# REVISITANDO LA NOCIÓN DE FUNCIÓN REAL

**Carlos Armando Cuevas-Vallejo & François Pluvinage**
**DME, CINVESTAV-IPN, México & DME et IREM de Strasbourg. Université Louis Paster**
ccuevas@cinvestav.mx & fpluvinage@cinvestav.mx

*EL CÁLCULO Y SU ENSEÑANZA*
Volumen 13. julio-diciembre 2019. Cinvestav-IPN ©
Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 19–35.

**Resumen:** El concepto de función es uno de los conceptos matemáticos más estudiados y controvertidos desde la perspectiva histórica, epistemológica, educativa y matemática. En efecto, los reportes sobre el problema de adquisición por parte de los estudiantes son numerosos y frecuentes. Esto no debería parecer extraño, dado que este concepto, ha tenido siglos de anticipaciones y consecuentemente ha tenido en su desarrollo varias definiciones que amplían las versiones precedentes e incluso se considera que su definición se encuentra aún en evolución. En este artículo presentamos una propuesta didáctica para introducir el concepto de función, haciendo una analogía con los conocimientos básicos de alfabetización y de los principios básicos de una propuesta didáctica proponemos actividades que consideramos ayudarán a promover una mejor comprensión.

**Palabras clave:** Función, didáctica, pensamiento funcional, habilidades matemáticas fundamentales.

**Abstract:** The concept of function is one of the most studied and controversial mathematical concepts from the historical, epistemological, educational and mathematical perspectives. Indeed, reports on the problem of student acquisition are numerous and frequent. This should not seem strange, given that this concept has had centuries of anticipations and consequently has had in its development several definitions that extend the previous versions and it is even considered that its definition is still in evolution. In this article we present a didactic proposal to introduce the concept of function, making an analogy with the basic knowledge of literacy and of the basic principles of a didactic proposal we propose, activities that we consider will help to promote a better understanding.

**Keywords:** Function, didactics, functional thinking, fundamental mathematical skills.

**Introducción:**

Posiblemente el concepto matemático más estudiado y del cual se cuenta con innumerables tesis de licenciatura, maestría y doctorado, así como una cantidad considerable y recurrente en las diversas revistas de investigación científica en el ramo educativo es el concepto de *función*. Y no es para menos, el objeto función es el que modela fenómenos procesos en todas las ciencias naturales, económicas y sociales (Spivak, 1967; Kjeldsen y Lützn 2015; Blanco et.al., 2014). Es, sin duda alguna, el concepto matemático más utilizado por todas las ciencias, pero además ha sido impulso e impedimento para el propio desarrollo de la matemática. Por ejemplo, el concepto de función fue un impulso para el desarrollo del análisis matemático, pero a la vez fue un impedimento, por su controversial definición, para el desarrollo del cálculo.

> "La filosofía está escrita en ese libro enorme que tenemos continuamente abierto delante de nuestros ojos (hablo del universo), pero que no puede entenderse si no aprendemos primero a comprender la lengua y a conocer los caracteres con que se ha escrito. Está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin los cuales es humanamente imposible entender una palabra; sin ellos se deambula en vano por un laberinto oscuro" (Calvino, I., 2009, citando a Galileo).

Y en efecto, Galileo Galilei (1981) estableció el indisoluble vínculo entre las ciencias naturales y la matemática, e indudablemente la modelización matemática de los fenómenos naturales, mediante el concepto de función, contribuyó a desvelar muchos de los misterios de la misma naturaleza.

El no tener una aceptable comprensión de este concepto, no solo impide la comprensión del algebra, cálculo y demás ramas de la matemática, sino que además es un serio impedimento para la comprensión de los hechos propios de las diversas ciencias.

En efecto, Sierpinska (1992) y Sfard (1989), reportan que los libros de texto de álgebra y cálculo utilizados en las escuelas y universidades ofrecen diferentes versiones del concepto de función que generalmente dan origen a interpretaciones que dejan de lado características importantes del concepto.

También Nicholas (1966), Norman (1992), Goldenberg (1988) y otros, han hecho investigaciones acerca de las dificultades y errores que presentan los estudiantes con el uso de las diferentes versiones de la definición de función. Incluso existen evidencias de que la familiaridad con un aspecto de la función interfiere con el desarrollo y comprensión de otros, (véase Selden; 1992; Dubinsky y Harel, 1992; Norman, 1992).

Al modelar desde su aparición diversos fenómenos de las ciencias naturales y sociales el estudio de las funciones tuvo que ver con el estudio de ciencias ajenas a la matemática misma y su desarrollo a partir de nociones vagas e inexactas ha sido gradual (Monna, (1972)). Incluso Kleiner (1989) afirma que este concepto, continua en evolución. Podemos sintetizar el proceso de evolución del concepto de función, y constatar cómo se ha ido reformulando en el tiempo (Rüting, 1984). El concepto de función se remonta hasta más de 4000 años de nuestra era, aunque de ellos 3700 fueron solo de anticipaciones, sin una definición de esta y esto adquiere relevancia a partir del surgimiento del análisis matemático; esto es, desde hace 300 años aproximadamente (Kleiner, 1989).

**El lugar de las funciones en los estudios didácticos**

Podría uno preguntarse ¿cuál será la cultura básica de matemáticas? Una cultura que le permita a un individuo interactuar aceptablemente en nuestra sociedad actual. Esta misma pregunta se podría reformular estableciendo ¿Cuál será el pensamiento matemático básico que le permita a un individuo interpretar nuestro medio? Estableciendo un paralelismo con la alfabetización necesaria para comunicarse en cualquier sociedad estableceremos lo siguiente.

**Habilidades matemáticas fundamentales y habilidades esperadas por la sociedad**

La palabra inglesa *literacy* se refiere a la habilidad de leer y escribir la lengua común. Éste era un importante objetivo de la escuela, aún antes de la generalización de la educación escolarizada para todos los niños. Otro objetivo, era el aprendizaje del conteo y de las operaciones aritméticas. Hoy día, la escuela es más ambiciosa. En el caso de las matemáticas podemos distinguir varias habilidades que en una asignación libre se pueden designar por palabras construidas a partir del modelo *literacy*:

*numeracy*, *rationacy*, *algebracy* y *funcionacy*

La primera, numeracy, corresponde al objetivo ya descrito; conocimiento de los números y operaciones usuales.

La segunda, rationacy se refiere también a un conocimiento numérico, aunque más avanzado; a partir de concepciones meramente multiplicativas, contiene las proporciones y el manejo de fracciones; incluye también conocimiento de magnitudes y elementos de razonamiento lógico.

La tercera algebracy es la que aparece en particular en los estudios de Filloy, Puig y Rojano (1984, 2008), con la consideración de sistemas matemáticos de signos (SMS); abarca resolución de ecuaciones y manejo de expresiones que incluyen variables y/o parámetros.

La última en la lista corresponde a un conocimiento funcional o lo que llamaremos la construcción de un pensamiento funcional, es decir, una actividad cognitiva, una etapa del desarrollo del pensamiento matemático que permite establecer relaciones de dependencia funcional, más allá de las relaciones aritméticas y algebraicas que pueden ser aplicadas a diversos contextos. Aún más, se considera que para poder interactuar en el mundo actual y poder desarrollarse en cualquiera de las diversas disciplinas o ciencias tanto básicas, naturales como sociales, se requiere de un pensamiento funcional (Pluvinage y Cuevas, 2006), que describiremos más adelante.

Nos parece interesante destacar dos características de la lista propuesta:

- el orden de presentación de las habilidades en la lista sugiere “casi” un orden de adquisición,
- la adquisición generalizada de las habilidades que están en la lista después de *numeracy* son propuestas a discutir.

En cuanto a la primera característica, podemos asegurar que *rationacy* y *algebracy* suceden evidentemente a *numeracy*. Los estudiantes, que K. Hart (1985) llama *adders* tienen un manejo muy eficiente del conteo y de las operaciones aritméticas, pero sólo en la suma (una multiplicación es para ellos una suma repetida, y algo como la obtención del área de un triángulo les parece misterioso). Sin embargo, a pesar de que hay vínculos entre el manejo de fracciones y proporciones y el uso de escrituras algebraicas, existe también cierta independencia, de ahí que se halla utilizado la palabra “casi”. El concepto de función sucede claramente a los anteriores y se refiere a variaciones, entre las que, por supuesto, se encuentran todas las que provienen de proporcionalidad.

Con respecto a la segunda característica, podemos observar que casi todos los documentos oficiales, tales como textos de leyes, se apoyan sobre un conocimiento que no sobrepasa *numeracy*, aun en casos en los que la información se podría simplificar notablemente con el uso de expresiones matemáticas. En un caso tan sencillo, como una situación de proporcionalidad, la expresión meramente verbal puede parecer algo verdaderamente complejo. Por ejemplo, esta situación se presenta en un artículo de la ley vigente en México sobre mejoras de infraestructura hidráulica.

**Cámara de Diputados del**
**H. Congreso de la Unión**

*LEY DE CONTRIBUCIÓN DE MEJORAS POR OBRAS PÚBLICAS Y FEDERALES DE INFRAESTRUCTURA HIDRÁULICA*

Nueva Ley D.O.F. 26/12/1990

...Artículo 7 – II

Tratándose de acueductos o sistemas de suministro de agua en bloque realizados exclusivamente con inversión federal, el monto de la contribución obtenida en el artículo anterior se dividirá entre la capacidad de suministro del sistema, medida en metros cúbicos por segundo, y el cociente obtenido se multiplicará por el volumen asignado o concesionado por la Comisión Nacional del Agua a cada usuario del sistema, medido en metros cúbicos por segundo y el resultado será el monto de la contribución a cargo de cada contribuyente.

De una cuidadosa lectura del artículo se desprende algo finalmente muy sencillo:

A partir de una contribución total T, se define la contribución unitaria en $m^3/seg$. Así $t = T/c$, donde $c$ es la capacidad de suministro del sistema. Luego, si el consumo asignado a un usuario es de $x\ m^3/seg$, el monto de su contribución será igual a $xt$.

Observamos que, a pesar de un claro esfuerzo de precisión, el texto de la ley contiene una inexactitud desde el punto de vista de las magnitudes. El texto se refiere a un volumen y la unidad de medición que le asigna es el metro cúbico por segundo. Hemos elegido un ejemplo sencillo, pero el lector interesado podrá constatar casos semejantes en que al verbalizar relaciones numéricas se encuentran situaciones verdaderamente complejas. Lo que nos interesa señalar es que en un texto de ley se definen todas las operaciones aritméticas necesarias y se evita el empleo de variables denotadas por letras. Es por eso que mencionamos que los textos de leyes se apoyan sobre un conocimiento que no sobrepasa al nivel matemático *numeracy*.

Esta es una de las razones por lo que nos parece que la educación elemental actual debería permitir a los estudiantes, ir más allá de este primer nivel matemático, e impulsar a que la sociedad alcance los niveles de *racionacy* y *algebracy*. Es probable que un nivel funcional sobrepase la instrucción general, a excepción del caso de las funciones lineales y cuadráticas. Luego entonces, consideraremos que el nivel funcional en una extensión más completa se dirige a estudiantes de nivel medio superior en adelante.

**Diferencias en las definiciones de función y subconceptos relacionados**

Las funciones son objetos que los matemáticos se vieron en la necesidad de estudiar por razones externas e internas a la matemática. Esto es, al modelar desde su aparición diversos fenómenos físicos y sociales el estudio de las funciones tiene que ver con el estudio de ciencias ajenas a la matemática misma y su desarrollo a partir de nociones vagas e inexactas ha sido gradual (Monna, (1972)) e incluso Kleiner, (1989) afirma que éste continua en evolución. El concepto de función, al no ser un objeto matemático “puro” se ha ido reformulando en el tiempo (Rüting, 1984), lo cual ha provocado agrias discusiones entre

matemáticos ilustres. Dos son las más notables que se conocen como “la controversia de la cuerda vibrante” y la “controversia alrededor de 1900” (Kleiner, 1989; Monna, 1972; Youschkevitch, 1976). Además, diversos estudios muestran que es probable este concepto presente obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1992). Podríamos suponer que las dificultades se han resuelto con la reflexión general sobre los fundamentos de las matemáticas, pero los reportes indican que en realidad los conceptos funcionales siguen sin estar claramente definidos. En efecto, Sierpinska (1992) y Sfard (1989), reportan que los libros de texto de álgebra y cálculo utilizados en las escuelas y universidades ofrecen diferentes versiones del concepto de función que generalmente dan origen a interpretaciones que dejan de lado características importantes del concepto. Por su parte Hitt (1988), Nicholas (1966), Norman (1992), y Goldenberg (1988), por mencionar algunos, han hecho investigaciones acerca de las dificultades y errores que presentan los estudiantes con el uso de las diferentes versiones de la definición de función.
Para confirmar lo anterior, en este artículo, nos limitaremos a considerar tres conceptos: *función*, *función real*, y *continuidad*. Del estudio realizado, podemos decir que en general se encuentran dos tipos de acercamientos en los libros de texto y documentos en línea. O bien un texto se limita a introducir funciones cuyo dominio es una parte de los números reales y considera problemas de límite y continuidad para funciones definidas sobre intervalos. Este último nos parece correcto y fácilmente entendible, aunque la contraparte es que el concepto general de función tendrá que ser definido posteriormente. O bien un campo de definiciones intenta abarcar todos los casos posibles, y resulta insuficiente o incorrecto, o bien resulta demasiado avanzado para un nivel elemental.

Mostraremos a manera de comprobar lo anterior la siguiente experiencia.

Si se deseara determinar las propiedades de la función definida por $f(x) = 1 + \sqrt{cos(2\pi x) - 1}$. Un breve examen de la función basta para convencernos de que, en los números reales, la fórmula expresada en $f(x)$ sólo tiene sentido para los números enteros, y que $f(x)$ toma el valor 1 en cada entero. Entonces $f(x)$ es una función discreta, de tal manera que no se tiene sentido plantear el problema de su continuidad. Por otra parte, si se consultan, en textos de amplia difusión, las definiciones para funciones reales y continuidad para investigar las propiedades de esta función, encontraremos lo siguiente.

> Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un elemento del mismo conjunto o de otro. Una función real es la que asigna a cada número real, de cierto conjunto de números, otro número real (Bers, 1978)

En la red Internet, el sitio Mathworld (en inglés) es generalmente considerado una buena referencia, por correcta y constantemente actualizada. Para las funciones encontramos

> Several notations are commonly used to represent (non-multivalued) functions. The most rigorous notation is $f: x \to f(x)$, which specifies that $f$ is function acting upon a single number $x$ (i.e., $f$ is a univariate, or one-variable, function) and returning a value $f(x)$. To be even more precise, a notation like “$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where $f(x) = x^2$” is sometimes used to explicitly specify the domain and codomain of the function. The slightly different "maps to" notation $f: x \mapsto f(x)$ is sometimes also used when the function is explicitly considered as a "map.

en este sitio o como en otros de prestigio se considera que función y aplicación (map o mapping) son palabras sinónimas. Con respecto a función real se encuentra que

> A function whose range is in the real numbers is said to be a real function, also called a real-valued function.

Según Mathworld, tenemos que considerar en nuestro ejemplo que $f(x)$ es una función real, porque su rango es un subconjunto de los reales. Con respecto a la continuidad en Mathworld, encontramos que la definición consiste en escribir que $f(x)$ es continua en $x_0$ si tiene a $f(x_0)$ como límite y el límite se define como:

> In this formalism, a limit $c$ of function $f(x)$ as $x$ approaches a point $x_0$, is defined when, given any $\varepsilon > 0$, a $\delta > 0$ can be found such that for every $x$ in some domain $D$ and within the neighborhood of $x_0$ of radius $\delta$ (except possibly $x_0$ itself), $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en todo punto de su dominio, porque $f$ cumple con la definición dada de la continuidad en un punto $x_0$ del dominio de $f,$ y esta última condición expresada en $(\varepsilon, \delta)$ usa sólo un cuantificador universal para $x$. Dado que en nuestro caso la desigualdad se verifica con la elección de $\delta = 0.5$, podemos asegurar que $f(x)$ tiene a 1 como límite en todo punto de su dominio.

Ahora bien, se puede suponer que algo escapo a Eric Weisstein, autor del sitio con ayuda de la *National Science Foundation*, debido a su interés en matemáticas más avanzadas. Consultamos ahora la enciclopedia universal multilingüe Wikipedia, en sus versiones española, inglesa, y francesa. Para las matemáticas, esta enciclopedia es un poco menos avanzada que Mathworld, pero está bien documentada y generalmente correcta. Un título, en la versión en español, nos llamó la atención, "funciones reales y discretas".

> **Funciones reales y discretas.** Si el dominio de una función es un intervalo de la recta real la función se denominará *real*. En cambio, si la función está definida para los números enteros se denominará *función discreta*. Un ejemplo de una *función discreta* son las sucesiones.

Como se puede ver, esta definición no es del todo correcta, porque una sucesión no tiene a los enteros como dominio, sino sólo los naturales. En rigor, nuestra función $f(x)$ no se podría denominar función discreta en el sentido de este texto. Además de acuerdo con esta definición la función $z(x) = \frac{1}{x}$, que tiene como dominio los reales excepto cero, no sería una función real. La penúltima oración impide por ejemplo que una función no definida en cero sea discreta. Además, la última oración es incorrecta, desde el punto de vista gramatical (singular: un ejemplo, y plural: las sucesiones). Por otra parte, usualmente en matemáticas una sucesión se define como una función cuyo dominio es una parte infinita de los números naturales (y no un dominio de todos los enteros). Nuestra función $f(x)$ se puede denominar función discreta en el sentido de este texto.

En el texto francés de la misma enciclopedia se introduce la idea de *correspondencia funcional*, en la que un elemento del dominio tiene 0 o una imagen. Además, se introduce una distinción entre el conjunto de definición de una función y su dominio.

> Formellement, une **fonction** $f$ d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est une *correspondance* ou *relation fonctionnelle*; c'est donc un *triplet* $(E,\ F, G)$ où $G$ est un sous-ensemble de $E\ \mathcal{X}_F$ dans lequel chaque élément de $E$ n'apparait au plus qu'une fois.
>
> - $E$ est l' **ensemble de départ** de $f$;
> - $F$ est l' **ensemble d'arrivée** de $f$;
>
> et $G$ est le **graphe** de $f$; $G$ est noté parfois «$G_f$» ou «$G(f)$» pour préciser de quelle fonction on parle.

Con respecto a la continuidad, si consideramos el texto español de Wikipedia, la definición de la continuidad se cumple en el caso de $f(x) = 1 + \sqrt{cos(2\pi x) - 1}$ lo que nos conduciría a concluir que la función que consideramos es una función discreta continua. Al contrario, en el texto francés, no se cumple porque la noción de límite en un punto supone que este punto sea un punto de acumulación del dominio. Es decir, esto nos conduciría a concluir que la función que consideramos no es una función continua.

Para resumir, podemos decir que en general se encuentran dos tipos de acercamientos en los libros de texto y documentos en línea. O bien un campo de definiciones intenta abarcar todos los casos posibles, de tal forma que a veces resulta insuficiente o incorrecto (situaciones presentadas por MathWorld o Wikipedia español), además de que aparece demasiado avanzado para un nivel elemental (caso de Wikipedia francés, que toma como prerrequisito la noción topológica de punto de acumulación). O bien un texto se limita a introducir funciones cuyo dominio es una parte de los números reales y considera problemas de límite y continuidad para funciones definidas sobre intervalos. Este último nos parece correcto y fácilmente entendible, aunque la contraparte es que el concepto general de función tendrá que ser definido posteriormente.

Nuestra elección personal, abierta a discusión, será entonces proponer una definición de función real como una aplicación de una parte de la recta real a los números reales. Esta definición será suficiente para la introducción de límites y continuidad, en este sentido consideramos a las funciones definidas sobre intervalos como suficiente. Sin embargo, como una función real se define como una asociación entre números reales, queda una cuestión. ¿Cómo introducir los números reales? De acuerdo con la teoría de los registros semióticos, se requieren cuando menos dos representaciones distintas para un objeto matemático. Entonces para los números reales a un nivel elemental, proponemos su presentación en los siguientes dos registros:

- Como la abscisa de un punto en una recta graduada,

- Como un desarrollo decimal, eventualmente ilimitado.

La doble representación propuesta nos permite admitir equivalencias de la forma: 0.999... = 1, sin necesitad de presentar una prueba formal completa. La definición por sucesiones de Cauchy o cortaduras de Dedekind se podrá considerar en fases de aprendizaje ulteriores.

Todo lo anterior se reduce a la elección de las bases matemáticas convenientes para la enseñanza de las funciones, y ciertamente este es un aspecto esencial del tema, pero deja abiertos todos los aspectos meramente didácticos. Estos aspectos se consideran a continuación.

**Investigaciones didácticas sobre el concepto de función o temas relacionados**

Existen numerosos artículos tanto a nivel interno del Departamento de Matemática Educativa (DME) como en el ámbito internacional, incluso esta información crece día a día. Así que el intentar hacer un resumen de todos ellos por razones de espacio no sería posible. Además, de que, por su continua producción, el estudio quedaría incompleto. Como muestra de ello anotamos los resultados de un breve estudio, sobre la producción científica-académica alrededor del concepto de función en el DME, tomaremos para ello el período del 2000-2004. En esta etapa se han publicado en revistas y congresos internacionales 32 artículos, se han publicado en editoriales de prestigio 2 libros con tema y título de función, se han financiado 2 proyectos internacionales con apoyo de los gobiernos, para el estudio de problemas de aprendizaje con funciones, se han elaborado 10 tesis de maestría relacionadas directamente con el concepto de función, 2 tesis de doctorado y un reporte de posdoctorado. Cabe mencionar que el DME inicia oficialmente sus actividades en el año de 1974 y este resultado es sólo de los últimos cuatro años de los 30 de existencia. Los aspectos que tocan estas publicaciones son, como ya se ha señalado dentro de marcos teóricos como la epistemología, las ciencias de la cognición, y la computación. Experiencias didácticas con y sin apoyo de tecnología, estudios detallados sobre aspectos matemáticos de las funciones elementales, e incluso estudios del desarrollo histórico. Esto muestra la preocupación en el DME, que por cierto comparten en otras latitudes, por los problemas en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función. Esto muestra además que la producción internacional sobre este tema es de verdaderamente abrumadora.

**Hacia escenarios didácticos de aprendizaje de las funciones**

*Aprendizajes participativos*

El estudio de lo que la sociedad requiere y que la comunidad científica y educativa (la *noosfera*) desea ha permitido precisar objetos y progresos en la enseñanza. Esto se ha realizado tomando en cuenta aspectos cognitivos. Dada la enorme complejidad del concepto de función, evidentemente éste es un concepto que tendría que ser enseñado y aprendido en aproximaciones sucesivas. Para las funciones reales proponemos de inicio el estudio de las funciones de grado 1 y 2 de variable real (lineales y cuadráticas) como un estudio que debería ser de interés para todo estudiante, cualquiera que sea su especialidad. El siguiente estudio corresponde a un aprendizaje más avanzado y será el estudio de las funciones reales; finalmente para un aprendizaje especializado el estudio de las funciones en general. Es importante también pensar en el diseño de actividades matemáticas. Las actividades determinan situaciones que juegan un papel meramente matemático, puesto que situaciones-problémicas se sitúan en el centro del pensamiento matemático, pero también es importante el aspecto didáctico de las actividades a proponer. Por ejemplo, Brousseau (1997) sostiene en su teoría de las situaciones, dos aspectos didácticos sumamente importantes: la implicación que las situaciones tienen sobre la naturaleza de los intercambios entre docente y estudiantes (reemplazar el solo "yo aclaro y tu aplicas" por una ayuda a la resolución y debates científicos), y la posible riqueza de la producción estudiantil que permite analizar dificultades y avances. En artículos anteriores (Cuevas y Pluvinage (2003) y (2005)), presentamos el beneficio de conducir una enseñanza en forma sistematizada mediante proyectos de acción prácticos y su aplicación a un aprendizaje funcional. Nos proponemos ahora examinar condiciones para la elección de situaciones que tengan un interés en la enseñanza del cálculo.

**Competencias**

Es preciso considerar, en primer lugar, las competencias que deseamos que los estudiantes adquieran. Los objetos matemáticos para utilizar son:

- un valor numérico, exacto o aproximado,
- una pareja de valores numéricos,
- un intervalo, que puede ser ilimitado,
- una variable, una pareja de variables,
- funciones elementales: algebraicas (polinómicas, racionales y radicales),
- funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales,
- una función en general.

Para la presentación de funciones se utilizarán fundamentalmente cuatro registros semióticos: las tablas numéricas, las representaciones gráficas, las teclas de calculadora o programas de cálculo, y las fórmulas explicitas. Los tratamientos generales que se aplicaran a estos objetos son: las operaciones numéricas (suma, producto, resta, división, raíces), la comparación, la sustitución. También es necesario recordar que muchas funciones se manipulan mediante representaciones parciales. Por ejemplo, una gráfica se presenta dentro de un marco limitado. Además, algunos tratamientos son más o menos específicos de un registro: por ejemplo, una trasformación geométrica cambia una curva en otra, o una fórmula de cambio de variable define una nueva función.

Evidentemente dada la extensión del concepto de función, éste es un concepto que tendría que ser enseñado y aprendido año por año en aproximaciones sucesivas. Para las funciones reales proponemos iniciar con el estudio de las funciones lineales, después se puede realizar un primer acercamiento a las funciones reales a partir de observaciones o experimentos. Esto conduciría a considerar diversas maneras de representar una función real. Dentro de la categoría de las tablas numéricas se introducen diferencias entre tablas completas (p. Ej. Tabla de tarifas de envío por correo; los precios según el peso), tablas de valores, con una precisión determinada (p. Ej. Tablas trigonométricas), y tablas de datos, con una precisión en muchos casos desconocida (depende de los aparatos de medición y de la actuación de operadores). En etapas de aprendizaje posteriores, será importante no olvidar el recurso de los diversos registros. Invitamos al lector a estudiar el ejercicio siguiente, para darse cuenta (auto-observación) de lo que moviliza su resolución. Una sugerencia de tratamiento de este ejercicio en caso de dudas es el uso de una hoja de cálculo, con el recurso de una representación gráfica.

**Ejercicio**

La tabla 2 construida por un estudiante nos presenta los valores de dos polinomios P($x$) y Q($x$) de grado 2. Al revisarla se advierte que cada renglón contiene un error. Encuentra el error, en cada renglón.

| $X$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| P($x$) | 5 | 6 | 3 | -4 | 15 |
| Q($x$) | 16 | 0 | -10 | 0 | -12 |

**Principios y elementos para el diseño de escenarios didácticos**

Es posible apoyarse en el conocimiento adquirido en torno a conceptos relacionados con las funciones reales, para pasar a estudios de tipo exploratorio que deriven a un acercamiento didáctico más completo. Se trataría de considerar por un lado las diversas etapas de adquisiciones para estudiantes de orientación fisicomatemática, abarcando el cálculo y el análisis matemático hasta las ecuaciones diferenciales, y por otro lado los aprendizajes útiles o necesarios para diversas especialidades con necesidades específicas (computación gráfica, ingeniería, diseño, contaduría, ciencias sociales, etc.). En algunos de estos casos, las matemáticas discretas tendrán un peso mayor que en el caso fisicomatemático.

Para la implementación didáctica hemos puesto en práctica los principios didácticos enunciados por Cuevas y Pluvinage (2003). Los primeros tres principios básicos son los siguientes:

> Es esencial que el estudiante esté siempre desarrollando una acción. Que, en el caso de la enseñanza de las matemáticas, no tiene por que ser necesariamente una acción física, sino por el contrario, es esencialmente mental[1]. En este sentido es importante señalar que sea el propio educando quién mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado. Esto es, el alumno debe estar constantemente resolviendo o intentando resolver problemas.
>
> Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, hay que intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado. Esto, desde luego, no es posible de realizar para cada uno de los conceptos intrínsecos a un determinado tema, por lo que toca decidir al docente, cuál o cuáles son los más trascendentes. En todo caso, nunca introducir un concepto mediante su definición formal[2].

[1] Recuerde que estamos pensando en estudiantes de nivel medio superior y superior.

[2] La definición formal, corresponde al grado escolar del educando.

> Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de validar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo con el problema planteado (Cuevas y Pluvinage, 2003).

**Primera aproximación al objeto función: caso lineal**

Para el caso de la función lineal proponemos un proyecto de acción práctico como el siguiente, que presenta elementos parecidos a los que se introducen en una situación real de producción y compra:

*Una compañía vende un mantel a $ 23.45 por unidad. El producir este artículo, le implica a la compañía tener costos fijos (renta de un local, luz, etc.) de $ 4,500.00 al mes y costos variables (compra de materia prima, gastos de promoción, etc.). En esta compañía se estima que los costos variables representan un 40 % del ingreso total. Basado en esta información, el gerente de producción desea saber cuál es la relación entre el valor unitario del producto y el ingreso total, al vender un número determinado de artículos; el costo de producción de estos artículos, el costo por unidad y la cantidad de unidades que deberá vender la compañía para cubrir los gastos.*

Antes de iniciar su solución sería conveniente tomar en cuenta el siguiente principio

> Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo, mediante la resolución de un determinado problema, es necesario descomponer o dividir este problema en subproblemas que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requerirá para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, el cual, mediante ejercicios gradualmente dosificados, nos lleven en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta (Ibidem).

Podemos descomponer este problema en tres fases. Primero la obtención del ingreso como función lineal del tipo $f(x) = ax$, enseguida la función costo en donde se obtiene la función lineal como una composición del ingreso resultando al final una función del tipo $f(x) = ax + b$ y por último como una aplicación, el punto de empate.

Este proyecto de acción se podría iniciar proponiendo a los estudiantes llenar una tabla donde en la primera columna escriban el precio por unidad, en la siguiente la cantidad de artículos vendidos y en la tercera el ingreso obtenido. Una vez que el estudiante halla llenado un número suficiente de casillas en una tabla como la anterior se le podría proponer encontrar la relación que determina el ingreso al vender un número *x* de artículos

De aquí surge en forma natural la relación

$I = 23.45x$ o bien $y = 23.45x$.

Y como *I* depende de *x* surge también natural proponer la relación

$$I(x) = 23.45x$$

Si en un plano cartesiano graficamos esta relación mediante la simple unión de puntos $(x, I(x))$ calculados en la tabla se obtiene una recta. Con esto estaremos cubriendo dos puntos más de la propuesta didáctica.

> Cada vez que enseñemos un determinado concepto de las matemáticas, en un cierto registro de representación semiótica, trabajar el mismo (si el concepto lo permite) en los otros registros de representación que le sean propios.
>
> Si un concepto matemático se opera en más de un registro de representación semiótico, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la articulación (traslación) entre los diferentes registros (Ibidem).

Es conveniente que en este ejercicio se realicen actividades en cada registro y que cada una de ellas se visualice en los demás. Por ejemplo, al trabajar o evaluar para algún valor de $x$ la relación algebraica $I(x) = 23.45x$, el resultado deberá verse reflejado en la tabla correspondiente y al dibujar el punto se reflejará en el registro gráfico. De igual forma si se toma un punto de la recta, se vera la relación correspondiente con la función y su tabla.

Es conveniente iniciar con la gráfica una discusión sobre el dominio y rango de esta función. Y diferenciar esta función de otras lineales con dominio todos los reales. Pero este ejercicio no estará terminado si no se añaden dos elementos más de la didáctica a saber:

> Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.
>
> Cuando se ilustre una forma o método para resolver un problema, intentar dar una forma de solución alternativa. En todo caso, nunca imponer una forma de solución (Ibidem).

En nuestro caso deberemos proponer ejercicios para que el estudiante determine la cantidad que se tiene que vender para un determinado ingreso. Por ejemplo, ¿cuantos artículos se tienen que vender para obtener un ingreso de 32,000.00? y por supuesto promover diversas formas de solución.

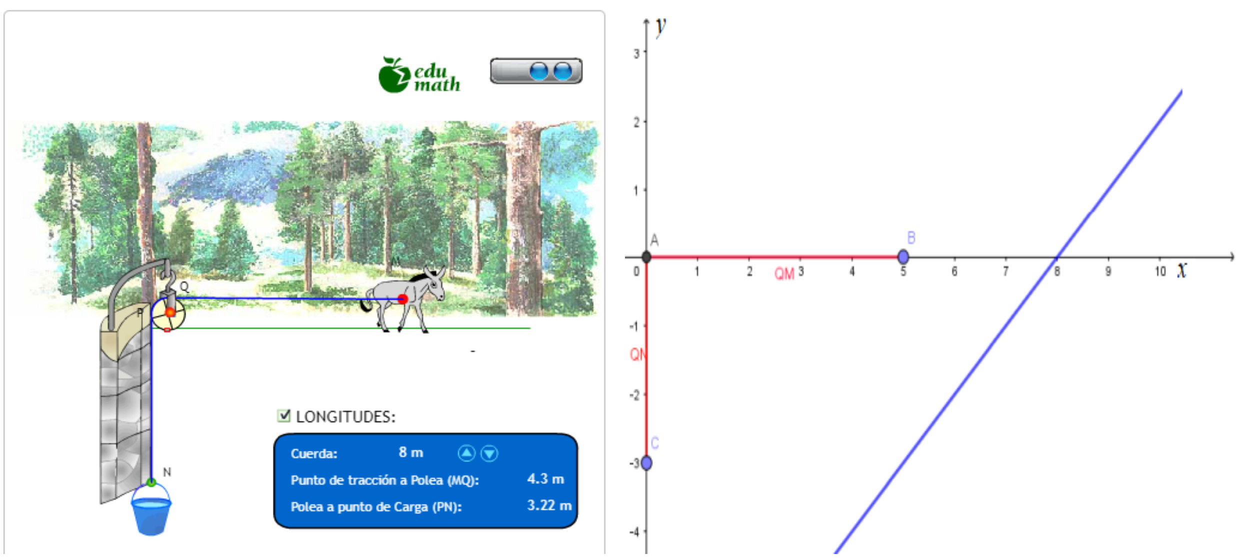
**Etapa de formulación de problemas del objeto función real**

En una experimentación sobre funciones, será importante introducir un proyecto de acción concreto en el que el concepto de función surja a partir de la solución del problema. En relación con el tema del agua, cuya importancia hoy es vital, sería interesante un estudio que conduzca a determinar la cantidad de precipitación pluvial en una región. Un utensilio llamado pluviómetro permite medir la altura diaria de lluvia. Una versión simplificada, hecha a partir de una cubeta, podría permitir unas mediciones, por así decir, durante un periodo de una semana, un mes, etc. Además, el servicio meteorológico nacional publica en línea la hoja de datos que presentamos en anexo. La noción misma de clima implica que se consideren cantidades obtenidas durante ciertos intervalos de tiempo, por ejemplo, cantidades mensuales. Pero ¿cómo obtener precisamente una función de los meses del año hacia las alturas de lluvia? La tabla en el anexo proporciona posibilidades de respuesta. Luego podremos considerar el año como un parámetro. De cualquier forma, una tabla como la del servicio meteorológico nacional nos conduce a considerar que vale la pena hacer la distinción entre tablas de valores de funciones (con una precisión elegida), y tablas de datos de un fenómeno (con una precisión generalmente desconocida).

**Etapa de estudio de un caso modelo**

Uno de los mayores problemas es el contar con un proyecto de acción práctico, cuya solución mediante diversas actividades conduzca a una promoción en la adquisición del concepto matemático. En el caso de funciones en general proponemos el tema de poleas. Este es un problema sencillo de plantear, aunque no necesariamente de resolver, es un problema de interés real y se puede plantear independientemente de toda forma de expresión de las funciones. Además, su resolución conduce a examinar todos los componentes o subconceptos que aparecen en el concepto de función real. Es decir, al resolverlo se examinan los significados de: variable independiente y dependiente, parámetro, dominio, rango, etc. Además, permite la observación directa de cantidades, lo cual no es posible cuando se consideran modelos que refieren a magnitudes diferentes. Otra ventaja es una adecuación evidente del modelo con la realidad.

Sin embargo, si cabe cualquier duda, no es difícil ni caro presentar una realización concreta. En el caso elemental representado abajo, con un cable de longitud dada, una polea en Q (cuyo tamaño en el modelo puede modificarse), el punto M, de abscisa $x$, se mueve horizontalmente y el punto N, de ordenada $y$, verticalmente. Con la disposición que hemos escogido, la gráfica de la función $x \rightarrow y$ coincide con el lugar geométrico del punto del plano que tiene M y N como proyecciones ortogonales. El desplazamiento del punto de coordenadas $(x, y)$es lineal (véase fig. 1).




a) b)

Figura 1. a) El punto Q está en la polea, el punto M (sobre el burro). El punto N (sobre la cubeta). b) Modelo matemático en un plano cartesiano.

Es posible introducir variantes al problema que nos lleven a situaciones no tan sencillas factibles de estudiar, para producir resultados interesantes. Por ejemplo, en la primera situación considerada, podemos situar la polea P en otro punto del eje $O_y$ (véase figura 2). En vez del segmento anterior, obtenemos un arco de cónica. Otra investigación se puede hacer en el caso (no representado) de una localización de la polea P en otro lugar del plano.

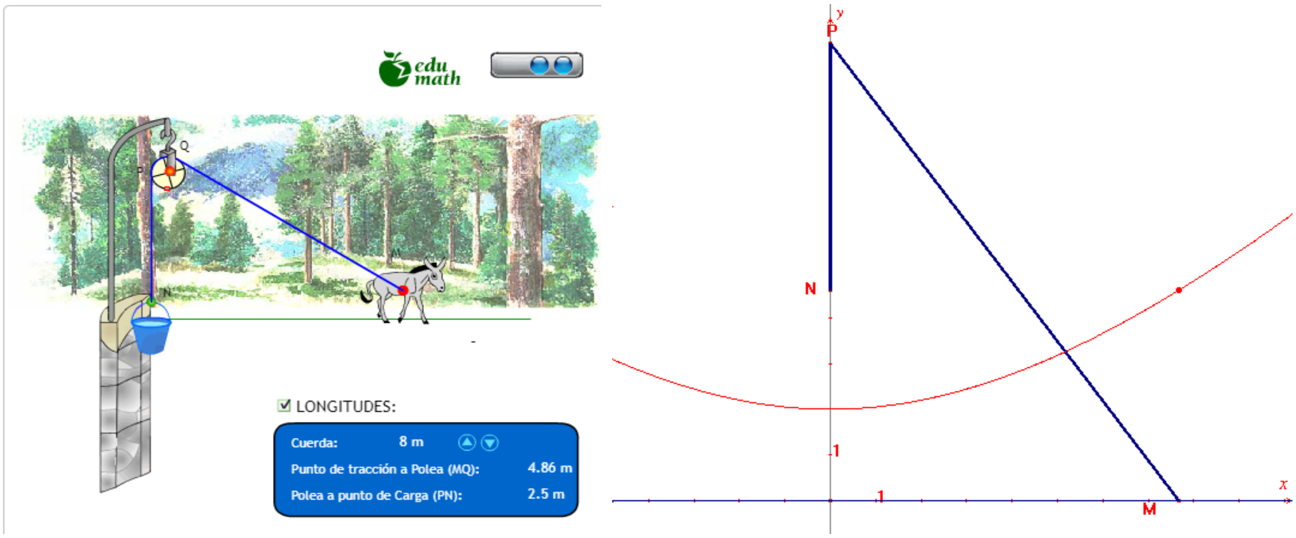



Figura 2: Polea colgada en un punto más elevado que el punto M

El tercer caso representa una polea y un punto fijo, y conduce a un estudio funcional bastante completo (ver figura 3).

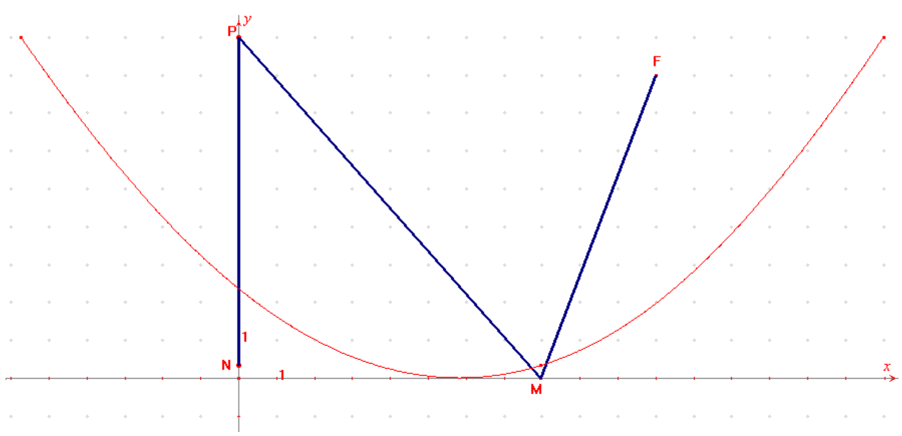



Figura 3: Polea P y punto fijo F. Arrastrar M, la longitud del cable FMPN se conserva constante

En el experimento didáctico nos importará una fase descriptiva que tome en cuenta interrogantes como la determinación de los extremos para el movimiento del punto M, o el punto más bajo alcanzado por N, antes de estudiar luego estos aspectos en un acercamiento cuantitativo. En el caso ilustrado, el problema de saber si el punto N va a tocar el suelo (eje Oy) en algún momento es por ejemplo un pequeño reto. Para la búsqueda de la respuesta a este interrogante y su prueba, serán útiles los recursos que nos proporcionan los registros de representación previamente citados (tablas numéricas y fórmulas en particular).

**Etapa de generalización**

En la mayoría de los casos de una correspondencia entre variables, las representaciones geométricas se refieren a puntos situados en ejes rectangulares. Un primer paso de generalización consiste entonces en presentar situaciones con disposiciones diferentes. Esto se ilustra en la figura 4, en la que el punto M se mueve sobre un eje paralelo al eje Oy. Para obtener la representación gráfica de la función x→y, que será semejante a la gráfica de la figura 2, tendremos por ejemplo que utilizar una trasformación geométrica, que desplace adecuadamente el eje en el que se mueve M.

Un segundo paso de generalización consistirá en el estudio de las nociones relacionadas con el objeto *función real de variable real*. Las funciones usuales, tal como se expresan en los diversos registros, constituyen el soporte de la tecnología matemática a introducir. También es importante considerar funciones que relacionen magnitudes diferentes (longitud y área, longitud y volumen, tiempo y longitud, etc.).

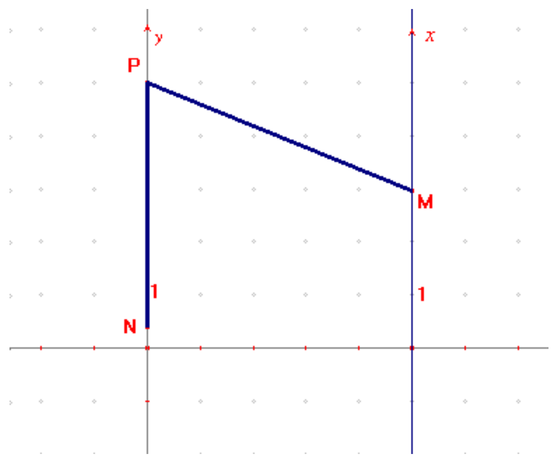



Figura 4: Polea P con desplazamiento vertical de M

**Conclusiones:**

Nuestra elección personal, abierta a discusión, será entonces proponer una definición de función real como una aplicación de una parte de la recta real a los números reales. Esta definición será suficiente para la introducción de límites y continuidad, en este sentido consideramos a las funciones definidas sobre intervalos como suficiente. Dada la enorme complejidad del concepto de función, evidentemente éste es un concepto que tendría que ser enseñado y aprendido en aproximaciones sucesivas. Para las funciones reales proponemos de inicio el estudio de las funciones de grado 1 y 2 de variable real (lineales y cuadráticas) como un estudio que debería ser de interés para todo estudiante, cualquiera que sea su especialidad. El siguiente estudio corresponde a un aprendizaje más avanzado y será el estudio de las funciones reales; finalmente para un aprendizaje especializado el estudio de las funciones en general.
Proponemos además que se inicie la introducción de este concepto mediante la modelación de una situación real, de donde será imposible eludir la precisión de los conceptos asociados como variable dependiente, variable independiente, dominio, rango, parámetro, entre otros.

**Referencias:**


Blanco, L.J., Cárdenas, L.J., Figueiredo, C.A., Contreras, L.C. (2014). *The Concept of Function and his Teaching and Learning*. Far East Journal of Mathematics Education, *12*(1), 47–78. Recuperado de http://pphmj.com/journals/fjme.htm/out.pdf

Calvino, Italo. (2009). El libro de la naturaleza en Galileo. *Ciencia* 95, julio-septiembre, 50-53. [En línea]

Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Strasbourg, IREM.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In P. Nesher, & J. Kilpatrick. (Eds.). Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education, 113–134. Cambridge, Great Britain: Cambridge University *Press*.

Dubinsky, E. y, Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, *25*, 85–106.

Duval, R. (1998). Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II. Editor F. Hitt. Gpo. Edit. Iberoamérica. México.

Filloy E. y Rojano T. (1984). *La aparición del lenguaje aritmético-algebraico*. L'Educazione Matemática. Revista quadrimestrale a cura del Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione matematica di Cagliari. Anno V n. 3 Diciembre 1984.

Fillo, E,, Puig, L., Rojano T. (2008). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach. Springer. ISBN 978-0-387-71254-3.

Goldenberg, P. (1988). *Mathematics, metaphors and human factors: mathematical, technical and pedagogical* challenges *in the graphical representation of functions*. Journal of Mathematical Behaviours. 7(2), pp. 135-174.

Hart, K., Brown M., Kerslake D., Küchemann D., & Ruddock, G. (1985). Teacher's guide. Chelsea diagnostic mathematics test. London: NFER-Nelson.

Hitt, F. (1988). "Obstacles related to the concept of function". DME-PNFAPM CINVESTAV, México e Institute of education, University of London. U.K. pp. 1–7

Kieran, K., Garançon, M., Lee, L., Bolleau, A., (1993). *Technology in the learning of functions: Process to object?.* Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. *1*, 91–99. Pacific Grove. Ca. USA.

Kjeldsen, T.H. y Petersen, H. P. (2014). *Brindging History of the Concept of Function with Learning of Mathematics: Students´ Meta-Discursive Rules, Concept Formation and Historical Awareness*. Science & Education, *23*, 29–45.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The college Mathematics Journal*. *20*(4), 282–300.

Luzín, N. (1998). En: Ferreiros, J. (2003). Historia del concepto de función. La Gacete de la RSME, *6*(21), 413–436.

Markovits, Z., Eylon, B. S. & *Bruckheimer*, M. (1986*). Functions today and yesterday.* For the Learning of Mathematics. *6*(2), 18–24.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M.(1988). *Difficulties students have with the function concept.* In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.). The Ideas of Algebra. 1988 Yearbook, pp. 43–60. Reston, VA: NCTM.

Martínez, A. M., (1993). *Knowledge and Development of Functions in a Technology-Enhanced High School Precalculus Class: A Case S*tudy. Doctoral Dissertation. The Ohio State University.

Monna A. F. (1972/73). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. Arch. Hist. Ex. Sci. 9

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional standarts for teaching mathematics. Reston, VA: The Author.

*National Research* Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, D. C: National Academy Press.

Nicholas, C.P. (1966*). A* dilemma *in definition*. American Mathematical Monthly, *73*, 762–768.

Norman, Alexander (1992). *Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, *25*, 215–232.

Pluvinage, F. y Cuevas-Vallejo, C. Armando. (2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función. Eugenio Filloy (ed.). *Matemática Educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Editorial Santillana, S.A. de C.V, Aula XX1 y CINVESTAV. México ISBN 10:970-29-1753-0. ISBN 13:978-970-29-1753-3 pp. 141-167.

Rüting, Dieter. (1984). Some definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*. *6*(4).

Selden, A., y Selden (1992). Research Perspectives on Conceptions of Function summary and overview. The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, *25*, 1–21.

Sfard, A. (1989*).* Transition *from operational to structural conception: the notion of function revisited*. Proceedings of the Psychology of Mathematics Education. *3*, 151–158. Paris, France.

Sierpinska, Anna, (1992). On understanding the notion of function*.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America*. Notes Series, *25*, 23–58.

Spivak, M. (1967). *Calculus*. USA: Benjamin, W.A.

Youschkevitch, A. P. *The Concept of Function up to the Middle of the 19$^{th}$ Century*. *Arch. Hist. Ex. Sci.* 16 (1976) 37-85.