Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID19 en México

María del Socorro Valero Cázarez, Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios No. 164

Javier Lezama Andalón, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN

mariadelsocorrovalerocazarez@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Fecha de Recepción:02 de julio 2020
Fecha de Aceptación: 29 de diciembre 2020
El Cálculo y su Enseñanza
Volumen 15. Julio-Diciembre 2020
Cinvestav-IPN© Ciudad de México.ISSN 2007-4107 P.p.1-19

Resumen

En el presente documento se reportan los resultados de una experiencia didáctica con una población de estudiantes de un bachillerato tecnológico mexicano en su curso de Cálculo Diferencial. Los jóvenes probaron un par de modelos exponenciales para la modelación de los datos de la pandemia del COVID19 en México usando el software GeoGebra. La interacción profesor – estudiante fue a distancia y se basó en una serie de preguntas relacionadas con los aspectos variacionales del comportamiento de los datos Contagios Acumulados *vs*. tiempo y Nuevos Contagios *vs*. tiempo.

Palabras clave: COVID-19, Cálculo, variacional, modelación, GeoGebra.

Abstract

This document reports the results of a didactic experience with a population of students from a Mexican technological high school in its Differential Calculus course. The youth tested a pair of exponential models for modeling data from the COVID19 pandemic in Mexico using GeoGebra software. The teacher-student interaction was at a distance and was based on a series of questions related to the variational aspects of the behavior of the Accumulated Contagions *vs*. time and New Contagions *vs*. time.

Key words: COVID-19, Calculus, variational, modeling, GeoGebra.

Introducción

Una experiencia frecuente para quienes nos dedicamos a la enseñanza del Cálculo en el nivel preuniversitario es recibir recomendaciones de usar aplicaciones de la vida diaria en nuestras clases. Sin embargo, aquellas que encontramos en la bibliografía a nuestro alcance, frecuentemente caen en lo artificial y no nos permiten mejorar el interés de nuestros estudiantes por la disciplina ni su comprensión de la relevancia que puede llegar a tener esta matemática en lo personal y en su entorno social. Otras ocasiones, las actividades que necesitamos trabajar requieren de recursos materiales con los que no contamos.

Actualmente nos encontramos ante un hecho inédito: la vida nos amanece y nos anochece con los medios de comunicación y las redes sociales inundados de datos numéricos acerca de la evolución de la pandemia del COVID-19. Pocos alcanzan a comprender su significado a plenitud. Este diseño intenta aprovechar la coyuntura de Salud Pública para darle un uso didáctico. Exploramos la información producida a partir de dicho fenómeno, tal como la dinámica del contagio desde una perspectiva del pensamiento *variacional* del Cálculo. El *pensamiento y lenguaje variacional* estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida (Cantoral, 2019). Hacemos uso de GeoGebra para experimentar con un par de modelos matemáticos sobre el comportamiento de las pandemias.

Esta tarea, desde la perspectiva didáctica, requiere de una actividad que puede ser interpretada como traducciones entre la realidad y las matemáticas, lo que, en resumen, se llama modelación matemática (Blum y Borromeo, 2009). Por realidad, queremos decir, según Pollak (1979), el "resto del mundo" fuera de las matemáticas, incluida la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y otras disciplinas científicas.

La modelación y el enfoque variacional de las funciones permiten un escenario productivo para el aprendizaje de las matemáticas. Briceño (2014) comenta que los aspectos variacionales en el caso de la función cuadrática se resignifican a través de la práctica de modelación. Es a través de esta práctica que se puede determinar cómo se pone en juego el conocimiento matemático en forma de herramienta, qué relaciones se utilizan, por qué camino se dirige y el para qué del conocimiento. La práctica de modelación lleva al estudiante a dotarlo de significado.

La Modelación

Blum y Borromeo (2009) preguntan: ¿por qué es tan importante la modelación para los estudiantes? Los modelos matemáticos y la modelación están a nuestro alrededor, a menudo en conexión con potentes herramientas tecnológicas. Preparar a los estudiantes para una ciudadanía responsable y para participar en desarrollos sociales requiere que desarrollen competencias de modelación.

Consideramos a esta visión, acorde a la realidad que vivimos. Encontramos en Internet múltiples recursos digitales con enorme poder y variedad de representaciones. Incluso en economías con altos índices de pobreza, estos recursos digitales se encuentran disponibles para un amplio número de la población. Se puede echar mano de dichos recursos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas.

Según Blum y Borromeo (2009) la modelación matemática está destinada a

• ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo,

• apoyar el aprendizaje de las matemáticas (motivación, formación de conceptos, comprensión, retención),

• contribuir al desarrollo de diversas competencias matemáticas y actitudes apropiadas,

• contribuir a una imagen adecuada de las matemáticas. (pág. 3)

Al modelar, las matemáticas se vuelven más significativas para los alumnos (ésta, por supuesto, no es la única posibilidad para eso). Subyacentes a todas estas justificaciones de modelación están los objetivos principales de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas preuniversitarias.

De hecho, existe una tendencia en varios países a incluir más modelos matemáticos en el plan de estudios. En Alemania, por ejemplo, la modelación matemática es una de las seis competencias obligatorias en los nuevos "Estándares Educativos" nacionales para las matemáticas. Zaldivar, Quiroz y Medina (2017), señalan que la Reforma Integral de Educación Básica del año 2009, manifiesta la necesidad de que los alumnos modelicen situaciones de la vida cotidiana desde el preescolar hasta la secundaria (SEP, 2011). Sin embargo, en la enseñanza matemática cotidiana en la mayoría de los países todavía hay poca atención a los modelos. La mayoría de los "problemas verbales" se tratan cuando después de "desnudar" el contexto, el objetivo esencial es ejercitar las matemáticas. Para el desarrollo de competencias y para el apoyo al aprendizaje, los problemas verbales también son legítimos y útiles; pero es importante ser honesto sobre la verdadera naturaleza de las tareas y problemas orientados a la realidad. ¿Por qué encontramos tan pocos modelos en las aulas cotidianas, por qué existe esta brecha entre el debate educativo (e incluso los planes de estudio oficiales), por un lado, y la práctica en el aula, por otro lado? La razón principal es que la modelación también es difícil para los maestros, ya que se necesita conocimiento del mundo real y la enseñanza se vuelve más abierta y menos predecible (ver, por ejemplo, Freudenthal, 1973, Pollak 1979, DeLange, 1987, Burkhardt, 2004, Blum et al. 2007).

En México, Ponce-Campuzano (2013) encuentra, al trabajar con estudiantes de un bachillerato, que las herramientas dinámicas proporcionan múltiples representaciones sobre las cuales los estudiantes pueden anclar su comprensión. Concluye que la herramienta dinámica GeoGebra, les permite visualizar conexiones de distancia, velocidad y aceleración con escenarios del mundo real, haciendo posible que las múltiples perspectivas promuevan así representaciones de imágenes dinámicas del Teorema Fundamental del Cálculo. Por su parte, Briseño y Cordero (2008) analizaron una situación de modelación de movimiento con estudiantes quienes explicaron la variación a través de la gráfica obtenida. Ellos hicieron un uso de la gráfica a través de su funcionamiento y forma. Su proyecto de investigación entendió el papel que juega la tecnología en el conocimiento matemático del estudiante en la situación, al encontrar que el estudio del "uso de las gráficas" permitió explicar cierto tipo de matemática.

Todo lo que apuntan estos autores, destaca la relevancia que tiene la modelación en los procesos de aprendizaje de la matemática y los roles que ésta cumple. En su ausencia, es difícil alcanzar los objetivos planteados en los diferentes currículos escolares.

Acerca de la Variación

Cantoral (2019), nos dice "sabemos que para procesar el *cambio* se requiere de cierta evolución, una dinámica que sea expresada mediante *estados* y *comparaciones*. *La distinción de un estado respecto de otro se establece por comparación, por tanto, se requiere de un sistema de referencia que lo permita. Este proceso lleva al reconocimiento de lo igual y a descubrir ahí mismo, lo diferente. Estos aspectos de tipo cualitativo se revelan en el mundo cotidiano que nos rodea; pero su cuantificación e instrumentación, precisan de la intermediación cultural y de los sistemas de razón convenidos. Este paso de lo cualitativo a lo cuantitativo exige de una nueva noción que organice y amplíe la experiencia previa, la variación, cuya primera acepción será la medición del cambio. Sin embargo, ésta a su vez requiere de la identificación de un sistema de referencia variacional y de una unidad de medida. La variación exige, además, de la conservación de aquello por medir durante el proceso de cambio. Son esos elementos invariantes los que dan inicio, a la generalización y a una caracterización amplia de la variación. Pero, sobre todo, esta manera de trabajar exige de una forma de pensamiento particular al que denominamos pensamiento y lenguaje variacional* (p. 20).

El pensamiento y lenguaje variacional nos brinda un orientación clara en los procesos de modelación matemática del cambio. Nos señala elementos fundamentales tales como ideas de estados, prácticas de comparación, reconocimientos de sistemas de referencia y la noción de variación como medición del cambio. Esta línea de investigación constituye el escenario teórico que permite abordar el estudio de fenómenos biológicos tales como una pandemia para construir conocimiento del Cálculo a través de prácticas de modelación y simulación. El uso del enfoque variacional permite establecer una relación epistemológica entre modelación y los aspectos variacionales en la construcción del conocimiento matemático.

Objetivo

Diseñar una actividad de aprendizaje para estudiantes de Cálculo de bachillerato basada en el análisis de los datos aportados por la Secretaría de Salud referentes a la pandemia del COVID-19 en México desde un punto de vista variacional, con la finalidad de mejorar su comprensión del fenómeno y progresar en el desarrollo de algunas competencias matemáticas del Marco Curricular Común del Sistema Nacional de Bachillerato.

Objetivo Específico 1

Promover el desarrollo de las siguientes competencias matemáticas de la Educación Media Superior (Secretaría de Educación Pública, 2004):

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Objetivo Específico 2

Diseñar una experiencia de aprendizaje basada en un recurso digital abierto para que estudiantes de bachillerato se aproximen a dos modelos exponenciales

Pregunta que guía nuestro diseño

¿El desarrollo de qué competencias matemáticas puede verse favorecido con la realización de una actividad de aprendizaje en el marco de un curso de Cálculo Diferencial de bachillerato a partir del uso de la modelación y la graficación referida a un evento epidémico de alcance mundial, en combinación con el uso de los recursos expresivos de las tecnologías digitales?

Elementos Metodológicos

Acerca de la población objetivo

Las actividades se pensaron para llevarse a cabo en un bachillerato tecnológico público ubicado en la región noreste de México y se diseñaron para ser implementadas con estudiantes de 4º semestre cuyas edades se encontraban entre los 16 y los 19 años, de nivel socioeconómico de bajo a muy bajo. La institución es receptora de chicos(as) que no pudieron acceder a otros planteles por sus bajos promedios de secundaria. De ahí pues la necesidad de diseñar ambientes de aprendizaje atractivos y significativos para esta población con limitados antecedentes matemáticos para abordar el cuerpo conceptual y procedimental propio de un curso de Cálculo Diferencial a nivel bachillerato. La experiencia se trabajó con 3 grupos que totalizaban una población de 130 estudiantes. Sin embargo, debido a la crisis económica que detonó el periodo de cuarentena terminamos trabajando con 64: 19 de la especialidad de Programación, 23 de Soporte y Mantenimiento de Equipo de Cómputo y 22 de Electrónica.

Debido a que ya la autoridad ya había decretado el confinamiento, la comunicación con los grupos fue vía correo electrónico.

GeoGebra

Hacemos uso de este potente recurso digital para matemáticas por su carácter de Recurso Abierto (software open source). Es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente Geometría, Álgebra, Estadística y Cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su amigable interfase, simpleza y de libre uso, ha permitido el desarrollo de una comunidad vital de acercamiento a la actividad matemática. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Permite dinamizar el estudio de las matemáticas, armonizando lo experimental, lo procedimental y lo conceptual para estructurar una organización didáctica y disciplinar que permite atravesar ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics).

De dicho recurso tecnológico hacemos uso de los siguientes elementos:

- GeoGebra reúne gráfica y dinámicamente álgebra y geometría, análisis y hojas de cálculo.
- Su interfaz intuitiva y ágil nos permite crear recursos de aprendizaje interactivos como páginas web
- Software de código abierto libre y disponible para usos no comerciales

Acerca de la Experiencia de Aprendizaje

Desde hace un par de años, comenzamos a diseñar una serie de 10 actividades de índole variacional utilizando GeoGebra. El propósito era abordar el estudio de los contenidos de un curso de Cálculo Diferencial, en un ambiente de geometría dinámica. En dichas actividades se trabajaron funciones polinomiales, periódicas y exponenciales. En todas ellas se incluyeron elementos pictóricos, gráficos, numéricos y analíticos. Acompañan a cada una de ellas un cuestionario con una serie de preguntas cuyo propósito es problematizar y dirigir la reflexión hacia los contenidos del programa: variable, función, dominio, rango, análisis gráfico de funciones, rapidez de cambio promedio, rapidez instantánea de cambio, primera derivada, segunda derivada, punto de inflexión todos ellos en el marco del Pensamiento variacional y la modelación. Los archivos GeoGebra de cada tarea se diseñaron para trabajarse indistintamente en computadora, Tablet o teléfono celular, siendo este último la principal herramienta de trabajo debido a la realidad socioeconómica predominante en la institución.

El curso de Cálculo en el que se trabajó esta experiencia dio inicio con la realización de una práctica de modelación diseñada con base en el uso de tecnología Arduino (tarjeta electrónica que permite el control de sensores con las cuales se pueden hacer mediciones) para la realización de experimentos de cinemática, con el fin de introducir a los estudiantes a las funciones polinomiales. Posterior a la realización de esta actividad se recibió la indicación de suspensión de clases como producto de la Jornada Nacional de Sana Distancia establecida por el Gobierno de la República, como estrategia de mitigación del contagio de COVID-19.

En ese escenario se estaba comenzando a trabajar la primera de las actividades con GeoGebra. El tema se enfocaba al crecimiento de los árboles cuyo fin temático era introducir las funciones exponenciales, en particular, de la función logística.

En el escenario nacional comenzó en los medios de comunicación la rutina de las Conferencias COVID-19 donde las autoridades sanitarias proporcionaban información diariamente sobre datos relativos a los contagios acumulados, nuevos contagios, defunciones, etc. así como las recomendaciones sobre las precauciones y cuidados para prevenir el contagio y la enfermedad. La amplia comunicación a la ciudadanía venía acompañada por la terminología utilizada por los epidemiólogos, vocablos de uso común en los cursos de Cálculo: variables, relación entre variables, curvas, velocidad, crecimiento, decaimiento, meseta, etc. En el transcurso del avance de la pandemia surgió la inquietud de investigar el fenómeno epidémico para ver si era posible usar los datos de la enfermedad para que los estudiantes aplicaran los contenidos cuyo estudio ya se había iniciado en el curso. En principio quedó claro que era una situación muy compleja y que suponía el uso de herramientas matemáticas que rebasaban en mucho los temas de bachillerato.

Una búsqueda en internet nos dotó de información valiosa en el blog de un matemático español (Futuro-pandemia-según-matemáticas) en donde se hablaba de la posibilidad de modelar el fenómeno con dos diferentes modelos exponenciales: Logístico (Ulloa, 2010) y Gompertz (Rodríguez y Ulloa, 2017) Esto llamó poderosamente nuestra atención, pues el modelo logístico ya lo estaban revisando los estudiantes en la actividad de crecimiento de un árbol (Figura 1):

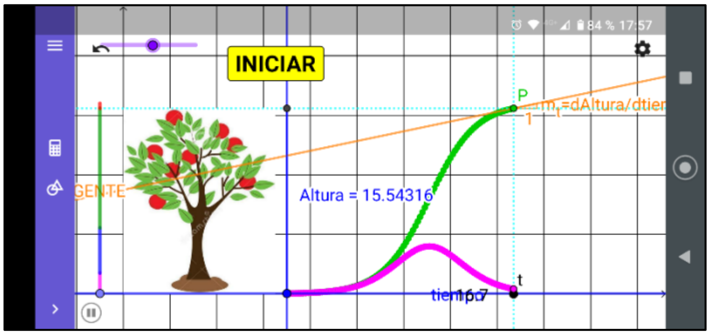


Figura 1. Imagen de la app de GeoGebra Crecimiento de un Árbol

y, además, la revisión que hacía el autor del blog era de naturaleza variacional y, con una característica importante respecto a las referencias de las que ya se disponía: un abordaje no para expertos matemáticos y sí accesible para la población de interés. De ahí pues, la decisión que se tomó de darse a la tarea de diseñar una actividad basada en una aplicación de GeoGebra.

Para hacer llegar a los jóvenes una introducción a la actividad que demandara el menor consumo de datos posible, se grabó un video que se puso disponible en YouTube (https://acortar.link/lPYJH). La actividad se diseñó de forma tal que los estudiantes pudieran desarrollarla enteramente usando un smartphone, GeoGebra y cualquier software de hoja electrónica. La actividad estuvo integrada por 5 apps de GeoGebra, disponibles en internet, y un cuestionario.

El énfasis en el diseño de las apps de GeoGebra y de las preguntas que debían contestar los estudiantes se colocó en el análisis del comportamiento gráfico de los datos diarios de la enfermedad relativos a los contagios acumulados y de los dos modelos mencionados en el blog referido, Logístico y Gompertz, y de su velocidad de cambio o nuevos contagios, que en el discurso didáctico y matemático está asociado a la noción de “derivada” de la función Contagios Acumulados *vs*. tiempo. En este último punto es importante aclarar que, durante las conferencias diarias de las autoridades sanitarias continuamente se hace referencia a la necesidad de “achatar la curva”. Esta expresión había generado mucha confusión entre la población, pues lo que la gente en su mayor parte observaba era un gráfico como el siguiente (Figura 2, puntos oscuros), que relaciona los contagios acumulados, *C*, con el tiempo, *t*, o días transcurridos a partir del 27 de febrero en que se reportaron los primeros contagios en México:

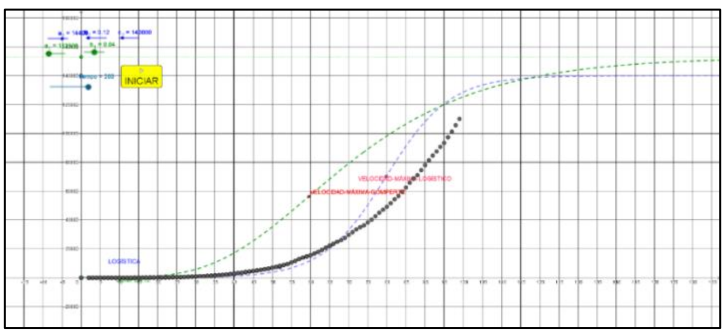


Figura 2. Imagen de la app de GeoGebra COVID19LogísticaGompertz

que evidentemente es creciente y en donde no se observaba achatamiento alguno ni posibilidad de que lo hubiera.

Entonces, ¿a qué se referían las comunicaciones de los epidemiólogos? Ellos se referían a el gráfico que relaciona los Nuevos Contagios, ***N***, con el tiempo, ***t***, puntos negros ubicados en la parte inferior de la gráfica (Figura 3):

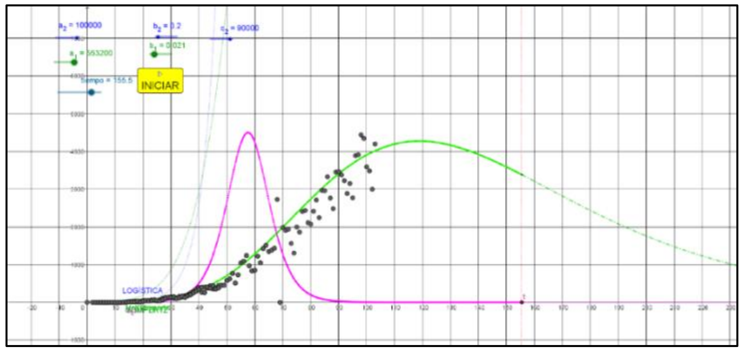


Figura 3. Imagen de la app de GeoGebra COVID19V$_{\text{Logística}}$V$_{\text{Gompertz}}$

El observar las discrepancias entre las explicaciones de los especialistas del evento biológico que nos ocupa y lo que las audiencias entendían, incluidos muchos comunicadores y analistas, se reforzó aún más la idea de la necesidad de hacer un esfuerzo por diseñar una actividad de aprendizaje que únicamente atendiera a los aspectos variacionales de lo que consideramos los datos más relevantes de la pandemia, contagios acumulados, ***C*** *vs*. ***t*** y nuevos contagios, ***N*** *vs*. ***t***, y a su relación con los contenidos de un curso estándar de Cálculo de bachillerato.

Elementos y Estructura de la Actividad

Cada una de las 5 apps de GeoGebra partieron de los datos de Contagios Acumulados (***C***) *vs*. tiempo (***t***), contados a partir del 27 de febrero del 2020, fecha en que se reportaron los primeros contagios en México y todo esto registrado en la hoja de cálculo. Con estos Contagios Acumulados se calcularon los nuevos contagios (***N***) en donde $N_i = \Delta C$.

En pantalla se aprecian 6 deslizadores, 2 para la función Gompertz, 3 para la función Logística y uno para el tiempo

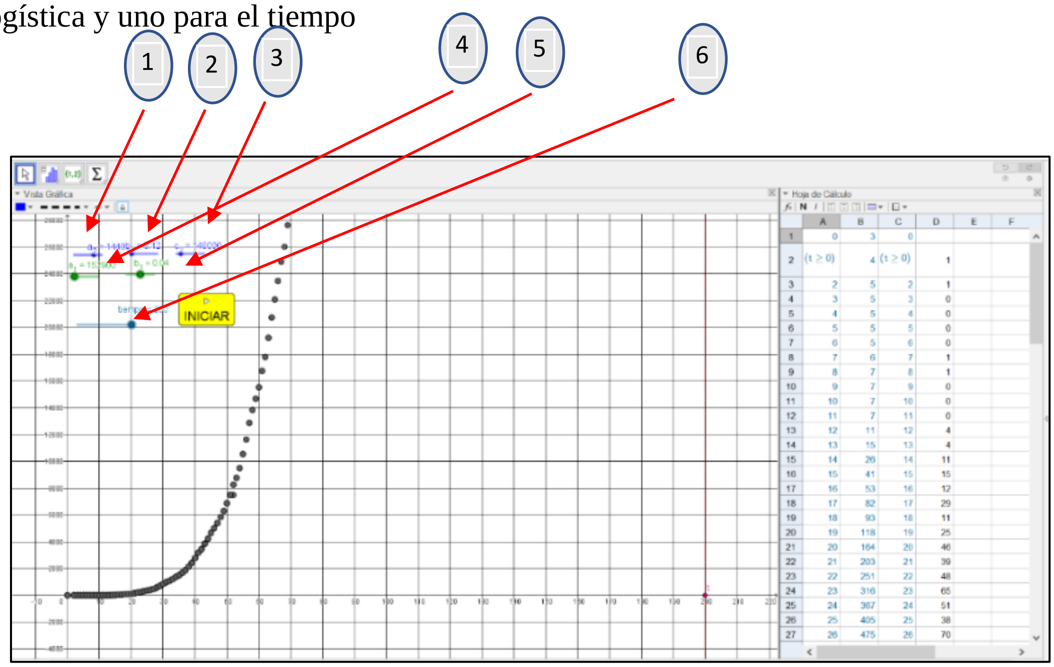


Figura 4. Imagen de la app de GeoGebra COVID19Logística

Función Gompertz

$$G(t) = Ke^{-ln\frac{K}{P_0}e^{-ct}}$$

donde

G = Número de contagios

t = Número de días transcurridos a partir de la fecha en que se reportó el brote inicial

K = máximo

P_0 = Número de casos iniciales

c = constante de crecimiento

Función Logística

$$L(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

donde

P = Número de contagios

t = Número de días transcurridos a partir de la fecha en que se reportó el brote inicial

$K = \lim_{t \to \infty} P(t)$

P_0 = Número de casos iniciales

c = constante de crecimiento

El uso de los deslizadores volvió más accesible y dinámico el control de los comportamientos de los gráficos de los dos modelos para que los estudiantes estuvieran en posibilidad de ajustar cada uno lo mejor posible a los datos. Se procuró un diseño para el que los chicos no necesitaran una preparación especial en el manejo de GeoGebra.

Las 5 apps de GeoGebra compartidas a los estudiantes, en realidad son una sola y sus diferencias se deben a qué elementos geométricos se encuentran activados y visibles. Esto es con el propósito de no saturar la pantalla con demasiados objetos y poder destacar en momentos distintos las características de cada uno de los gráficos y así facilitar la identificación de las similitudes y diferencias entre cada uno de ellos con el propósito de lograr los objetivos de aprendizaje deseados. Debe mencionarse que, en todos los casos, el dispositivo utilizado por los estudiantes para usar estas aplicaciones de GeoGebra fue el teléfono celular.

No.	Nombre de la app	Gráficos Visibles	Gráficos Visibles
1	Logística	Función Logística y su velocidad	$\boldsymbol{L(t)}$ y $\boldsymbol{V}_L(\boldsymbol{t})$ o $\boldsymbol{N}_L(\boldsymbol{t})$
2	Gompertz	Función Gompertz y su velocidad	$\boldsymbol{G(t)}$ y $\boldsymbol{V}_G(\boldsymbol{t})$ o $N_G(\boldsymbol{t})$
3	Logística – Gompertz	Función Logística y Función Gompertz	$\boldsymbol{L(t)}$ y $\boldsymbol{G(t)}$
4	Velocidad Logística – Velocidad Gompertz	Velocidad Función Logística y Velocidad Función Gompertz	$\boldsymbol{V}_L(\boldsymbol{t})$ o $\boldsymbol{N}_L(\boldsymbol{t})$ y $\boldsymbol{V}_G(\boldsymbol{t})$ o $N_G(\boldsymbol{t})$
5	China	Contagios Acumulados y Nuevos Contagios del COVID-19 en China	

Tabla 1. Lista de las apps de GeoGebra diseñadas para trabajar esta experiencia

En cada una de ellas se encuentran visibles los datos reales de los contagios acumulados a excepción de la 4, en donde los puntos visibles corresponden a las Velocidades, $\boldsymbol{V}$, con que cambian los Contagios, es decir $\boldsymbol{V} = \frac{\Delta \boldsymbol{C}}{\Delta \boldsymbol{t}}$ que, considerando que $\Delta \boldsymbol{t} = 1$, pues los reportes son diarios, entonces $\boldsymbol{V} = \frac{\Delta \boldsymbol{C}}{\boldsymbol{1}} = \Delta \boldsymbol{C}$ = Nuevos contagios = $\boldsymbol{N}$ Además, la actividad incluyó una revisión y análisis del comportamiento de los datos de Contagios Acumulados *vs*. tiempo y Nuevos Contagios *vs*. tiempo de China, para identificar las características del gráfico de un país en donde el evento epidémico ya había sido controlado

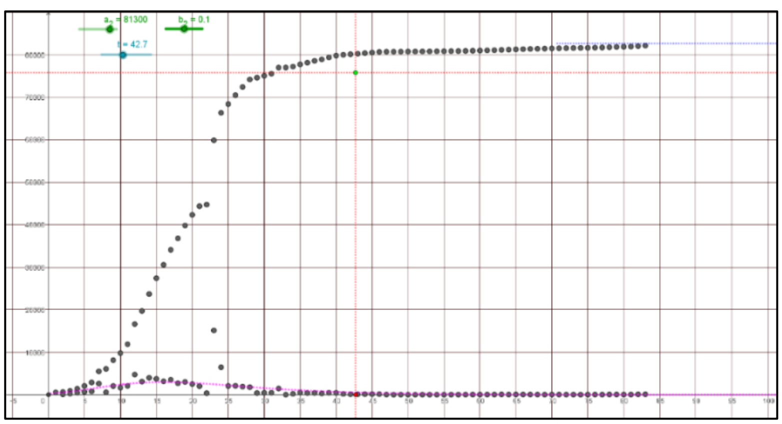


Figura 5. Imagen de la app de GeoGebra COVID19China

Y, ¿qué aspectos de estos datos podían sernos de utilidad de esta app con datos de China? La respuesta tenía que ver con el gráfico de los nuevos contagios $\boldsymbol{N}$ *vs*. tiempo, $\boldsymbol{t}$, que en el gráfico anterior localizamos en los puntos negros de la parte inferior de la figura. Observando la ubicación de este conjunto de puntos, se podía distinguir que $\boldsymbol{N}$ *vs.* $\boldsymbol{t}$ en su primera parte, crece más rápidamente que en su etapa decreciente. Esta característica resultó clave para identificar que el modelo para los nuevos contagios no podía ser simétrico, sino que el modelo a considerar debería ser asimétrico. El porqué de esta afirmación era una buena pregunta a plantear a los estudiantes pues su respuesta requería que analizaran la información sobre las condiciones de la evolución de la pandemia y pusieran su atención en las medidas de mitigación implementadas por las autoridades sanitarias pues éstas parecen ser la causa de la diferencia entre la etapa de crecimiento de los nuevos contagios, y la etapa de decrecimiento en donde la autoridad se ve en la necesidad de actuar para contener la enfermedad lo que da como resultado la lenta disminución de los nuevos contagios. Así mismo, las diferencias entre los dos modelos propuestos tenían un significado importante en el marco de un curso de Cálculo Diferencial pues abría la puerta a la discusión de las diferencias entre el comportamiento gráfico de ambos modelos, discusión en donde la velocidad de cambio de ambas funciones (su derivada) era crucial en términos de la velocidad de contagios, la saturación de los hospitales, etc. Por otra parte, este gráfico en particular, podía ser un fuerte argumento para que los (las) estudiantes se convencieran de la importancia de seguir las recomendaciones para prevenir el COVID-19.

Instrumento de evaluación

Después de revisar toda la información anterior, carga en tu dispositivo (celular, Tablet, o computadora) el archivo **COVID19Logística.ggb** y mueve cada uno de los deslizadores para que identifiques el efecto que tiene cada uno de ellos sobre la curva. Hazlo hasta que el comportamiento del gráfico logístico se ajuste lo más posible a la **CURVA EPIDÉMICA**, la cual recuerda, es la gráfica de los puntos negros, que es la información real de ***contagios acumulados vs. tiempo*** en México. Ten presente que puedes acercarte o alejarte a la(s) gráficas tanto como desees para observar con más detalle aquello que más te interese.

1. Si la referencia es esta función ¿alrededor de cuántas personas se llegarán a contagiar?

2. También, con base en este modelo, ¿aproximadamente cuántos días transcurrirán para que la epidemia alcance niveles que permitan afirmar que ya fue controlada?

3. Con base en tu respuesta anterior, ¿cuál es el dominio de $\boldsymbol{L(t)}$ y su imagen?

4. Anota la expresión algebraica de la función $\boldsymbol{L(t)}$ que obtuviste, tomando en cuenta los valores a los que llegaste para cada uno de los deslizadores. Para ello, abre la ventana algebraica pulsando el ícono de la calculadora como se indica en la figura siguiente

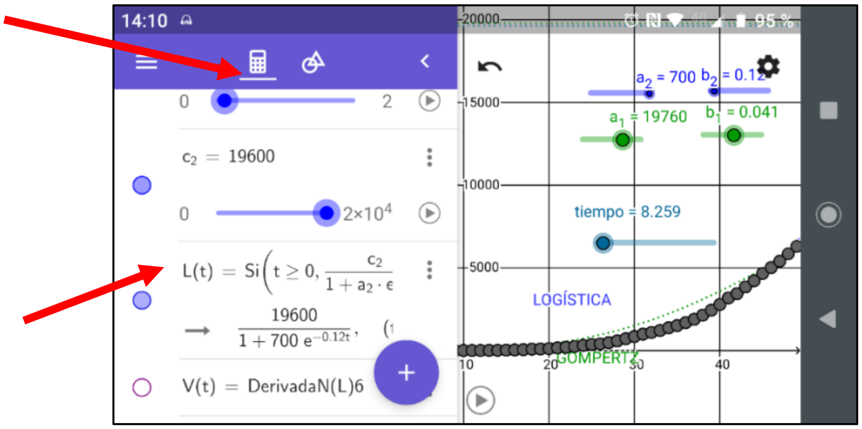


Figura 6. Imagen de la app de GeoGebra COVID19LogísticaGompertz con la ventana algebraica visible

5. ¿Qué dato importante podemos obtener de la recta que pasa por el punto **L**?

Ahora, carga en tu dispositivo el archivo **COVID19Gompertz.ggb** y realiza el mismo ejercicio que con el anterior, mueve los deslizadores a fin de que ajustes la curva del **MODELO GOMPERTZ** a la **CURVA EPIDÉMICA** y contesta las siguientes preguntas.

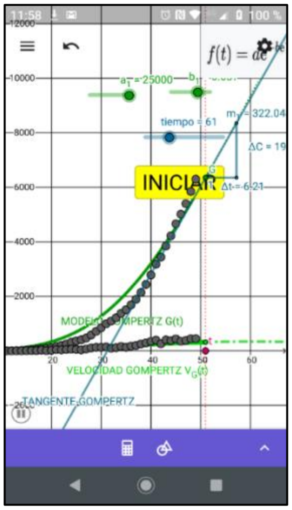


Figura 7. Acercamiento de la app de GeoGebra COVID19$\boldsymbol{V_L(t)V_G(t)}$

6. Acorde al resultado que obtuviste en el punto anterior, ¿cuántos días tendrán que transcurrir para que comience a disminuir la velocidad de propagación $\boldsymbol{V_G(t)}$ de los contagios, de acuerdo al **MODELO GOMPERTZ**

7. Si la referencia es esta función ¿alrededor de cuántas personas se llegarán a contagiar?

8. También, con base en este modelo, ¿aproximadamente cuántos días tomará para que la epidemia alcance niveles que permitan afirmar que ya fue controlada?

9. Con base en tu respuesta anterior, ¿cuál es el dominio de ***G*(*t*)** y su imagen?

10. ¿Qué valores importantes podemos obtener de la recta que pasa por el punto **G**?

11. Anota la expresión algebraica de la función ***G*(*t*)** a la que llegaste sustituyendo los valores de cada uno de los parámetros de los deslizadores en la expresión señalada con la flecha roja

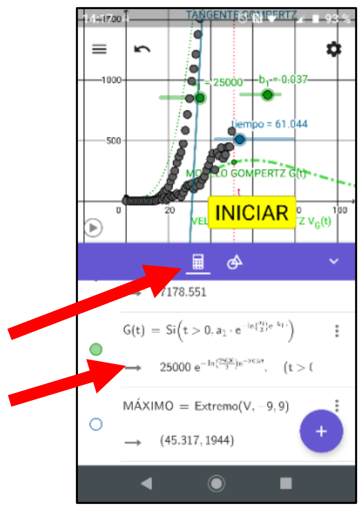


Figura 8. Imagen de la app de GeoGebra COVID19***V***L(***t***)***V***G(***t***) con la vista algebraica visible

Carga en tu dispositivo el archivo **COVID19LogísticaGompertz.ggb**

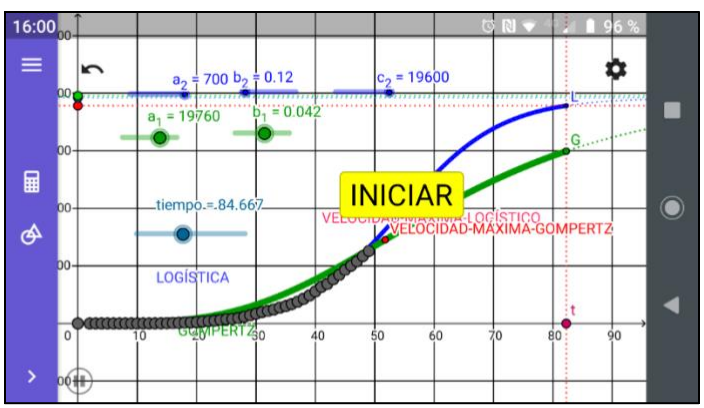


Figura 9. Imagen de la app de GeoGebra COVID19 Logística Gompertz

12. Usa los deslizadores para ajustar ambas curvas lo más posible a los datos reales. Anota estos valores obtenidos para cada deslizador.

Enseguida, abre el archivo **COVID19Vlogística-Vgomperts.ggb** y sitúa los valores de los 5 deslizadores en aquellos que habías determinado en el punto anterior

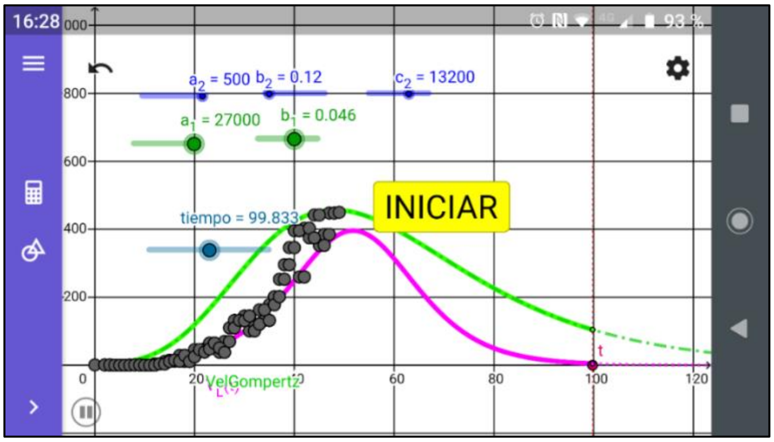


Figura 10. Imagen de la app de GeoGebra COVID19$\boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{t})$

13. ¿Cuántos gráficos tenemos en pantalla?, ¿qué variables se relacionan en cada una de ellas?

14. Después de trabajar con ambos modelos, ¿cuál de ellos consideras se ajustan mejor a los datos reales?

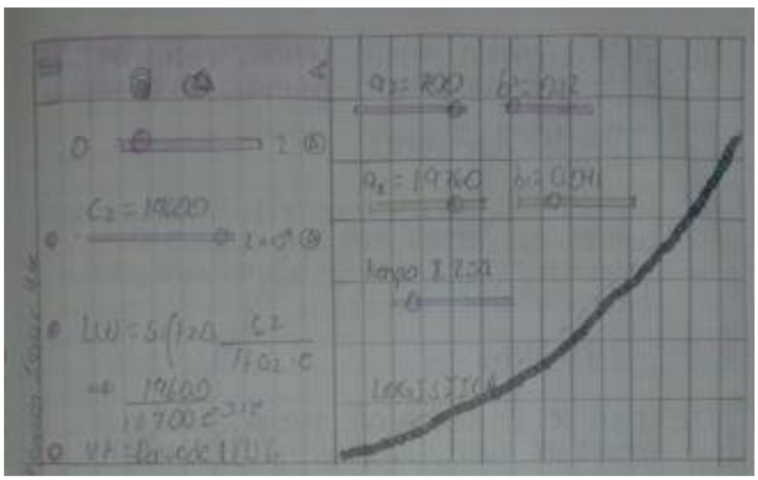
15. Con base al trabajo realizado en esta actividad, ¿dentro de cuántos días considerarías sería seguro que tú y tu familia continuaran con su rutina normal de vida?

Resultados

En la tabla siguiente ubicamos algunas de las respuestas obtenidas. Como era de esperar, en cada grupo se identificó el copiado de respuestas lo que hizo que algunas de ellas aparecieran repetidas en cada uno.

Tabla 2. Respuestas predominantes

Pregunta	Respuestas
1	"*Alrededor de 15,500*"
2	1. "*Aproximadamente 120 días*" 2. "*Hasta el día 180*"
3	1. "*Su dominio es el tiempo (los días) y su imagen viene siendo la logística de contagiamiento en las personas*" 2. Dominio $0 \leq t \leq 135$ Imagen $0 \leq L \leq 18{,}000$ 3. Dominio $0 \leq t \leq 118$ Imagen $0 \leq L \leq 15{,}200$
4	1. $L(t) = \frac{17{,}600}{1+150e^{-0.08t}}$ 2. $L(t) = \frac{15{,}200}{1+500e^{-0.12t+1}}$ 3. $L(t) = \frac{10{,}800}{1+320e^{-0.12t+1}}$
5	1. "*Que es la tangente de la logística de contagiamiento* " 2. "*La velocidad máxima de contagio*" 3. "*La velocidad de propagación*"
6	1. "*aproximadamente 56 días*" 2. 51 3. 52 días 4. 60
7	1. "*Alrededor de 25,000 personas*" 2. 18,000 personas 3. 16,000 4. 15,200 5. 24,800 6. 18,500 7. 17,500
8	1. "*250 días aproximadamente*" 2. 135 días 3. 169 días 4. 118 5. 62 días 6. 130 días

9	1. Su dominio es el tiempo y su imagen viene siendo el modelo Gompertz del contagiamiento en personas 2. Dominio $0 \leq t \leq 169$ Imagen $0 \leq G \leq 16{,}000$ 3. Dominio $0 \leq t \leq 197$ Imagen $0 \leq G \leq 24{,}800$ 4. Dominio $0 \leq t \leq 130$ Imagen $0 \leq G \leq 17{,}500$
10	"*Que viene siendo la tangente Gompertz en el contagiamiento*"
11	1. $G(t) = 15{,}998e^{-ln\frac{15{,}998}{3}e^{-0.044t}}$ 2. $G(t) = 25{,}000e^{-ln\frac{25{,}000}{3}e^{-0.30t}}$ 3. $G(t) = 25{,}000e^{-ln\frac{25{,}000}{3}e^{-0.37t}}$
12	
13	1. "*2 gráficos. Uno relaciona los contagios vs. tiempo y el otro relaciona la velocidad de contagios vs. tiempo*" 2. "*La verde y la gráfica rosa, la verde es la velocidad de propagación y se relacionan los días contra las personas contagiadas igual que en la gráfica rosa*"
14	1. "*Considero que el de la logística pues se posiciona mejor en los gráficos* " 2. "*El modelo Gompertz*" 3. "*La gráfica verde Gompertz*"
15	*"Talvez dentro de dos meses dependiendo del comportamiento y responsabilidad de las personas"*

Conclusiones

Considerando, por una parte, que entre nuestros objetivos se encontraba el diseño de una actividad que creara un escenario de aprendizaje en donde se utilizaran datos reales de un evento biológico para realizar un análisis de los mismos con énfasis en el aspecto variacional y por la otra, que las respuestas obtenidas en donde los (las) jóvenes dan cuenta de que fueron capaces de identificar las variables presentes en cada una de las gráficas disponibles, sus dominios, sus imágenes, elegir uno u otro gráfico como el idóneo para modelar los datos disponibles e incluso, en unos pocos casos, hacer un pronóstico de la duración de la pandemia, consideramos que la experiencia didáctica aporta elementos valiosos que nos permitieron avanzar hacia la consecución de los objetivos propuestos trabajando a la distancia sin práctica previa en este esquema de enseñanza. A futuro, estimamos necesario revisar los cuestionamientos planteados para mejorar la exploración de las ideas de los participantes. Así mismo, vislumbramos que, después de un largo confinamiento ya existe una mayor conciencia de la importancia de usar los recursos digitales en los diferentes sistemas educativos, lo que nos lleve a que en próximas oportunidades se cuente con mayores y mejores recursos para diseñar experiencias didácticas como la que aquí se reporta.

Referencias bibliográficas

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: ¿Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood

Briceño, O. (2014). *Una secuencia de modelación para la introducción significativa de la función cuadrática*. Tesis de maestría no publicada. Cicata del IPN, México.

Briceño, E., Cordero, F. (2008). *La génesis instrumental en una situación de modelación del movimiento*. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 983–992). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Burkhardt, H. (2004). Establishing Modelling in the Curriculum: Barriers and Levers. In: Henn, H.W./ Blum, W. (Eds), ICMI Study 14: *Applications and Modelling in Mathematics Education Pre-Conference Volume*. University of Dortmund, 53–58

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber*. *Pensamiento y lenguaje variacional*. México: Gedisa

DeLange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: CD-Press

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel

Pollak, H. O. (1979). *The Interaction between Mathematics and Other School Subjects, New Trends in Mathematics Teaching IV*. UNESCO, Paris, 232–248

Ponce-Campuzano, J. (2013) Developing prospective mathematics teachers in Mexico: a lesson on the relationship between integration and differentiation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44:7, 996–1006, DOI: 10.1080/0020739X.2013.826386

Rodríguez, J. y Ulloa, J (2017). *Alternativa didáctica para el estudio del modelo Gompertz.* Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 2, pp. 98–114.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica. México.*

Secretaría de Educación Pública (2004). *Competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.* Acuerdo 444 https://n9.cl/2dh4

Ulloa J. y Rodríguez J. (2010) El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. REDVET. *Revista electrónica de Veterinaria*, 11(3). Recuperado el 3 de marzo de 2020, de https://bit.ly/3885gus.

Zaldivar, D., Quiroz, S. Y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la REDIEH*, 8(15), 87–110.

Paquete de Software

GeoGebra: https://www.geogebra.org/about?lang=es

Materiales suplementarios

Cálculo para todos. Recuperado de http://www.calculoparatodos.com/geogebra/

Cálculo para todos: La Pandemia Del #COVID19 Vista Desde El Cálculo https://acortar.link/lPYJH

Rankia. *El futuro de la pandemia según las matemáticas.* Recuperado de https://bit.ly/3niSuja