se encuentran en textos de física. Consideramos que, si se trabajara en el aula con más consistencia en la interpretación inductiva y deductiva de los fenómenos de estudio, las justificaciones matemáticas de los estudiantes también podrían ser más consistentes.

El applet de GeoGebra favoreció el trabajo de verificación del modelo, aprovechando la aproximación entre funciones, utilizando el concepto de convergencia media cuadrática, un proceso de validación que utiliza un concepto de cálculo que no se introduce usualmente en los primeros cursos universitarios.

Es importante reflexionar en las posibilidades de intervención pedagógica que brinda la actividad, ya sea para mejorarla o tomarla como punto de partida para profundizar en los conocimientos matemáticos, como el estudio de las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden, así como sus distintos métodos de solución. Un tratamiento distinto al de la enseñanza tradicional que se observa en los textos de matemáticas y que luego replican en clase los profesores de educación superior. Usualmente se presenta primero el tema de estudio y después sus aplicaciones.

Consideramos que la actividad de modelización impactó positivamente para generar argumentaciones por parte de los estudiantes, pero no se pudo evidenciar el impacto en la construcción de sus justificaciones matemáticas, por lo que se considera deseable darle continuidad a la actividad aquí propuesta con el fin de ayudar a relacionar el discurso científico escolar con las justificaciones matemáticas que pudieran validar el modelo matemático encontrado.

Consideramos que el contexto proporcionado a los estudiantes fue propicio, debido a que se involucraron durante todo el desarrollo de la actividad. Además, en todo momento se mostraron interesados hacia la tarea que desarrollaban. Es deseable que se desarrolle más investigación para reconocer el momento en que el estudiante se desprende del contexto de estudio para abstraerse en sus justificaciones matemáticas o si es que esto ocurre en algún momento.

Referencias

Apostol, T. M. (1969). *Calculus, vol. 1 y 2*. Reverté.

Baird, D. C. (1991). *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice Hall.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18(2)*, 147–176. http://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. En A. J. Bishop, et al. (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*. Mathematics Education Library, vol 10. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2195-0_9

Balacheff, N. (2019) Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In: Pilet J., Vendeira C. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (pp.423-456). ARDM et IREM de Pris - Université de Pari Diderot.

Barbosa, J. C. (2019). Commentary on Affect, Cognition and Metacognition in Mathematical Modelling. In Scott A.Chamberlin & Bharath Sriraman (Eds.) *Affect in Mathematical Modeling* (pp. 3-13). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_1

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: a dialogic perspective. In A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME, Vol. 2* (pp. 73–80). http://www.lettredelapreuve.org/pdf/PME37/Barwell.pdf

Bell, W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23–40. https://doi.org/10.1007/BF00144356

Blum W. (2011). ¿Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R. & Stillman G. (Eds) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, Vol 1* (pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Boero, P. (1999). Argumentación y demostración: una relación compleja, productiva, e inevitable en las matemáticas y en la educación matemática. *Prueba*. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html

Cirillo, M., Pelesko, J. A., Felton-Koestler, M. D., & Rubel, L. (2016). Perspectives on modeling in school mathematics. In Christian R. Hirsch & Amy Roth McDuffie (Eds). *Annual perspectives in mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 3-16). National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et le fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, (5),* 37- 65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle.

Fischbein, E. (1982). *Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–18.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2001). *Fundamentos de Física, volúmenes 1 y 2*. CECSA

Halloun, I. A. (2007). Mediated modeling in science education. *Science & Education, 16(7),* 653-697. https://doi.org/10.1007/s11191-006-9004-3

Hanna, G., & Barbeau, E. (2002). What Is a Proof? In B. Baigrie (Ed.), *History of Modern Science and Mathematics, Vol. 1,* (pp. 36–48). Charles Scribner's Sons.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Shoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. Vol 3* (pp. 234–283). American Mathematical Society.

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula -- towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies, 45(3),* 354-378. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.754055

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38(3),* 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kelly, G., Druker, S., & Chen, C. (1998). Students' reasoning about electricity: Combining performance assessments with argumentation analysis. *International Journal of Science Education, 20(7),* 849–871. https://doi.org/10.1080/0950069980200707

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2),* 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Malafosse D., Lerouge A. & Dusseau J.M. (2000), Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité, *Didaskalia*,*16*, 81–106

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44(1–2),* 87–125. http://doi:10.1023/A:1012785106627

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Protter, M., & Morrey, C. (1964). *Modern Mathematical Analysis*. Addison-Wesley

Sevinc, S., & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM, 50(1)*, 301-314. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge University Press

Touma, G. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *(14)*: 79-101

Umland, K., & Sriraman, B. (2014). Argumentation in Mathematics. In Stephen Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 44–46). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Watson, F. (1980). The role of proof and conjecture in mathematics and mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *11(2)*, 163-167. https://doi.org/10.1080/0020739800110202