# Una propuesta didáctica para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función

Eloisa Benitez Mariño & J. Rigoberto Gabriel Argüelles

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, México

elobenitez@uv.mx & jgabriel@uv.mx

*Fecha de Recepción:20 de enero 2020*
*Fecha de Aceptación: 23 de marzo 2020*
*EL CÁLCULO Y SU ENSEÑANZA*
Volumen 14. Enero - Junio 2020.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107 P.p.16-29.

**Resumen**. Este escrito forma parte de un trabajo de investigación en Matemática Educativa dirigido a caracterizar conceptos básicos del Cálculo. Este artículo es el resultado de un estudio longitudinal con distintos grupos de estudiantes del nivel universitario y posgrado, donde se observan dificultades para trabajar apropiadamente el concepto de límite de una función real. Después de una revisión de algunas publicaciones que abordan este tema, se determinó utilizar como marco referencial, las ideas sobre imagen y definición del concepto dadas por Tall y Vinner (1981), para elaborar una secuencia de actividades didácticas, con apoyo de un Software de Geometría Dinámica (SGD). Las actividades logran favorecer la comprensión del concepto de límite de una función lineal y dan como resultado una imagen mental más rica en los estudiantes.

**Palabras Clave**: Límite de una función, imagen del concepto, definición del concepto.

**Abstract**. This writing is part of a research work in Educational Mathematics aimed at characterizing basic concepts of Calculus. This article is the result of a longitudinal study with different groups of university and postgraduate students, where difficulties are observed to work properly these concepts. After a review of publications related to the subject, it determined to use the referential frame "Concept Image" and "Concept Definition" of Tall and Vinner (1981), to elaborate a series of didactic activities, which are supported by a Software of Dynamic Geometry. These activities help to promote the understanding of the limit concept of a linear function and result in a richer mental image in students.

**Keywords**: Limit of the function, Concept Image, Concept Definition.

## 1. Introducción

Uno de los conceptos centrales del Cálculo es el límite de una función, debido principalmente a que la derivada de una función se define como el límite del cociente de Newton, luego la derivada se asume como un límite. El concepto de límite ha sido abordado por educadores y didactas de la Matemática, los cuales han encontrado una serie de problemas y errores que cometen los estudiantes de los diferentes niveles de educación, cuando trabajan con este concepto.

Sierra, Gonzáles y López, (1999) estudian el desarrollo histórico del concepto de límite funcional en libros de bachillerato y de los cursos de orientación universitaria, de 1940 a 1995. Para el estudio consideran tres dimensiones: conceptual, cognitiva y fenomenológica.

Espinoza y Azcárate (2000) usan el enfoque antropológico y didáctico de Chevallard para proponer una metodología de investigación, para el análisis de las organizaciones matemáticas recreadas por los maestros en el salón de clases en colaboración con sus alumnos y la respectiva organización didáctica que permite su reconstrucción. De los resultados más representativos referente a los profesores están: que sus organizaciones matemáticas entorno a los límites de funciones poseen en esencia las mismas características. Obedecen a la única cuestión del cálculo de límites de funciones, partiendo de la base que éste existe o es infinito (o mínimo, de que existen o son infinitos los límites laterales). Se asume que el límite de una función en un punto es algo calculable (aunque pueda valer infinito) y el problema radica en realizar dicho cálculo.

## 2. Justificación

Se conoce que se usa el concepto de límite para aproximar o intuir hacia donde se acercan los valores de una función, cuando un número se aproxima a otro. En la historia de la matemática se encuentra que en la formalización del concepto de límite, atribuible a Karl Weierstrass, hubo definiciones intuitivas que consideraron varias nociones preliminares de límite. Por ejemplo, la idea acerca de definir el límite de una función de Newton, se localiza en el impreso Philosophiae naturalis principia mathematica, enunciada de la siguiente manera: "Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales" (Durán, 1996, p. 54).

La idea de límite que D'Alembert presenta es, "a una cantidad se le llama el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada, sin llegar nunca a coincidir con ella" (Durán, 1996, p. 56).

Por otra parte, Cauchy muestra una definición de límite, casi tan formal como la definición que se localiza en los libros contemporáneos de cálculo y análisis matemático. Para Cauchy, cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan de manera indefinida a un valor fijo, de tal forma que terminan por diferir de él en tan poco como se quiera, este último valor se llama el límite de todos los demás. Cauchy, a diferencia de sus antecesores que consideraron un infinitésimo como un número constante muy pequeño, lo define como una variable. Él mencionaba que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero. Se sabe que en el cálculo de Cauchy los conceptos de función y de límite son los conceptos fundamentales (Ídem).

La interpretación que hace Boyer (1996) es que Weierstrass, contribuyó al programa de aritmetización del análisis con una definición satisfactoria de número real, además de una definición depurada del concepto de límite, precisando la definición dada por Cauchy. En los Elementos de Heine, escritos bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, definió el concepto de límite de una función $f(x)$ en $x_0$ de la siguiente manera: Si, dado cualquier $\varepsilon$, existe un $\eta_0$ tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que $\varepsilon$, entonces se dice que $L$ es el límite de f(x) para $x = x_0$. En la definición formal, usada actualmente, la $\eta$ de Weierstrass y Heine es sustituida por $\delta$. De lo anterior, se puede concluir que dar la definición formal de límite, llevó varios años y tuvo que pasar por un proceso de varias definiciones un tanto informales, hasta finalmente llegar a una definición abstracta.

En los cursos universitarios, por lo regular se parte de la definición de Weierstrass y se busca que el estudiante tenga un dominio, tanto analítico, como algebraico del concepto de límite, sin embargo, la mayoría de los estudiantes no tienen una adecuada imagen mental, que les permita comprender la definición. Por lo tanto, se puede conjeturar que el estudiante debe pasar por acercamientos numéricos y gráficos (de manera análoga como sucedió con el pensamiento de los matemáticos), que lo ayuden en el trabajo simbólico y analítico de la definición de límite de una función.

Se ha observado que algunos estudiantes que tomaron varios cursos de cálculo en el nivel universitario, aún no poseen una comprensión adecuada de la definición del límite de una función. Para mostrar esto, se trabajó con un grupo de estudiantes de una Licenciatura en Matemática, a estos alumnos se les enumeró del uno al ocho. La situación que se les planteó es que muestren que $\lim_{x\to 1} 3x - 1 = 2$, usando la definición formal.

A continuación se dan algunos ejemplos de las respuestas de estudiantes de licenciatura. Un estudiante presenta inconsistencia al tomar como solución un caso particular ($\varepsilon = 0{,}1 \; y \; \delta = 1/30$). Otro estudiante también recurre a un caso particular como solución ($\varepsilon = 0.3 \; y \; \delta = 0.15$). Algunos estudiantes parten de lo que quieren mostrar y su expresión simbólica no ilustra la definición de límite, recurren a métodos algebraicos para encontrar la relación entre ε y δ, no obstante, no pueden expresar su idea con claridad, ver Figura 1.

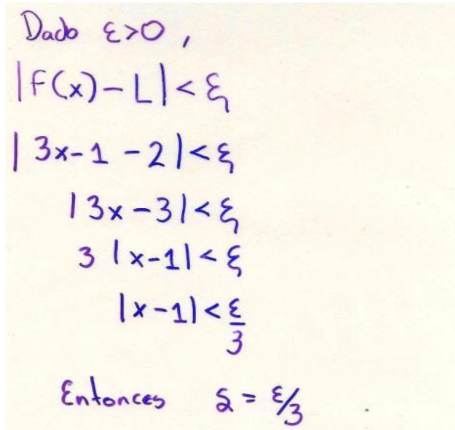
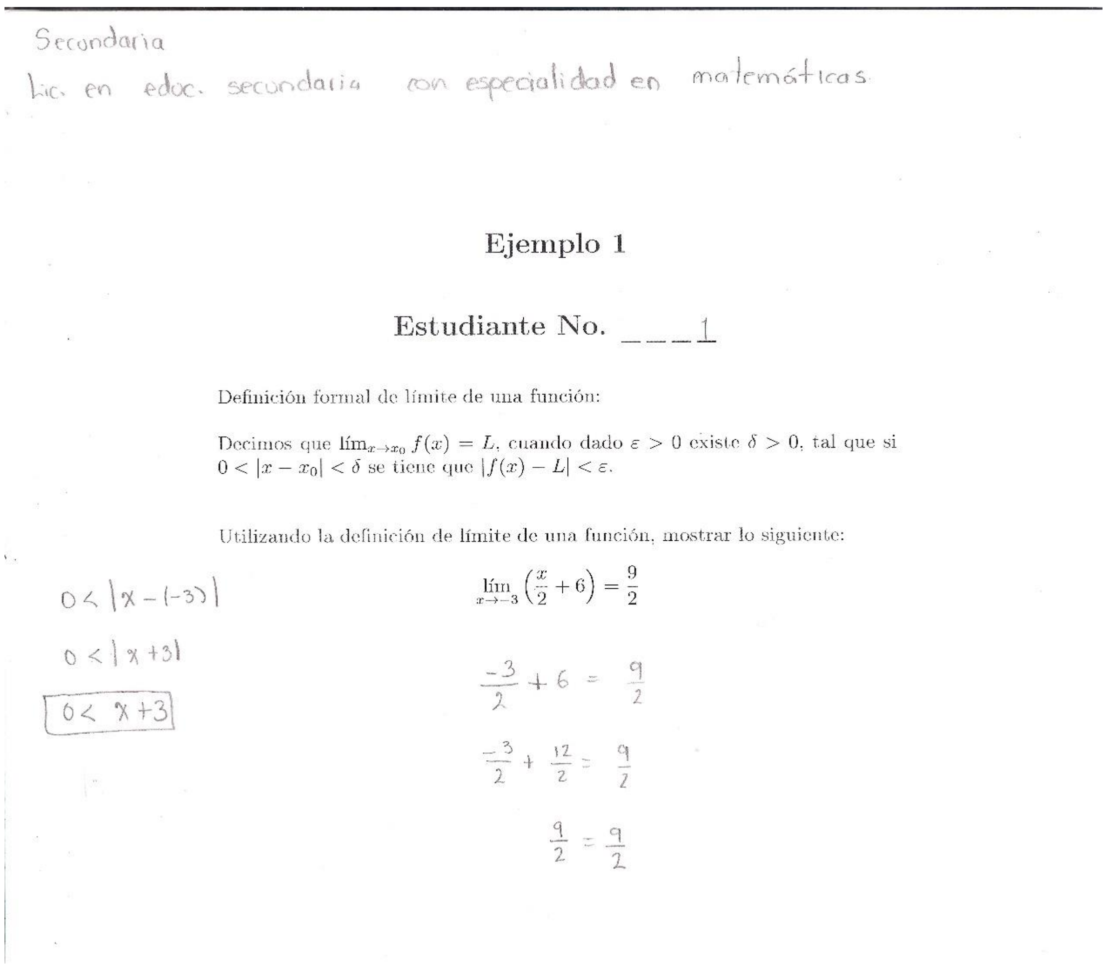



Figura1: Demostración realizada por un alumno de licenciatura

Una actividad similar se realizó con estudiantes de una maestría en Matemática Educativa. Los estudiantes eran profesores de Matemáticas, en activo, de los niveles de secundaria y bachillerato. La mayoría había tomado cursos de Cálculo. Se les indicó que usando la definición de límite de una función, probarán que $\lim_{x \to -3} \frac{x}{2} + 6 = \frac{9}{2}$. Algunos estudiantes sustituyeron el valor de -3 en la expresión, posiblemente recordando el cálculo de límites que hicieron en sus cursos, ver Figura 2. También se puede observar que no manejan, del todo, el concepto de valor absoluto, al eliminar las barras de valor absoluto y solo tomar los valores para los cuales $x + 3 > 0$.

Un estudiante realiza operaciones algebraicas y encuentra una relación para δ en término de $\varepsilon$, esta es: $\delta = 2\varepsilon - 3 > 0$. Sin embargo, el estudiante afirma que δ es positiva, lo cual no es necesariamente cierto. Más aún, no entendió que δ debe tender a cero, cuando ε tienda a cero, ver Figura 3.


Secundaria

Lic. en educ. secundaria con especialidad en matemáticas

**Ejemplo 1**

**Estudiante No.** ___1

Definición formal de límite de una función:

Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Utilizando la definición de límite de una función, mostrar lo siguiente:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{x}{2}+6\right) = \frac{9}{2}$$

$0 < |x-(-3)|$

$0 < |x+3|$

$\boxed{0 < x+3}$

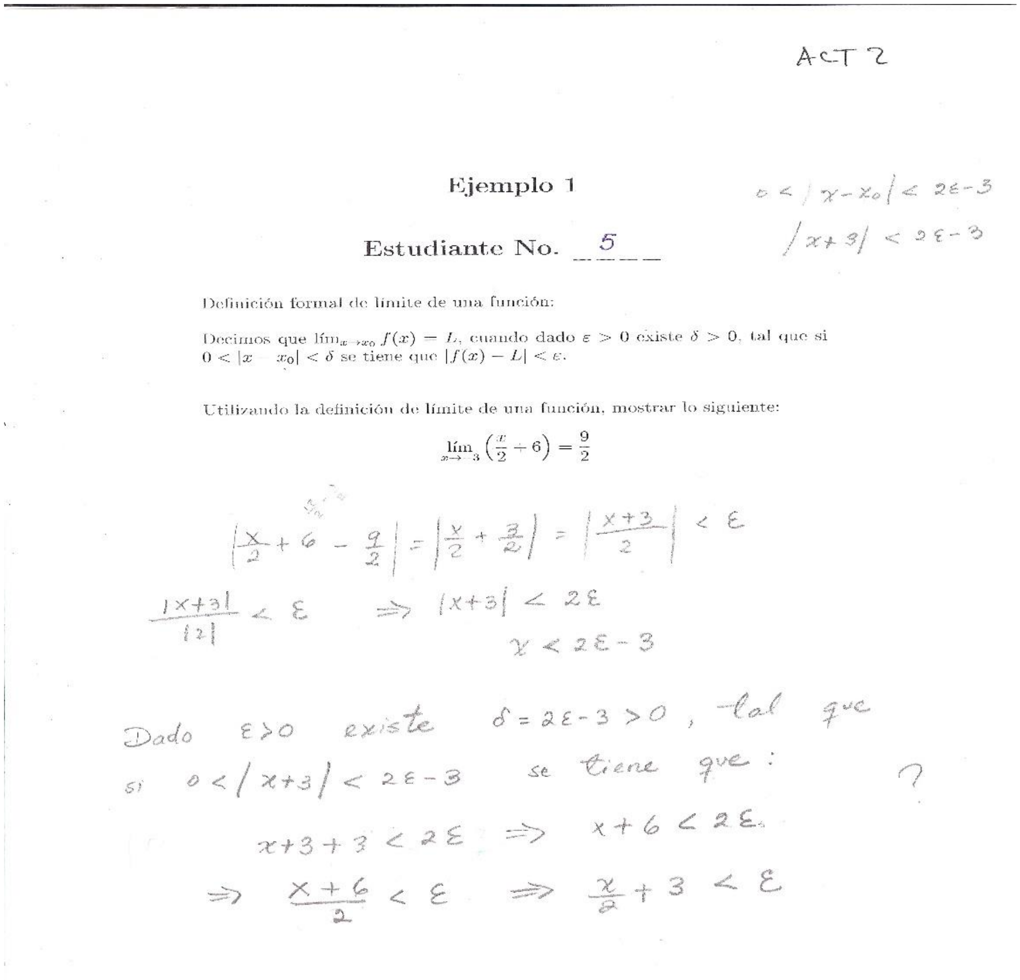
$\frac{-3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$

$\frac{-3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{9}{2}$

$\frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

Figura 2: Actividad Realizada por un estudiante de Maestría

Los ejemplos anteriores muestran, que aun cuando se han tomado varios cursos de cálculo, los estudiantes pueden no tener una comprensión adecuada de la definición de límite. También los ejemplos nos indican lo complicado que puede ser, tratar de mostrar que un límite existe, aunque sea para el caso concreto de una función lineal. Por lo tanto, surge la necesidad de establecer nuevos mecanismos de enseñanza-aprendizaje para el concepto de límite, donde el estudiante sea capaz de entrar en contacto con diferentes representaciones del concepto y así tener una mejor Imagen Conceptual de éste.



ACT 2

Ejemplo 1

$0 < |x - x_0| < 2\varepsilon - 3$

$|x+3| < 2\varepsilon - 3$

Estudiante No. 5

Definición formal de límite de una función:

Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Utilizando la definición de límite de una función, mostrar lo siguiente:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{x}{2}+6\right)=\frac{9}{2}$$

$$\left|\frac{x}{2}+6-\frac{9}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x+3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|x+3|}{|2|} < \varepsilon \Rightarrow |x+3| < 2\varepsilon$$

$$x < 2\varepsilon - 3$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = 2\varepsilon - 3 > 0$, tal que si $0 < |x+3| < 2\varepsilon - 3$ se tiene que: ?

$$x+3+3 < 2\varepsilon \Rightarrow x+6 < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{x+6}{2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{x}{2}+3 < \varepsilon$$

Figura 3: Actividad Realizada por un estudiante de Maestría

## 3. Marco Referencial

En el concepto de límite, Blazquez y Ortega (2001) consideran cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico, ellos realizan un estudio con alumnos entre 17-18 años sobre la noción de límite. En su trabajo hacen un análisis de libros de texto y diseñan un sistema de categorías apropiado, formulan como hipótesis que la utilización de diferentes registros mejora la comprensión del concepto de límite. Estos autores dan una nueva conceptualización de límite funcional e investigan el papel que ocupa en la enseñanza la representación de éste. Además, enfatizan que el aprendizaje del concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación (puede ser un registro de representación) y que el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje o permite que los alumnos se formen una representación interna más rica.

Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) comparan la conceptualización métrica de límite atribuida a Weierstrass, con la conceptualización como aproximación óptima. Ellos utilizan el marco teórico de Duval, en el cual se establece que para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación (lenguaje común, lenguaje aritmético, lenguaje algebraico, esquemas gráficos, etc.), pues con uno solo, no se obtiene la compresión integral del concepto.

Blazquez y Ortega (2001) mencionan en su escrito a Romero, para el que la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación. Estos autores consideran importante lo mencionado por Rico, indicando que son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la necesidad, de utilizar distintas representaciones de un mismo concepto para captar la complejidad del mismo. Esto es así, porque los sistemas de representación se complementan, muestran distintos aspectos del concepto o los mismos, con mayor o menor claridad, además de que todos ellos son limitados y necesitan de otros.

Blazquez y Ortega (2001), consideran que la noción de representación es necesaria para pensar y razonar sobre ideas matemáticas, para esto es necesario obtener representaciones internas de estas ideas y para comunicarlas se necesitan representaciones externas por medio de signos. De lo anterior podemos establecer que las representaciones internas se desarrollan al interiorizar las representaciones externas.

En Frawley (1999), se considera la acción situada, donde la mente se apoya directamente del mundo exterior y ésta escuela de pensamiento de la ciencia cognitiva se fundamenta en la teoría Vygotskyana, que considera que parte de ese apoyo es mediada por representaciones simbólicas, internas y sociales. Además, Frawley menciona que el pensamiento superior se obtiene mediante la interiorización de cualquier sistema simbólico, y considera que el habla es una herramienta para el pensamiento superior, donde el habla es un lenguaje para el pensamiento, no un lenguaje del pensamiento.

Si consideramos que el habla da lugar a proponer conjeturas, entonces la conjetura es una herramienta para el desarrollo del pensamiento superior. Por lo tanto, la conjetura puede desarrollarse en los estudiantes, en base al tratamiento de diferentes representaciones de un concepto, en particular, representaciones gráficas, numéricas y simbólicas.

El trabajo de Tall y Vinner (1981) ha influido notablemente en el estudio de la imagen conceptual o idea de los conceptos matemáticos. En su escrito reportan varias investigaciones que muestran que las imágenes conceptuales individuales que tienen los estudiantes difieren de la teoría formal y contienen factores que causan conflictos cognitivos. Su trabajo hace énfasis al concepto de límite y continuidad.

De acuerdo con Frawley (1999), en matemáticas los estudiantes necesitan estar en contacto con las representaciones simbólicas, por lo tanto, se deben diseñar actividades que acerquen a éstos al objeto de estudio. Lo anterior con base en que una actividad se puede analizar de acuerdo con los objetivos, razones y significados asociados por los estudiantes. Para este autor, la tecnología digital nos ayuda a tener diferentes representaciones de un concepto y estas pueden ser utilizadas para que los estudiantes dispongan de algunas herramientas que les permitan interiorizar la definición de límite. Más aún, una diversificación de las representaciones de un mismo objeto, aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos (a modo de ejemplo ver Duval, 1999; Contreras, Luque y Ordoñez, 2004).

Para Gutiérrez y Boero (2006), la tecnología puede ser usada para explorar, conjeturar y probar conjeturas, para validar una sentencia encontrada y para expresar la idea matemática de una manera formal. Además mencionan que el interés de la investigación y el centro de la enseñanza han empezado a enfatizar la construcción de sentido, más que la manipulación simbólica. Las maquinas por sí solas no pueden conjeturar, argumentar, razonar, probar o justificar los pasos, sin embargo, en un software de Geometría Dinámica, los estudiantes pueden construir figuras desde las más simples hasta las más complejas, con tan solo combinar objetos geométricos fundamentales, por ejemplo, puntos, ángulos, segmentos, círculos, planos, sólidos y transformaciones, crear expresiones al usar conceptos algebraicos fundamentales, como números, variables y operaciones.

Un software de Geometría Dinámica (SGD) es accesible para los usuarios y permite la conexión de la geometría con el álgebra a través de la medida de longitud, ángulos, área, volumen y adjuntar valores numéricos directamente a la figura, para usarlos en cálculos o en expresiones e interpretaciones algebraicas que permitan verificar la parte geométrica o comprobar conjeturas. También es fácil explorar propiedades de figuras manipulando sus elementos variables. Observar los efectos de transformaciones dinámicas como contraer o reducir y ampliar, además es posible conjeturar acerca de propiedades algebraicas o geométricas y verificar relaciones entre varias partes de la figura, todas estas características pueden ser consideradas como algunas herramientas de enseñanza-aprendizaje. En este trabajo mostraremos que es además posible conjeturar relaciones e intuir sobre definiciones y verificarlas, usando un SGD.

A su vez el maestro puede crear actividades que faciliten la introducción y entendimiento de nuevos conceptos en los alumnos, promover el descubrimiento de teoremas, en lugar de solamente mostrarlos y ayudar a modelar situaciones de la vida real o situaciones interdisciplinarias, entre otras cosas. Además, es posible presentar actividades a los estudiantes que les permitan manipular figuras, observarlas o visualizarlas (en el sentido de Zimmerman y Cunningham ,1991) y usarlas de guía, el software utilizado en esta investigación, permite una mejor valoración de la comprensión individual del estudiante, respecto a la definición formal de límite de una función.

## 4. Metodología

El objetivo de este trabajo es proponer una serie de actividades usando un SGD, que apoya en la comprensión de la definición de límite para funciones lineales, para esto, se consideran algunas representaciones del concepto de límite, las cuales apoyaran al estudiante a tener una mejor imagen y definición del concepto, dado que cada sistema de representación y distintos registros de representaciones identifican al objeto de estudio. Lo anterior, se puede lograr mediante la implementación de tres tipos de tareas, que toman como base la siguiente definición: el límite de una función $f(x)$ cuando $x$ tiende a $x_0$ es $L$, si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Por no manipular variables, es un trabajo no experimental descriptivo, las tareas se describen considerando las representaciones externas y se usa como técnica el análisis de tareas (ver Bisquerra, 1989). A la fecha, la observación se ha realizado con muestras casuales de estudiantes de licenciatura y maestros de Secundaria y Bachillerato, es decir, los sujetos son diferentes para contrastar los resultados. Los indicios encontrados apuntan a que las diferentes representaciones de la definición de límite hacen accesible su formalización.

El procedimiento consistió en la elaboración y aplicación de cinco actividades. De la actividad uno a la cuatro, se realizan tres tareas (A, B, C) y la actividad cinco incluye dos tareas (B y C). Inicialmente se elaboraron las tareas, luego se analizaron, describiendo e indicando las representaciones como requisitos significativos para la realización de las tareas.

A través del empleo de representaciones gráficas-numéricas (Tarea A), los sujetos, a través de preguntas, pueden conjeturar verbalmente y por escrito la definición de límite (Tarea B) e incluso hacer representaciones simbólicas-analíticas de la definición (Tarea C).

## 5. Actividades didácticas

Se elaboraron cuatro actividades en un software de Geometría Dinámica. En cada actividad se trazaron los ejes coordenados y la gráfica de una función lineal. Después, en el eje de las abscisas se localizó el número $x_0$. Trazando un segmento perpendicular al eje de las abscisas, que inicie en el punto ($x_0$,0) y que intersecte a la gráfica de la función lineal, se localizó en el eje de las ordenadas el posible límite de la función $y_0$= L).

En el punto (0, $y_0$) se traza una circunferencia de radio $\varepsilon$. Las coordenadas "y" de los puntos de intersección de esta circunferencia con el eje Y y se denotan por $y_1$ e $y_2$. Utilizando segmentos horizontales y verticales se encuentran las imágenes inversas de $y_1$ e $y_2$, bajo la función lineal. Estas imágenes inversas son denotadas por $x_1$ e $x_2$. Después se traza una circunferencia con centro en ($x_0$,0) radio $\delta = |x_1 - x_0|$ y también se observa que se cumple $\delta = |x_2 - x_0|$.

En la primera actividad se trabaja con $\lim_{x \to 6} x$. Se construye la Figura 4, junto con los estudiantes, se hace variar el segmento de longitud $\varepsilon$, ubicado en el eje de las ordenadas y se observa que el segmento de longitud $\delta$, ubicado en el eje de las abscisas también varía, más aún se constata numéricamente que $\delta = \varepsilon$. Los números $x_1$ y $x_2$ que corresponde a los extremos del segmento de longitud 2$\delta$, se asocian con los números $y_1, y_2$ respectivamente, que son los extremos del segmento de longitud 2$\varepsilon$. Cuando ε se aproxima a cero, tanto visualmente, como numéricamente, se observa que $\delta$, se aproxima a cero. Más aún, $x_1$ , $x_2$ se aproximan a $x_0$ que en este caso tiene el valor 6 y simultáneamente $y_1, y_2$ se aproximan a $y_0$ que también tiene el valor 6. Por lo tanto, en la Figura 4 se puede corroborar visual y numéricamente que el límite requerido es 6, con lo que se concluye la Tarea A.

En la Tarea B, con base en la Figura 4, los participantes conjeturan verbalmente y por escrito que el límite es igual a 6 y que el valor de $\delta$ es igual al valor de $\varepsilon$, esto es $\delta = \varepsilon$. La Tarea C se orienta a que el maestro muestra, subrayar y propone el uso de la representación algebraica-analítica de la definición formal de límite de una función.

A continuación se ilustra un procedimiento que se plantea a los participantes (por lo general, estudiantes de matemáticas) para mostrar que el $\lim_{x \to 6} x = 6$.

Dado ε > 0 tomemos δ = ε. Si 0 < | $x$ - 6 | < δ entonces |f($x$) – 6| = |$x$ – 6| < δ = ε.Para concluir la Tarea C, se pide que comuniquen con detalle el procedimiento anterior.

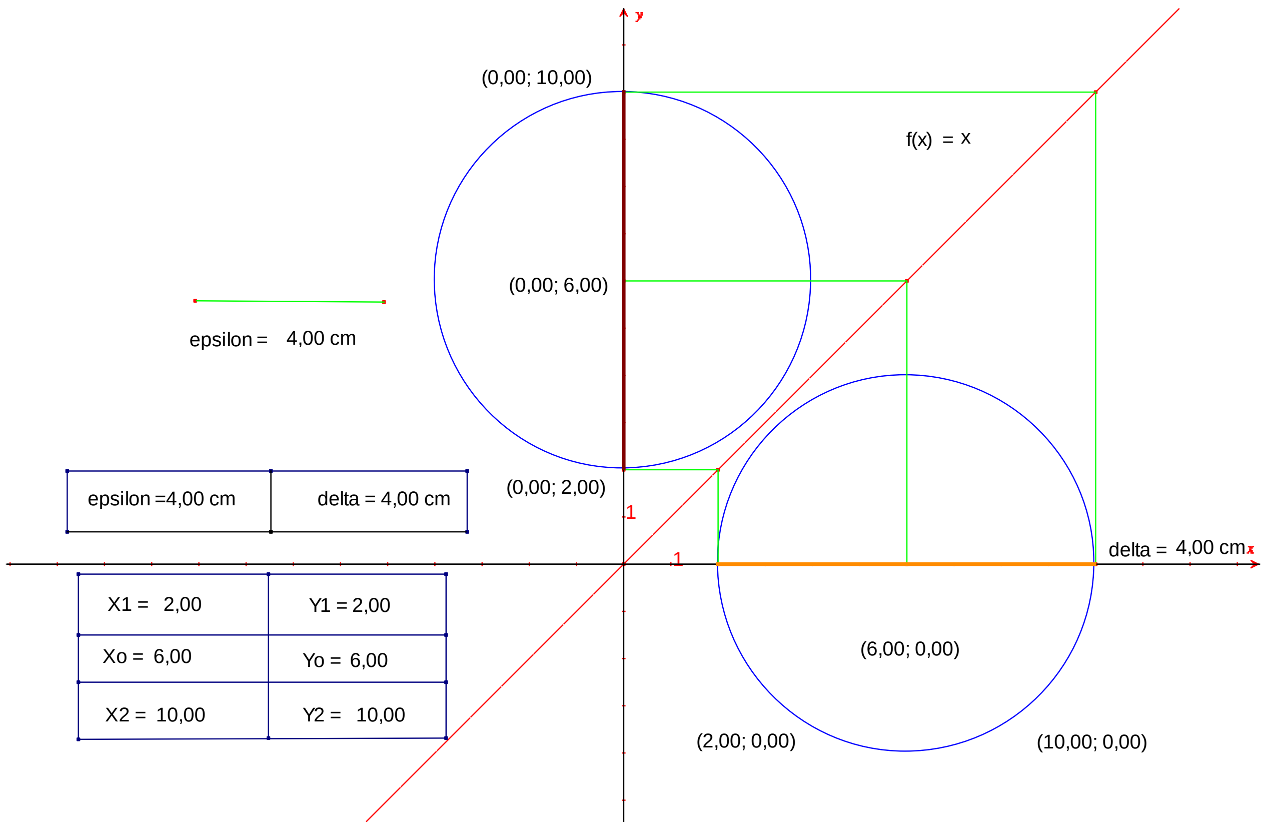



Figura 4: Primera Actividad

Las Actividad 2, 3 y 4 contempla las Tareas A, B y C con un procedimiento similar a la Actividad 1. En la Actividad 2 se trabaja con el $\lim_{x\to 3} 2x-1$, en la Tarea A, mediante la representación gráfica-numérica, los participantes conjeturan que el límite es 5, junto a la relación entre $\delta$ y $\varepsilon$, la cual es $\delta = \varepsilon/2$, con esto se cumple la Tarea B y nuevamente para cumplir con la Tarea C, el maestro muestra que el $\lim_{x\to 5} 2x-1=5$.

A su vez, en la Actividad 3 (ver Figura 5) se obtiene que el $\lim_{x\to -3} \frac{x}{2}+6=\frac{9}{2}$ y en este caso, los participantes conjeturan con ayuda del software que $\delta = 2\varepsilon$. Para cumplir con la Tarea C, el maestro pide a los participantes mostrar algebraicamente que $\lim_{x\to -3} \frac{x}{2}+6=\frac{9}{2}$ y proporciona retroalimentación simbólica sobre la Tarea C. Nuevamente para la Actividad 4 (ver Figura 6) se conjetura que $\delta = \varepsilon/4$ cuando el $\lim_{x\to 6} -4x+18=-6$. Nuevamente para realizar la Tarea C, el maestro pide que los participantes muestren $\lim_{x\to 6} -4x+18=-6$ y proporciona retroalimentación.

Finalmente, en la Actividad 5 se excluye la Tarea A y las Tareas B y C, plantean a los participantes que encuentren (sin SGD y sin ayuda del maestro), el $\lim_{x\to x_0} ax+b$, relacionando $\delta$ con $\varepsilon$, lo que requiere pasar al pensamiento abstracto, además corroborar que efectivamente el límite toma ese valor, usando la definición formal. Tomando como base las Actividades 1, 2, 3 y 4, los participantes pueden conjeturar que $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ junto con que el valor del límite es $ax_0 + b$, una manera de mostrar que la conjetura es válida es la siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, si $0 < | x - x_0 \ | < \delta$ entonces

$$|f(x) - (ax_0 + b)| = | ax + b - ax_0 - b | = | ax - ax_0 | = | a(x - x_0) |$$

$$= |a||x - x_0 | < |a|\delta = |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon. \text{ Por lo tanto}$$

$$\lim_{x \to x_0} ax + b = ax_0 + b.$$

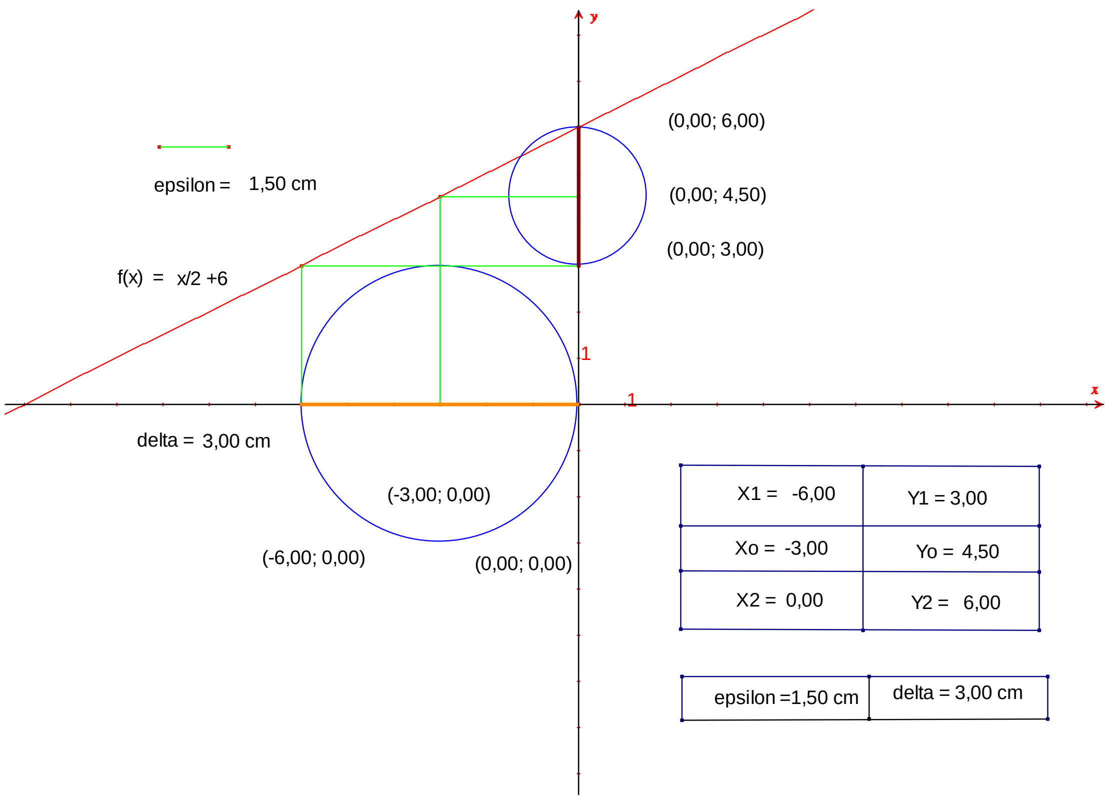



Figura 5: Tercera Actividad

Finalmente, mediante la experiencia descrita anteriormente, se muestran evidencias del cambio en las ideas sobre la definición e imagen del concepto, en la Figura 6 se muestra que el marco teórico proporciona pautas para observar el cambio cognitivo inicial y final de los participantes, tomando como ejemplo el estudiante 8, se observa que en la actividad 1 interpreta en la definición el valor absoluto únicamente como una distancia y posteriormente en la actividad 9 interpreta la definición de acuerdo a la visualización con uso del SGD considerando todos los valores posibles en los intervalos de longitud 2ε y 2δ que cumplen de forma simultánea con una relación entre ε y δ.

## 6. Conclusiones

Al trabajar con las actividades, algunos de los involucrados lograron conjeturar la relación entre ε y δ, para el caso de funciones lineales. Cabe aclarar, que los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, no logran determinar que $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, en lugar de esta expresión ellos conjeturan que: $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, es decir, ellos no comprenden que "a" puede ser negativo y entonces el δ no satisface la propiedad de ser positivo. Lo anterior posiblemente se debe a que estos estudiantes, no tienen los conocimientos suficientes de números reales y en particular del concepto de valor absoluto. El caso de las funciones no lineales, es una extensión natural de esta investigación, con respecto a las funciones cuadráticas, hemos realizado algunas pruebas para indagar las dificultades de la representación gráfica-numérica y han sido similares al caso lineal. Sin embargo, la representación algebraica-analítica es la que presenta mayor dificultad.

En este trabajo se analizaron descriptivamente actividades desde un punto de vista cognitivo-semiótico, donde se considera que las representaciones externas simbólicas apoyan a mejorar la definición e imagen del concepto en los estudiantes. Para las representaciones semióticas, se consideraron los sistemas gráfico-numérico y verbal-simbólico.

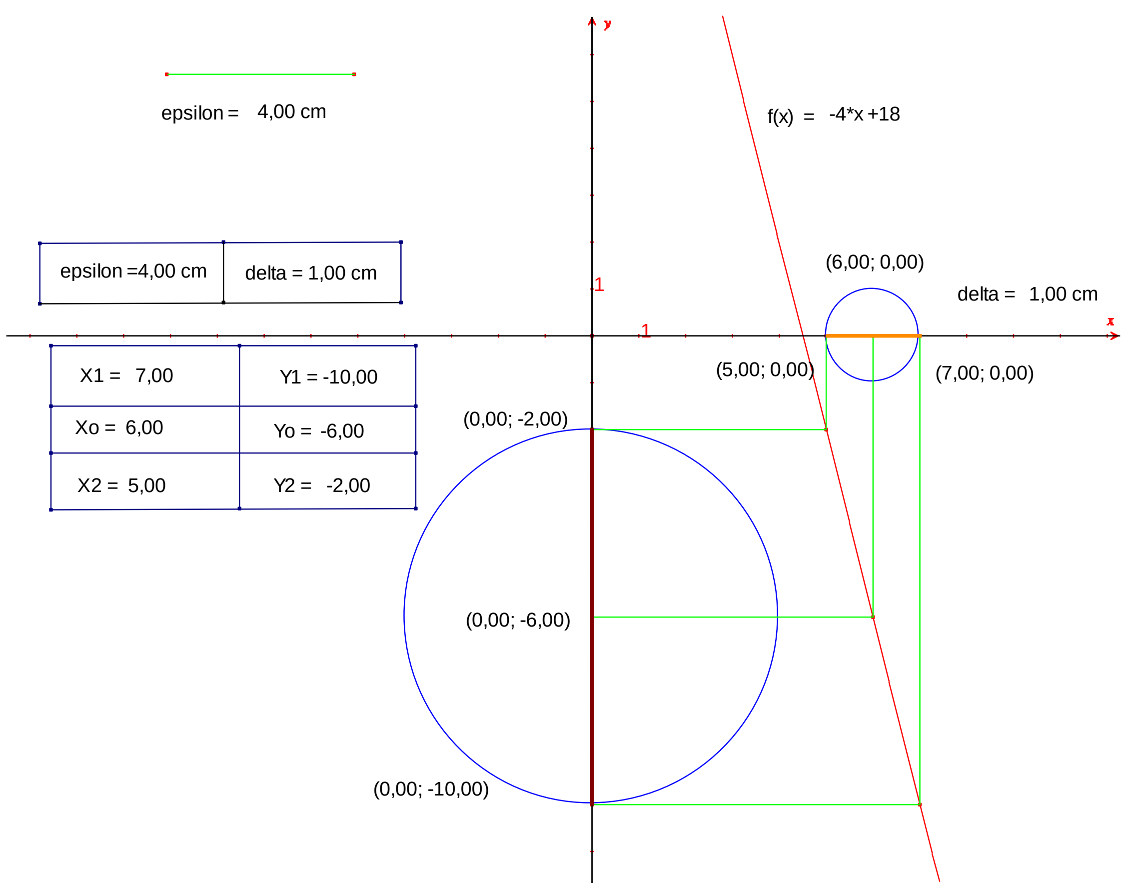



Figura 6: Cuarta Actividad

En el trabajo con los estudiantes se observó que la interpretación de la definición e imagen conceptual, se enriqueció favorablemente con las actividades realizadas. Las distintas representaciones inducidas por las actividades, fueron comprendidas de manera natural por los alumnos, con comentarios positivos a esta secuencia didáctica.

Las actividades propuestas en esta investigación son el inicio de la construcción de un instrumento que puede ayudar a mejorar la representación interna de la definición del límite de una función. Entre las varias aportaciones que las actividades ofrecen es que permiten una representación gráfica de los conjuntos de números reales, $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$;

Por último, este trabajo tiene extensiones naturales, por ejemplo, una vez que se ha establecido la relación de ε y δ, se puede inducir a los estudiantes a que reconozcan que existen una infinidad de δ, que satisfacen la definición. También las actividades tienen inmersos otros conceptos, como son continuidad y continuidad uniforme de funciones.

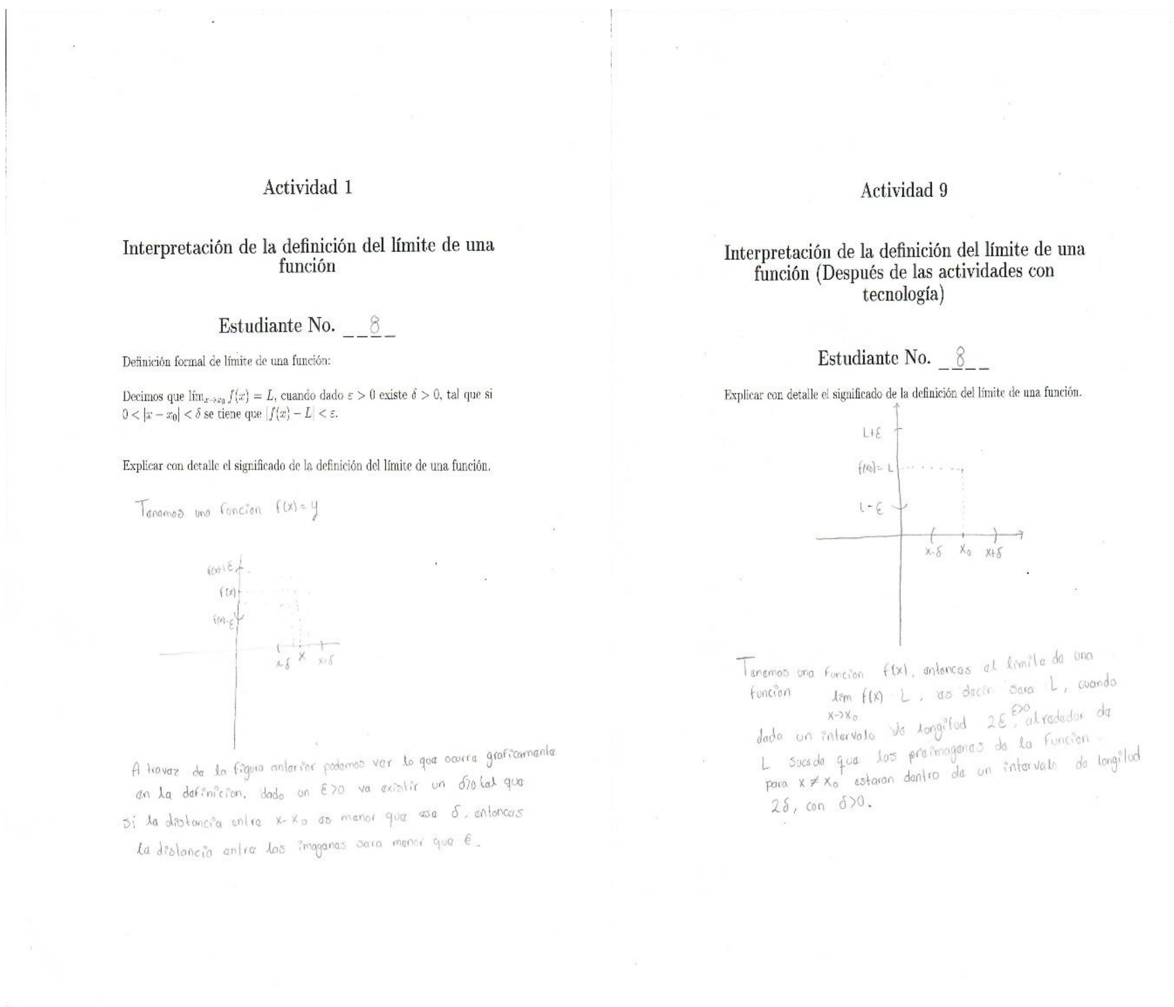



Figura 6: Cambio de interpretación de la definición e imagen conceptual

## Referencias Bibliograficas

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía práctica*. Barcelona: Ediciones CEAC.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2), 189-209.

Contreras, A., Luque, L. & Ordóñez, L. (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática*, *16*(1), 59-87.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática.* España: Alianza Editorial.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* España: Alianza Editorial.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento humano. Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Espinoza, L. & Azcárate, C. (2000). Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto de Límite: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(3), 355-368.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva.* Barcelona: Paidós.

Gutiérrez, A. & Boero, P., Eds. (2006) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* PME 1976-2006. Rotterdam: Sense Publishers.

Sierra, M., Gonzáles, M. & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias*, *17*(3), 463-476.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Zimmerman, W & Cunningham, S. (1991) Visualization in Teaching and Learning Mathematics,Washington, DC: Mathematical Association of America.