QUISICOSAS VECTORIALES[1]

Resumen. En este escrito se introduce de manera dosificada el complejo y abstracto concepto de vector, desde su interpretación en la física como una flecha con dirección, magnitud, sentido y punto de aplicación, hasta ser elemento de un abstracto espacio vectorial. Esta presentación establece una cierta ruta didáctica que permite presentar algunos conceptos esenciales del algebra lineal. Como es conocido el concepto de vector y de espacio vectorial no son sencillos, pero podemos construir ejemplos o modelos, interesantes, ilustrativos, accesibles y sorprendentes. Sin embargo, en el proceso de abstracción y generalización se gana y se pierde. Se pierde el contexto, la interpretación geométrica, la sencillez de las operaciones y otros que aparecen en los casos específicos, pero se gana en unidad y amplitud en el campo de acción del concepto. De ninguna manera pretendemos que con lo aquí expuesto se pueda entender con amplitud el concepto de vector. Quedan demasiadas facetas por conocer, y éstas aparecen una y otra vez en el estudio de las diferentes ramas de la matemática y de las relaciones de ella con las demás ciencias en formas verdaderamente.

Palabras Clave: Vector, Algebra, Física

Abstract. In this paper the complex and abstract concept of vector is introduced in a dosed way, from its interpretation in physics as an arrow with direction, magnitude, sense and point of application, up to be an element of an abstract vector space. This presentation establishes a certain didactic route that allows to present some essential concepts of linear algebra. As it is known the concept of vector and vector space are not simple, but we can build examples or models, interesting, illustrative, accessible and surprising. However, in the process of abstraction and generalization, it is gained and lost. The context, the geometric interpretation, the simplicity of the operations and others that appear in the specific cases are lost, but unity and breadth in the field of action of the concept is gained. In no way do we intend that the concept of a vector can be comprehensively understood

EL CÁLCULO Y SU ENSEÑANZA

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Humberto Madrid de la Vega[2]

Recibido: 13 de mayo de 2019,
Aceptado: 19 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:
Humberto Madrid de la Vega
hmadrid@gmail.com

[1] Transcripción del trabajo: Quisicosas Vectoriales. Publicado en Cuadernos de Educación Matemática 1. Serie: Enseñanza de la matemática. Facultad de Ciencias, UNAM. 1981. Publicado con permiso del autor.

[2] *Universidad Autónoma de Coahuila/ México/ Correo: hmadrid@gmail.com*

with what is presented here. There are too many facets to be known, and these appear again and again in the study of the different branches of mathematics and the relationships of it with the other sciences in truly.

Key words: Vector, Algebra, Physical

A manera de introducción

En Argentina, la cuestión (de las matemáticas modernas) fue sometida al consejo Federal de Educación en 1978, para proscribir la enseñanza de las matemáticas modernas en tanto a disciplina "subversiva". El fiscal de las matemáticas modernas (un abogado de orientación integrista católica) señalaba que algunos términos como "vector" tienen consonancia marxista, y que el enfoque moderno de las matemáticas inicia al individuo en la relatividad. (A. Pérez Lindo. "Las matemáticas Modernas: Pedagogía, Antropología y Política". Perfiles Educativos No. 10 (1980) CISE, UNAM.)

¿Qué es cosa y cosa?

¿Qué empuja, describe un movimiento y puede convertirse en matriz o función?

QUISICOSA: **(Contr. de la fr. ant. ¿Qué es cosa y cosa? fórmula inicial de las adivinanzas populares). f. fam.** Enigma u objeto de pregunta muy dudosa y difícil de averiguar.

Poco a poco nos vamos acostumbrando al término de vector. Primero es una fuerza en un curso de física y con los años llega a ser un elemento de un espacio vectorial. Como personaje de misterio, cambia varias veces de personalidad y en ocasiones hace uso simultáneo de varias de ellas, confundiéndonos de vez en vez. A final de cuentas terminamos por sucumbir, nos empieza a ser familiar la palabra a fuerza de tanto uso, y a la amalgama de esas vagas o claras (?) personalidades le damos ciudadanía de concepto. No nos queda de otra, es la costumbre; los textos, los profesores nos trasmiten los conceptos y resultados en un estilo conciso, impositivo, lógico-deductivo, la verdad acabada. Axioma, definición, lema, teorema, corolario, lema, teorema, corolario, . . . en sucesión que en ocasiones se antoja inacabable y realmente lo es. Y lo importante no es este sinfín, sino su intención, su significado, su razón de ser. El contenido aparece de cuando en cuando, y da la sensación de ser fortuita la relación del concepto con la realidad (1), cuando de ella se deriva.

Se dejan de lado matrices, recovecos, sobre entendidos, sutilezas y detallitos que los autores y profesores desprecian o prefieren no tocar. Su estilo es con frecuencia lineal, parcial y limitado; lineal por su monotonía, parcial por mostrar sólo una de las múltiples caras de un concepto o resultado y limitado porque al ocultar el contenido nos impide imaginar y medir los alcances de los conocimientos adquiridos.

No está por demás hacer algunas reflexiones alrededor del concepto de vector y mostrar algunas de sus facetas menospreciadas, olvidadas o incluso ignoradas.

En este escrito, la definición de vector, o más correctamente, de espacio vectorial no nos interesa en sí misma; tampoco estudiar su estructura (2). Hablaremos de aquello que está antes y como trasfondo del concepto.
Esto en la primera parte; y en la segunda, algo sobre las implicaciones y ¿por qué no? la esencia del concepto mismo.
La primera parte, "antes de", consta de unas notas personales que me han servido de guía para clases y conferencias, escritas más o menos al vuelo años atrás y con retoques mínimos de plática en plática, y como tales requieren de anotaciones que las complementan. Estrictamente no son "antes de", como el lector se dará cuenta, sino una forma de introducir el concepto que muy esquemáticamente sigue una línea histórica.
La segunda parte, "después de", está basada en una idea de José Julio Carmona C., alumno del curso de Álgebra Lineal. Dicha idea fue discutida entre ambos y la redacción de "Espacios vectoriales curiosos" fue, con mucho, trabajo de él. Es una muestra interesante de creatividad de los estudiantes, si ésta es estimulada adecuadamente (3). Se demuestra que "casi" cualquier conjunto es un espacio vectorial, trasciende en mucho nuestras ideas geométricas y va más allá de los ejemplos no geométricos que se manejan en los textos. A ello le sigue una sección de comentarios personales que intentan ubicar la dimensión de dicho trabajo.
Deliberadamente hemos dejado tal cual la redacción de estos dos trabajos, pues nos parece que modificarlos merece redactarlos en otro estilo, incorporar más elementos, trascender en varias direcciones las ideas ahí expuestas y ésta es una labor más compleja y puede representar alternativas de trabajo para aquellos que se plantean seriamente la enseñanza de las matemáticas como una disciplina de investigación.
No puedo dejar de mencionar que estas reflexiones se centran en gran parte en mi experiencia de la Facultad de Ciencias de la UNAM, aunque, ya lo he dicho, también toman elementos de experiencias fuera de ella.

SOBRE EL CONCEPTO DE VECTOR

. . . los conceptos aparecen tras una serie de sucesivas abstracciones y generalizaciones, cada una de las cuales reposa en la combinación de experiencias con conceptos abstractos previos . . . (A.D. Aleksandrov)

Con frecuencia algunos estudiantes (4) se preguntan qué demonios es un vector. En Física es una flecha, en Geometría es un segmento de recta dirigido, en Geometría Analítica es una colección ordenada de números y en Algebra Lineal un vector es . . . ¡un elemento de un espacio vectorial! Además, resulta que entes como las funciones o las matrices, pueden ser considerados como vectores. El presente trabajo pretende aclarar estas cuestiones. Algunos puntos son bastantes esquemáticos, pero damos una bibliografía para quien quiera profundizar en dichos puntos. Suponemos además que el lector ya ha trabajado con vectores de una u otra forma.

1. La noción física de vector

La noción de vector como una flecha que puede representar la magnitud, dirección y sentido de una fuerza, una velocidad o una aceleración es conocida desde la antigüedad. Aristóteles ya conocía la ley del paralelogramo (Kline, 1972. p. 776) (5).

La primera observación importante que debemos hacer es que el hecho de representar una fuerza por medio de una flecha es ya un gran paso de abstracción. Esta abstracción permitió en la antigüedad un avance importante en problemas de estática, por ejemplo. Nos parece que precisamente los problemas de estática sugirieron la idea de vector. Un problema sencillo de estática está indicado en la figura 1.
Dado un peso **P**, ¿a qué tensión están sometidos los puntos **A** y **B**?
Como las tensiones son aplicadas a lo largo de las cuerdas, es más o menos natural pensar en representar a estas tensiones como en la figura 2. La punta de la flecha indica la dirección y sentido de la fuerza y el tamaño, su magnitud.
En la sección 2, puede encontrarse una descripción interesante sobre la naturalidad con que aparecen los vectores.

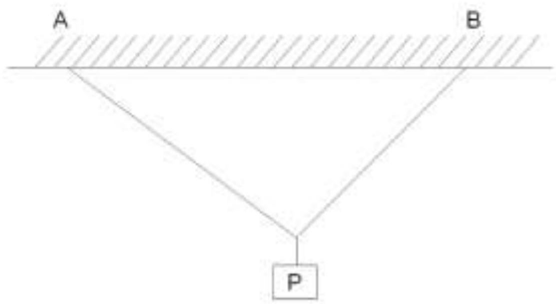


Fig. 1

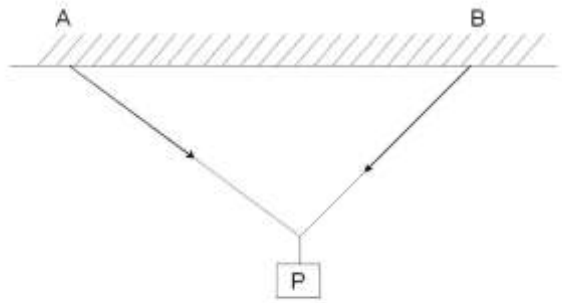


Fig. 2

Sin embargo, no resulta tan natural representar a la velocidad como una flecha.
No nos debe de extrañar que Aristóteles conociera los vectores. Los egipcios lograron un alto desarrollo de las matemáticas, y por otro lado sus avances arquitectónicos hacen suponer que conocían la estática con cierta profundidad. Esto nos permite aventurar la hipótesis de que los egipcios ya manejaban de alguna forma la noción de vector.
Ahora bien, en esta época el desarrollo de la herramienta teórica estaba en función directa de las necesidades concretas. Es posible que el desarrollo de la estática, y por consiguiente de los vectores, se debiera precisamente a las necesidades arquitectónicas. Pero estas necesidades eran de índole religiosa, es decir, sociales, ya que la religión normaba las relaciones sociales. Entonces es probable que el surgimiento de los vectores haya tenido un carácter, por así decirlo, social.

2. La noción geométrica de vector

Aunque desde la antigüedad es conocida la suma de vectores (por medio de la ley del paralelogramo), realmente no es considerada como operación sino como "la resultante". Sólo tiempo después es cuando se crea un algebra de vectores, bastante relacionada con problemas de física, en particular de mecánica. Pero también se da aquí un proceso de abstracción. A pesar de surgir de problemas físicos, lo que se hace es despojar a las flechas de su naturaleza física y manejar únicamente sus operaciones con sus correspondientes propiedades. Es decir, se llega a un álgebra de "flechas".
Hagámoslo más explícito. se define, para $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la suma $\vec{A}+\vec{B}$ utilizando la ley del paralelogramo. También se define $\alpha\vec{A}$, siendo α un número real, como aquel vector que, si $\alpha > 0$, tiene la misma dirección y sentido, pero con magnitud α veces la de $\vec{A}$; y si $\alpha < 0$, un

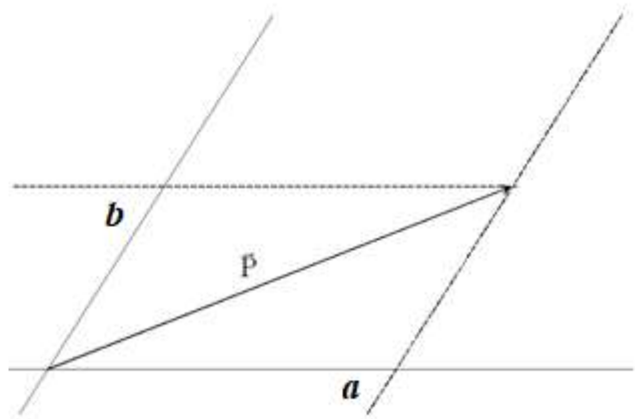
vector igual al caso anterior, pero de sentido contrario. Con estas operaciones así definidas, se deducen las siguientes propiedades básicas de las "flechas".

- $P_1.\ \vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- $P_2.\ (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- $P_3.\ \vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$ ($\vec{0}$ es el vector cero, sin magnitud ni sentido)
- $P_4.\ \vec{A}+(-1)\vec{A}=\vec{0}$
- $P_5.\ \alpha(\beta\vec{A})=(\alpha\beta)\vec{A}$
- $P_6. (\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$
- $P_7.\ \alpha(\vec{A}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$

Destaquemos la importancia de esta abstracción. Al despojar a las "flechas" de su ropaje físico y manejar a las flechas en base a ciertas reglas (las definiciones de las operaciones) y propiedades (de la P_1. a la $P_7. 7$), estamos haciendo una abstracción de la abstracción. Una consecuencia importante de esta abstracción es el hecho de que utilizando esta álgebra de vectores podemos demostrar generalmente con más facilidad los teoremas de la geometría euclidiana.
Observemos que cada paso de abstracción nos desprende cada vez más de la realidad, pero, sin embargo, deja lo esencial, en este caso las propiedades de las flechas. La ventaja es que esta abstracción nos sirve para resolver problemas concretos semejantes o mucho más complejos que aquellos que dan origen a la abstracción. Cualquiera que haya estudiado un poco de Estática no podrá negar la importancia del álgebra de vectores para resolver, por ejemplo, los endemoniados problemas de equilibrio de fuerzas.

3. La noción algebraica de vector (I)

La noción geométrica de vector y los conceptos de la Geometría Analítica dan lugar al concepto algebraico de vector (que después es generalizado como veremos posteriormente). Recordemos cómo surge este concepto. En un sistema coordenado (no necesariamente ortogonal), coloquemos una flecha $\vec{P}$ que parta del origen. La punta de la flecha determina un punto en el plano coordenado (fig. 3). A la flecha $\vec{P}$ se le puede asociar las coordenadas (a,b) del punto que determina $\vec{P}$. Aún más, la correspondencia entre las flechas y las coordenadas es biunívoca, lo cual permite "identificar" a la flecha $\vec{P}$ con la pareja (a,b).
Una cosa análoga, con ternas, puede hacerse en el espacio tridimensional.



. Fig. 3

Hemos dado así otro paso de abstracción, ahora un vector en lugar de ser una flecha es una pareja (o terna en su caso) ordenada de números reales. Ahora los vectores
se suman así

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

y se multiplican por un escalar α de esta forma

$$\alpha\ (a, b)\ =\ (\alpha a, \alpha b)$$

Nótese que por ejemplo la suma así establecida no se parece a la ley del paralelogramo (a menos, claro está, que la interpretemos geométricamente).
A la luz del proceso de abstracción, este nuevo paso, aparentemente nos aleja más de la realidad. Expliquemos un poco la "apariencia". Este paso fue dado con mucha dificultad el siglo pasado y el primero en darlo fue C. Maxwell. Para Maxwell fue *necesario* dar este paso en un problema *concreto* que él tenía: desarrollar la teoría electromagnética, (Kline, 1972. p. 786). Pero el problema que Maxwell se planteaba tenía raíces más profundas, veamos lo que dice Lilley (1965, pag.127):

> *La comunicación inalámbrica, cuyos principios coinciden aproximadamente con los de este siglo, se desarrolló a partir de dos orígenes principales. El incentivo para atacar el problema procedía del mismo origen social que anteriormente el del teléfono, es decir, de la necesidad de comunicaciones rápidas, tanto más cuanto esta modalidad podía proporcionar el medio de comunicación con los buques, hasta entonces no conseguido. La base para la solución fue dada por las investigaciones teóricas de Clerk Maxwell a partir de 1886, que demostraban la existencia de ondas electromagnéticas, que son la base de la radio.*

Muchas de las abstracciones matemáticas son determinadas en última instancia, por razones sociales.
Este paso de abstracción nos aleja de la realidad de la que partimos (problemas de estática, por ejemplo), pero nos acerca más a la realidad en la medida en que puede ser aplicada esta abstracción a problemas como el del electromagnetismo.
Pasemos ahora a otra abstracción que es hasta cierto punto natural.

Hasta ahora nos hemos referido a vectores en el plano y en el espacio y es que nuestras ideas geométricas, intuitivas, parece que no dan para más, por tanto, intentemos desprendernos de nuestros prejuicios geométricos.

Comencemos con un poco de notación. $\mathbb{R}^2$ denotará al conjunto de parejas (x, y), siendo x, y reales. $\mathbb{R}^3$ denotará al conjunto de ternas (x, y, z), con x, y, z, números reales. Hemos visto que los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ pueden ser considerados como vectores. Sea $\mathbb{R}^4$ el conjunto de cuartetas (x, y, z, w) de números reales. ¿No resulta natural considerar como vectores a los elementos de $\mathbb{R}^4$?

Definimos la suma de cuartetos como:

$$(x_1,\ y_1,\ z_1,\ w_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2,\ w_2)$$
$$= (x_1 + x_2,\ y_1 +\ y_2,\ z_1 +\ z_2,\ w_1 +\ w_2)$$

y el producto por un escalar α como:

$$\alpha\ (x, y, z, w)\ =\ (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$$

podemos checar fácilmente que las cuartetas tienen las mismas propiedades que las ternas y las parejas de números reales, y en consecuencia las mismas que las flechas.

Aunque la posibilidad de considerar como vectores a los elementos de $\mathbb{R}^4$ (el espacio de dimensión 4) choca con nuestra intuición geométrica, lo que es cierto es que la cuarta dimensión puede aparecer en problemas concretos. Quizá el ejemplo más conocido sea el del espacio-tiempo. Supongamos que queremos describir el comportamiento de una partícula que se mueve en el espacio (tridimensional). Para poder hacerlo, necesitamos especificar en cada instante de tiempo sus coordenadas en el espacio. En otras palabras, para describir la posición de dicha partícula, necesitamos *cuatro* coordenadas, tres que corresponden a la posición espacial y la cuarta al tiempo.

Una conclusión inmediata es que las coordenadas no tienen por qué representar distancias, pueden de hecho representar lo que sea, como veremos más adelante. Bueno, y ¿por qué no considerar como vectores a los elementos de $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$, o en general, a los $\mathbb{R}^n$, con $n\ >\ 0$?.

Que no tengamos una imagen geométrica de los elementos de $\mathbb{R}^n$ para $n\ >\ 3$, no importa. Lo verdaderamente importante es que los elementos de $\mathbb{R}^n$ se comporten como las “flechas”. Y en efecto, así se comportan; veámoslo,

Sean $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$, y definamos:

$$X + Y = (x_1 +\ y_1, \dots,\ x_n +\ y_n)$$
$$\alpha X\ =\ (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

De la definición de estas operaciones y de las propiedades de los números reales se puede demostrar las siguientes propiedades:

$P_1.\ X\ +\ Y\ =\ Y\ +\ X$

$P_2.\ (X\ +\ Y\ )\ +\ Z\ =\ X\ +\ (Y\ +\ Z)$

$P_3.\ X\ +\ 0\ =\ X\ (0\ =\ (0, 0, \dots, 0))$

P_4. $X + (-1)X = 0$

P_5. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

P_6. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

P_7. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

O sea, que efectivamente los elementos de $\mathbb{R}^n$ se comportan como las "flechas".

Hemos dado un formidable paso de abstracción. Nos hemos desprendido de lo que nos quedaba de intuitivo y geométrico, pero hemos conservado lo fundamental: las operaciones y sus propiedades.
Tenemos la pauta para hacer otra gran abstracción, pero vale la pena que nos preguntemos si no nos estamos yendo muy lejos y sin ningún sentido. ¿Qué importancia puede tener que los elementos de $\mathbb{R}^n$ sean vectores? Veremos algunos ejemplos que nos pueden dar idea de la importancia de $\mathbb{R}^n$.

4. Los espacios de dimensión N y la realidad

En Física. Hemos visto en el párrafo anterior que $\mathbb{R}^4$ nos permite describir el movimiento de una partícula. Pero nos falta algo, con cuatro parámetros podemos describir su posición en un instante dado, pero no sabemos que velocidad lleva. Para saber esto, necesitamos saber las componentes de la velocidad V_x, V_y, V_z en las direcciones X, Y, Z, respectivamente. Así para poder describir tanto la posición como la velocidad del punto en cualquier instante, necesitamos 7 parámetros, es decir, necesitamos trabajar con el vector $(X, Y, Z, V_x, V_y, V_z, t)$ en $\mathbb{R}^7$. Pero ¿con qué aceleración se mueve la partícula? Para contestar esto, se requiere de otros 3 parámetros, esto es, trabajar en $\mathbb{R}^{10}$. Bueno, ahora sí no se trata de una partícula, sino de un sistema de partículas que, por ejemplo, va girando alrededor del centro de masa del sistema, necesitamos trabajar con $\mathbb{R}^n$ para alguna *n* adecuada, que depende del número de partículas del sistema. Podemos asegurar que para conocer mejor el movimiento de una partícula o de un sistema de partículas, es preciso utilizar más parámetros, es decir, trabajar con vectores de dimensión cada vez más grande. Podríamos dar una vasta variedad de problemas físicos en donde aparece $\mathbb{R}^n$, pero por un lado son por lo general complejos, y por otro lado no queremos hacerla muy cansada.

En Economía. Los vectores son utilizados frecuentemente en ciertos modelos económicos. Hay vectores propios $P = (P_1, \ldots, P_n)$ donde P_k es el precio de un artículo A_k. Hay vectores ganancia, vectores consumo, vectores producción, etc. (Kemeny, J. Snell, J. y Thompson, G., 1972; Gale, D. (1972)).

En Biología. También en esta ciencia hacen acto de presencia los vectores. En ecología, en genética, en dinámica de población, entre otras ramas, se hace uso en ciertas ocasiones de los vectores, un vector $(P_1, \ldots, P_n)$ puede ser un vector población donde cada P_k sea la cantidad de individuos de la especie E_k en un ecosistema Gale, D., 1972; Batschelet, E., 1971).

En Antropología. Han sido utilizadas técnicas vectoriales para determinar las reglas matrimoniales en ciertas sociedades primitivas (Lilley, S. (1965).

En La Vida Cotidiana. Supongamos que 3 personas llegan a un restaurante donde sólo se encuentran tortas y refrescos. Para calmar el hambre una de las personas pide 2 tortas y un refresco, la segunda 3 tortas y 2 refrescos, y la tercera una torta y un refresco. Piden en total 6 tortas y 4 refrescos. ¿Qué tiene que ver esto con vectores? La respuesta es interesante e ilustrativa.
Si T representa una torta y R un refresco, podemos escribir simbólicamente el consumo de cada persona así: la primera consume $2T + R$, la segunda $3T + 2R$ y la tercera $T + R$. El consumo total será:

$$\begin{array}{r}
2T + R \\
3T + 2R \\
T + R \\
\hline
6T + 4R
\end{array}$$

O sea que podemos pensar a los consumos individuales como vectores y el consumo total es la suma de estos vectores. Pero obsérvese que, si únicamente tuviésemos la noción de vector físico o geométrico, sería verdaderamente descabellada la idea de considerar a los consumos como vectores.

Realmente, lo importante no es considerar a los consumos como vectores, sino considerar a T y R como vectores, puesto que cada consumo individual es una combinación lineal (**6**) de T y R. Bueno, nada nos impide tener una imagen geométrica de nuestros vectores, véase la figura 4. Esto es, ¡hemos representado a una torta y a un refresco por medio de "flechas"!.

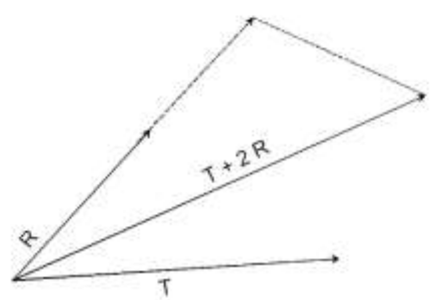


Fig. 4

La cuestión va incluso más allá. En lugar de $2T + R$ podemos pensar en la pareja $(2,1)$ en lugar de $3T + 2R$ en $(3,2)$ y en lugar de $T + R$ en $(1,1)$. El consumo total será: $(2,1) + (3,2) + (1,1) = (6,4)$.
Podemos pensar en los consumos individuales como elementos de $\mathbb{R}^2$. Es decir, como vectores algebraicos. Este ejemplo, aunque parezca simple, es un ejemplo cotidiano. Cuando vamos a una taquería, frecuentemente nos muestran una lista como la de la figura 5. Los espacios en blanco son ceros. Cada consumo, por mesa, es un vector, en este caso, en $\mathbb{R}^{43}$. Al finalizar el día, se requiere saber cuántos tacos de bistec, de costilla, etc., han

vendido, para lo cual les basta sumar los vectores de consumo para obtener el consumo diario. Podemos decir que los "taqueros" manejan vectores sin saberlo.

La Tacoteka
M. Angel de Quevedo 121 Chimalistac
Reg. CIRS-400724

TACOS AL CARBON						
de bistec	5.00					
de bistec con rajas	5.00					
de costilla	5.00					
de chuleta	5.00					
de chuleta con rajas	5.00					
de cecina (lomo adobado)	5.00					
de chorizo	5.00					
brochetas de filete	10.00					
campechanas (chuleta con chorizo)	5.00					
costilla tacoteka (corte especial con ensalada de berro)	18.00					
QUESOS FUNDIDOS						
cazuelita de queso	6.00					
choriqueso	9.00					
cecina con queso	9.00					
chuleta con queso	9.00					
chuleta especial con queso	12.00					
queso especial con tortilla de harina	12.00					
chiles rellenos de queso	9.00					
QUESADILLAS						
quesadillas de queso	2.50					
quesadillas de flor de calabaza	2.50					
quesadillas de papa	2.50					
quesadillas de papa con chorizo	2.50					
quesadilla especial tacoteka tortilla de harina y aguacate	2.50					
ESPECIALIDADES						
pozole rojo	12.00					
pancita	12.00					
taco de moronga	3.50					
cazuela de frijoles	4.00					
cazuela de frijoles con chorizo	8.00					
cazuela de frijoles con cecina	8.00					
cazuela de frijoles con chuleta	8.00					
chicharrón en salsa verde	8.00					
sopa especial de pollo	10.00					
plato tacoteka (chuleta, chorizo, morrón, aguacate tortilla de harina)	12.00					
parrillada mixta	29.50					
parrillada tacoteka	35.00					
aguacate relleno (con chuleta y cecina)	18.00					
BOTANA DE GUACAMOLE CON CHICHARRÓN	12.00					
BEBIDAS						
cerveza de barril	6.00					
jugo de naranja natural	5.00					
refrescos	2.00					
café de olla	2.00					
agua mineral	2.00					
POSTRES						
PAY(queso con piña, manzana, nuez)	6.00					
FLAN(de queso, nuez, coco)	6.00					
CIGARROS						

21-11-74-1-3

TOTAL $

Fig. 5 Un vector en $\mathbb{R}^{43}$ (de la Tacoteka)

5. La noción algebraica de vector (II)

Hemos hecho hasta ahora varias abstracciones. Partimos de una flecha representando una fuerza. Luego le quitamos el ropaje físico y manejamos las flechas geométricas.
Después las flechas se convierten en colecciones de números.
Lo que hay en común en cada una de las interpretaciones, son las propiedades de los vectores. Estos sugieren ya el camino para la siguiente abstracción, pero antes son necesarias algunas observaciones.
Cuando hablamos de la propiedad de los vectores, no nos referimos a la propiedad de *un* vector (o de cada uno de ellos). Las propiedades se refieren a las relaciones que guardan entre sí los elementos de un conjunto. Dicho de otra manera, no podemos decir qué es un vector sin referirnos a sus relaciones con los otros vectores; *un* vector no tiene propiedades "intrínsecas". Así que sólo podemos decir que un vector es un elemento de un conjunto que tiene ciertas relaciones.
Nótese que en cada paso de abstracción que hemos dado, le hemos restado importancia a la *forma concreta* que adoptan los vectores (fuerzas, flechas, o colecciones de números), y hemos dejado las propiedades esenciales, las "intrínsecas", pero no de un vector, sino de toda la colección de vectores.

Nada nos impide ahora explorar la posibilidad de que existan conjuntos distintos al de las flechas y de las colecciones de números, pero que tengan las mismas propiedades que ´estas. A estos conjuntos se les llama espacios vectoriales. Precisemos:

DEFINICIÓN. Sea V un conjunto donde se tiene dos operaciones: la suma de los elementos de V, y la multiplicación de números reales por elementos de V. Se dice que V es un espacio vectorial real, si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $a + b \in V$
2. $\alpha a \in V, a \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ denota a los números reales)
3. $a + b = b + a$
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$
5. *Existe un elemento*$\theta \in V \mid a + \theta = a \quad \forall\, a \in V$
6. *Para cada* $\forall\, a \in V, a + (-1)a = \theta$
7. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
8. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
9. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
10. $1 \cdot a = a$

Y ahora sí podemos precisar la noción más abstracta de vector.

DEFINICIÓN. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.
Algunos ejemplos los dejamos como ejercicio.
Ejemplo 1. Sea $V = \{f : [a, b] \rightarrow R\}$. Es decir, V es el conjunto de funciones reales
Ejemplo 2. Sea V el conjunto de matrices 2×2.
Definamos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Entonces V es un espacio vectorial.
Ejemplo 3. Sea V el conjunto de sucesiones

$$X = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$$

Sea $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots\}$. Definamos:

$$X + Y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots\}$$
$$\alpha X = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots \alpha x_n, \ldots\}$$

Entonces V es un espacio vectorial.

Los espacios vectoriales sobre campos finitos tienen aplicaciones por ejemplo en el diseño de investigaciones agrícolas (Fletcher, 1974), o en en circuitos cerrados y en comunicación (Fletcher, 1972).

Resumamos. Para llegar al concepto más abstracto de vector, se hacen necesarios varios pasos de abstracción. En general los pasos de abstracción se dan por necesidad, ya sea teórica o práctica. En particular en vectores, algunos de estos pasos tienen sus raíces en necesidades sociales.

Por otro lado, si bien en cada paso de abstracción nos desprendemos de aspectos concretos, particulares, los resultados de la abstracción son enormes, podemos aplicar los conceptos a una gran variedad de nuevas situaciones.

Esperemos que esto muestre lo poderosa que resulta la abstracción y el papel que esta tiene en la evolución de los conceptos. En particular se ha visto que la variedad de “definiciones” que se conocen, corresponden a etapas en la evolución del concepto de vector.

Conclusiones

A través de la experiencia, poco a poco, se hace uno consciente que los conceptos se asignan de forma desigual. Parece que el estudiante ha logrado comprender el meollo del asunto. De pronto surge una intervención que refleja una incomprensión de aspectos que nos parecen claros, a veces triviales. Esto nos sorprende y a veces nos molesta. Preguntamos y repreguntamos la definición, y aunque la respuesta sea correcta la confusión subsiste. Nos damos cuenta entonces de que *la definición no es el concepto*. El concepto consiste en vivencias, de parcialidades, de intuiciones que se sintetizan en una definición o en un teorema, pero rebasan aquello. Y he aquí que la definición no es sólo un resultado sino eso y mucho más.

Ante la pregunta, mal hecha a propósito, ¿Qué es un vector?, las respuestas, sorprendiéndonos, se multiplican:

- Es una fuerza
- Es una flecha
- Es una magnitud con dirección y sentido.
- Es un segmento de recta dirigido
- Es una pareja (terna ó eneada) ordenada de números
- Es un elemento de un espacio vectorial

Lo interesante de la situación es que -aparte de ser una pregunta hecha a alumnos de 3er. Semestre de la Facultad de Ciencias (físicos, matemáticos y actuarios)- algunas “definiciones” son contradictorias entre sí. Un segmento dirigido es un conjunto infinito de puntos y una pareja ordenada de números es un conjunto que consta de un solo elemento.

No deja de llamar la atención que los alumnos por lo general estén de acuerdo con estas “definiciones”, pero que la mayoría de ellos descubran tales contradicciones y que les cueste trabajo encontrar una explicación coherente de ello (7).

Esta confusión tiene una virtud pedagógica, centra la atención del alumno en cuanto que les cuestiona sus conocimientos. Cuestiona así mismo, la forma en la cual los han adquirido y representa un reto pedagógico: para ellos aclarar el concepto, para el profesor, proporcionar los elementos aclaratorios.

Siempre me ha sorprendido la facilidad con que se representa una fuerza como una flecha con magnitud, dirección y sentido, lo cual nos parece natural pero que pensándolo bien no es tan fácil de hacer: ¿dónde y cuándo vemos esa flecha al empujar un objeto? Me sorprende, aún más, que una velocidad o aceleración se interprete tan fácilmente como un vector –pensado como una "flecha"- cuando estamos acostumbrados a interpretar a las velocidades y aceleraciones como escalares (por ejemplo, lo que marca el velocímetro de un automóvil). Esto merece toda una interpretación física, distinguiendo, por ejemplo, entre *velocidad y rapidez*.

Es frecuente que, a cierto nivel, se maneje el concepto de vector como algo que tiene magnitud, dirección y sentido, digamos como una "flecha". La metáfora no es del todo afortunada, aunque parece acertada.

Afrontemos esta situación realista (que yo utilizo en mis clases y conferencias): Tomemos un arco y una flecha de verdad, y pongamos la flecha en posición de tiro al momento de disparar la flecha, esta tiene una magnitud (su longitud, o bien la magnitud de la fuerza con la que es lanzada), una dirección y un sentido; pero *no* es un vector. Hoffman discute de una manera interesante este problema.

> *El singular incidente de la tribu vectorial. Se cuenta que una vez existió una tribu de indios que creían firmemente que las flechas eran vectores. Si querían matar a un ciervo que se encontraba directamente al Noroeste, no disparaban una flecha en dirección al Noroeste, sino que disparaban dos flechas simultáneamente, una directamente hacia el Norte y otra directamente hacia el Oeste, confiados en que la poderosa resultante de las dos flechas mataría al ciervo. Los científicos escépticos han dudado de la veracidad de este rumor, basándose en que no se ha encontrado la más ligera huella de la existencia de tal tribu. Ahora bien, la absoluta desaparición de la tribu, a consecuencia de la inanición, es precisamente la que cualquiera hubiera esperado, dadas las circunstancias. Y puesto que la teoría que afirma que la tribu existió confirma dos cosas tan diversas como "el comportamiento no vectorial de las flechas_ el "principio darwinista de la selección natural", no es, seguramente, una teoría que pueda rechazarse a la ligera (*Hoffman, 1966*).*

Lo anterior muestra de inmediato que la pregunta ¿qué es vector? está mal planteada. No se puede hablar de *un* vector en sí mismo, sino de un conjunto de entes con determinadas reglas de combinación y cierta propiedad de dichas operaciones.

Un aspecto de este asunto, que es poco tratado en los libros de texto, es el referente al paso de vectores fijos (como son las fuerzas en Estática, donde es importante el punto de aplicación) a los "vectores libres". Una presentación de ellos aparece en "´Algebra Lineal I", Open University. McMillan (1974) y en J. López Estrada, "Introducción a Vectores", notas mimeografiadas, Facultad de ciencias, UNAM.

Cuando se adquieren los conceptos de forma abstracta, se lleva una sorpresa al constatar la amplitud de su aplicación. En lo particular, en cuanto a vectores, una experiencia hasta cierto punto divertida es la referente al ejemplo E del apartado 4 de "Sobre el Concepto de Vector". En dicho ejemplo, como el lector recordará, hacemos mención a un vector en R^{43}. Pues bien, quise demostrar a los alumnos este vector y me propuse hacerme de un ejemplar de la orden de servicio de una "taquería" (figura 5 de ese trabajo). Como ´estas estaban foliadas, los meseros se negaron a proporcionarme un ejemplar de ellas. Hube de esperar al dueño del negocio y hablar con ´el. El señor me ofrecía una nota de consumo, pero no entendía el porqué de mi interés en la orden de servicio. Tuvo que intervenir El Moi, diciendo que yo lo utilizaría como material didáctico, para que se me fuese facilitado, aunque con una actitud de perplejidad por parte del dueño. ¡Me era imposible explicar mis intenciones!

Sin embargo, para los estudiantes de una Facultad de Ciencias, este ejemplo resulta ser muy sencillo, y por eso divertido y a la vez muy dramático, pues logran establecer una conexión entre un concepto abstracto y situaciones bastante cotidianas. De hecho, este ejemplo es el eje de muchas de mis presentaciones del concepto de vector.

Visto bien, este ejemplo hace que reflexionemos sobre nuestro concepto de “representación”. Estamos tan acostumbrados a la representación geométrica que nos parece imposible tener una representación concreta (que no sea una figura en el plano o en el espacio tridimensional). Los alumnos se ríen escépticos cuando prometo traer a la siguiente clase un vector en $\mathbb{R}^{43}$ y ¡de color negro!

Por otro lado, este ejemplo nos hace ver que podemos asociarle una flecha a lo que nosotros queramos (por ejemplo: un taco, una torta, un refresco o una combinación de ellos, lo que constituye el “consumo” de un restaurante), rompiendo así la idea tan generalizada, y limitada, de que una flecha representa fuerzas, velocidades o aceleraciones.

Los posibles “consumos” en un restaurante *n*o forman por sí mismos un espacio vectorial. Las razones son varias. Supongamos que se consumen tres tipos de alimentos (podemos tomar tacos, tortas y refrescos, de dudoso contenido alimenticio). Llamémosles $A, B\ y\ C$.

Cada consumo individual representa una terna de números digamos (a, b, c). El problema mismo indica que $a, b, c\ \geq O$, donde a, b, y c son por los general números naturales, porque usualmente no se venden taco y medio o un cuarto de refresco.

Lo que sí podemos afirmar es que cada consumo (a, b, c) pertenece a $\mathbb{R}^3$, y puesto que la forma de sumar los consumos y de multiplicarlos por escalares son compatibles con las de R3, podemos afirmar que los consumos son vectores.

Para lograr esto, hemos efectuado varias abstracciones: $3tacos + 5tortas + 2refrescos \rightarrow 3A + 5B + 2C \rightarrow (3, 5, 2)$

Esto es, hemos utilizado notaciones adecuadas para desprenderse del contenido específico. Ahora sí el consumo $(3, 5, 2)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

Aquellos que conocen el producto escalar de dos vectores reconocerán fácilmente que la “cuenta” del restaurante se obtiene efectuando el producto escalar entre el vector “consumo_ el vector de precios respectivos.

¿Puede el lector sacarle más jugo al ejemplo?, ¿proponer por analogía más ejemplos?, ¿puede detectar en la vida cotidiana algunos otros? Ideas y sugerencias serán bien recibidas.

ESPACIOS VECTORIALES CURIOSOS

La esencia de la Matemática radica en su libertad. Georg Cantor.

I Introducción

Cuando uno estudia ciertas estructuras matemáticas y encuentra en las clases de nuestros maestros o en los textos, ciertos ejemplos de ellas, se adquiere cierta satisfacción al clarificar cada vez más de qué se trata. Como todo conocimiento humano, las matemáticas surgen de un acontecimiento de la realidad; aunque las más de las veces, en el proceso de abstracción y sobre todo cuando se nos presenta un hecho ya terminado, dejamos de percibir esa relación. No es nuestro propósito en este sencillo trabajo, hacer una discusión filosófica sobre los hechos señalados en el párrafo anterior; sin embargo, queremos presentar algunos ejemplos de espacio vectorial que surgen de un hecho concreto, el cual se podría considerar como una suerte de "maquinita" generadora de ellos.

En resumen, el propósito del presente trabajo es el siguiente: dados conjuntos A y B con la misma cardinalidad, y donde uno de ellos es espacio vectorial, construir en el otro conjunto la aritmética necesaria para que a su vez sea espacio vectorial.

II La esfera como espacio vectorial

Si consideramos una esfera en $\mathbb{R}^3$, resulta que aquella no es un espacio vectorial cuando se utilizan las operaciones acostumbradas en él, esto es, las que usamos en la geometría analítica. De lo anterior es fácil convencerse, pues de que la suma no es cerrada, ni lo es tampoco el producto por un escalar distinto de 1 (véase figura 7).

Sin embargo, con "operaciones adecuadas" -que evidentemente no serán las usuales- resulta que cualquier esfera en $\mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Primero haremos ver que en una esfera a la cual le quitamos un punto le llamaremos "esfera agujerada" podemos definir operaciones que la convierten en espacio vectorial. A manera de ejemplo pensemos en una esfera E en R^3 con centro en $(0,0,\frac{a}{2})$ de radio $\frac{a}{2}$ (ver figura 8) donde $a > 0$. Sea E^1 la esfera agujerada que resulta de E al quitarle el punto $(0,0,a)$. Ahora consideramos la función f descrita geométricamente en la figura 9 y sea g su viceversa.

Analíticamente f y g viene dadas por las siguientes expresiones:

$$f\,(x,y,z) = \frac{1}{a - z}(ax,ay,0)$$

$$g(x,y,0) = (x + \frac{x^3 + xy^2}{x^2+y^2+a^2}, y + \frac{x^2y + y^3}{x^2+y^2+a^2}, -\frac{a(x^2+y^2)}{x^2+y^2+a^2}$$

En base a dichas funciones definamos las siguientes operaciones para los elementos de E^1:

a) $\bar{e_1} \oplus \bar{e_2} = g(f(\bar{e_1} + f(\bar{e_2}))$ donde $\bar{e_1}$ y $\bar{e_2}$ son elementos de E^1 y $+$ es la suma usual de vectores (véase figura 10).

b) Si $\alpha \in R, \alpha^*\bar{e_1} = g(\alpha^\circ f(\bar{e_1}))$ donde $^\circ$ es el producto usual de un escalar por un vector (véase la fig. 11).

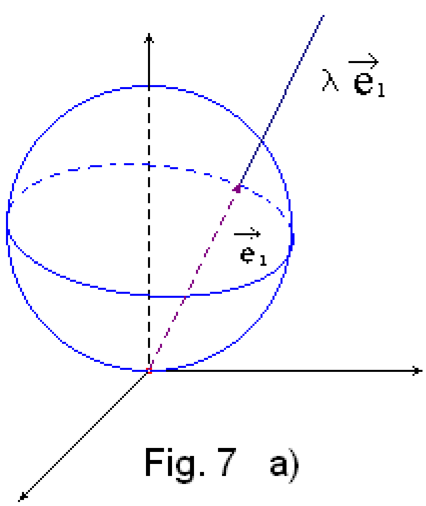


Fig. 7 a)

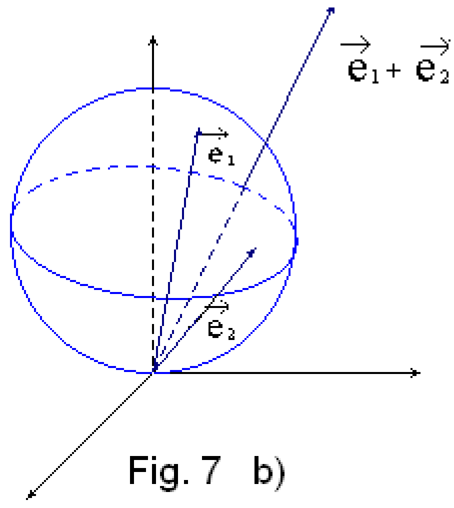


Fig. 7 b)

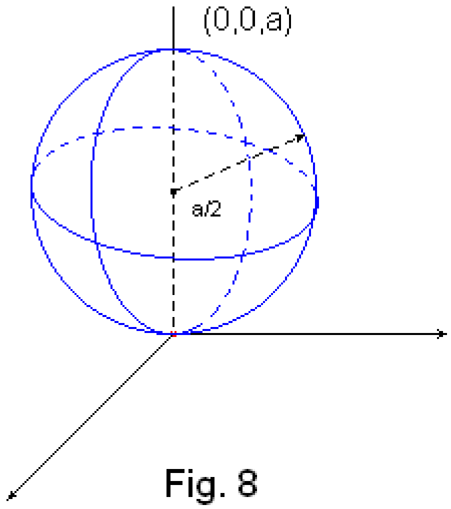


Fig. 8

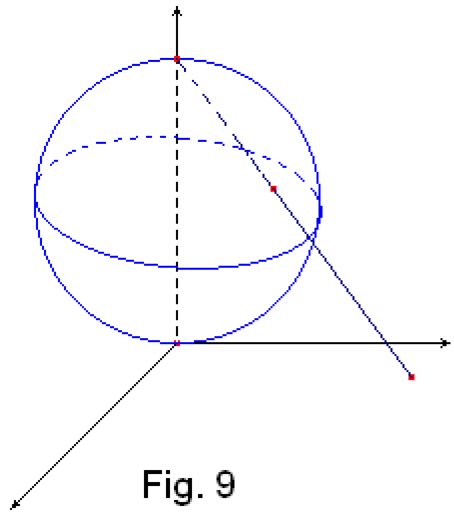


Fig. 9

Resulta que, con las operaciones así definidas, ¡ E^1 *es un espacio vectorial de dimensión* 2!. Esto es intuitivamente claro en las figuras 10 y 11, y puede ser verificado utilizando las expresiones analíticas de f y g; pero preferimos obtener este resultado como consecuencia de un procedimiento general mediante el cual se pueden construir espacios vectoriales "especiales_ que veremos en el siguiente apartado. Pero sí queremos señalar aquí la historia fundamental de este procedimiento. En lo que hicimos, la idea fue construir E^1 operaciones que la convierten en espacio vectorial, haciendo uso de la función biyectiva f que hay entre E^1 y $\mathbb{R}^2$. Resulta que así f es lineal (lo cual se ve fácilmente de (a) y (b)) y por lo tanto se establece un isomorfismo 8 entre E^1 y $\mathbb{R}^2$.
Veremos en el apartado IV que también a la esfera completa se le puede dar una estructura de espacio vectorial, pero primero pasemos a ver el procedimiento general.
En este apartado generalizaremos el proceso descrito en el apartado anterior.
TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un campo C y B un conjunto con la misma cardinalidad que V.
Entonces B se puede considerar como un espacio vectorial sobre C.

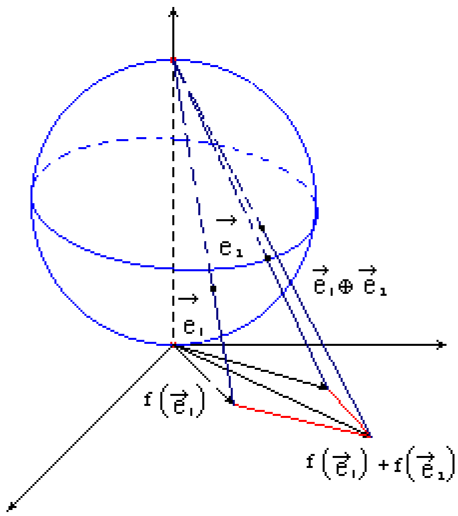


Fig. 10

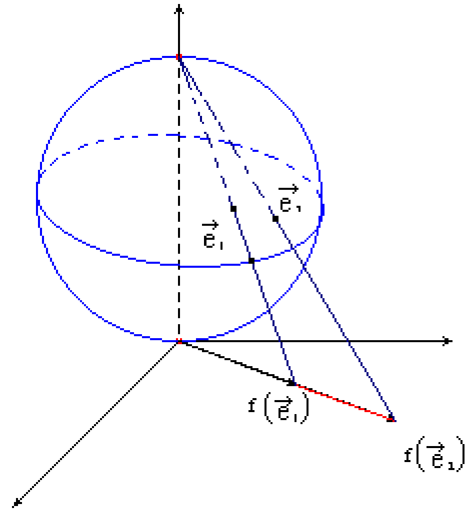


Fig. 11

Demostración. Existe al menos una función biyectiva $F : V \to B$. Para que el conjunto B sea un espacio vectorial, se requiere operaciones definidas en ´el, por lo que empezamos por definirlas. Sean a, $b \in B$ y $\alpha \in B$, entonces definimos:

a) $a \oplus b = F(F^{-1}(a) + F^{-1}(b))$, donde $+$ denota la suma en V

b) $\alpha * a = F(\alpha^{\circ} F^{-1}(a))$, donde ° denota el producto de un elemento de C por otro de V.

Nótese que las operaciones anteriores están bien definidas, y que

$$F^{-1}(a \oplus b) = F^{-1}(a) + F^{-1}(b)$$
$$F^{-1}(\alpha * a) = \alpha^{0} F^{-1}(a)$$

Una vez definidas las operaciones hay que verificar que estas satisfacen los axiomas de espacio vectorial. Primeramente, por construcción, se satisfacen las propiedades de cerradura, así que basta con demostrar el resto de las propiedades.

1. $$\begin{aligned} a \oplus b &= F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}(b)\right) \\ &= F\left(F^{-1}(b) + F^{-1}(a)\right) \\ &= b \oplus a \end{aligned}$$

2.$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}(b \oplus c)\right) \\ &= F\left(F^{-1}(a) + \left(F^{-1}(b) + F^{-1}(c)\right)\right) \\ &= F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}(b) + F^{-1}(c)\right) = \end{aligned}$$

3. Sabemos que existe $\theta \in V$tal que

$$v + \theta = \theta + v = v, \forall v \in V$$

Ahora sea $a \in B$,

$$\begin{aligned} a \oplus F(\theta) &= F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}\left(F(b) + F^{-1}(\theta)\right)\right) \\ &= F(F^{-1}(a) + \theta) \end{aligned}$$

$$= F\left(F^{-1}(a)\right) = a$$

Análogamente $F(\theta).\oplus a = a$. Entonces $F(\theta)$ es el neutro aditivo de la suma.

4. Sea $a \in B$,

$$a \oplus [(-1) * a] = F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}\left((-1) * a\right)\right)$$
$$= F\left(F^{-1}(a) + (-1) \quad {}^{0}F^{-1}(a)\right)$$
$$= F(\theta)$$

Análogamente $[(-1) * a] \oplus a = F(\theta)$. Así que el inverso aditivo de a es $(-1) \ * a$

5.

$$(\alpha\beta) * a = F\left((\alpha\beta) \quad {}^{0}F^{-1}(a)\right)$$
$$= F\left(\alpha \quad {}^{0}F^{-1}(\beta * a)\right)$$
$$= \alpha * (\beta * a)$$

Como B es espacio vectorial sobre C y F^{-1} es lineal, tenemos el siguiente

COROLARIO. B y V tiene la misma dimension.9 Pasemos a ver algunos ejemplos particulares de espacio vectoriales "especiales "que se obtienen aplicando el teorema anterior.

IV Ejemplos

El Teorema del apartado anterior nos proporciona una vasta colección de espacios vectoriales "raros", así que daremos sólo unos cuantos ejemplos.

1. *Ejemplo 1.* La esfera agujerada del apartado II
2. *Ejemplo 2.* Cualquier esfera $\mathbb{R}^3$. La esfera E definida en el apartado II tiene la misma cardinalidad que la esfera agujerada E^1, por lo tanto E puede ser considerada como un espacio vectorial. Además, cualquier esfera $\mathbb{R}^3$ tiene la misma cardinalidad que E, así que también puede pensarse como espacio vectorial.
3. *Ejemplo 3.* Georg Cantor descubrió que cualquier $\mathbb{R}^n$ -entendido como el conjunto de todas las eneadas ordenadas de números reales- tiene la misma cardinalidad que cualquier $\mathbb{R}^m$. Sabemos además que $\mathbb{R}^m$ con las operaciones usuales tiene dimensión m.

Por el Teorema del apartado anterior, $\mathbb{R}^n$ puede ser pensando como un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^m$ *¡para cualquier m natural!* Evidentemente, cuando $n \neq m$, las operaciones en $\mathbb{R}^n$ no pueden ser las usuales. Como caso particular a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ podemos darle estructura de espacio vectorial de forma tal que su dimensión sea igual al número natural que nosotros queramos.

Ejemplo 4. Como cualquier esfera en $\mathbb{R}^3$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}^2$, entonces a esta esfera se le puede pensar como un espacio vectorial de dimensión (finita) que nosotros queramos.

Ejemplo 5. Un disco abierto (o cerrado) en $\mathbb{R}^2$ con centro en O, tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}^2$, así que se le puede dar una estructura de espacio vectorial, isomorfo a $\mathbb{R}^2$. De esta manera el disco, que es un conjunto acotado, es un "modelo" de $\mathbb{R}^2$ que no es acotado.

Ejemplo 6. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales puede pensarse como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los racionales, ya que $\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo y $\mathbb{N}$ tiene la cardinalidad que $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 7. Cualquier conjunto finito con un número primo p de elementos, se puede considerar como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$, el campo de las clases residuales módulo p.

Ejemplo 8. Si p es primo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{Z}_p$. Así que cualquier conjunto finito con p^n elementos pueden ser considerados un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$, de dimensión n.
Los ejemplos anteriores, sirven de base para seguir construyendo espacios vectoriales. Piénsese en un conjunto de cardinalidad p^n, siendo p un primo, cuyos elementos son espacios vectoriales. Ese conjunto puede ser considerado un espacio vectorial, con la característica de que sus vectores son espacios vectoriales.
Consideramos ahora el conjunto $V = \{\mathbb{R}^n | n \in \mathbb{N}\}$ que es numerable, y por lo tanto de la misma cardinalidad que $\mathbb{Q}$, que es un espacio vectorial; entonces a V le podemos dar estructuras de espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$; o en general si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ donde $i \in \mathbb{N}$ y las $a'_i s$ son cualquier cosa, A puede pensarse como espacio vectorial.
En fin, si en una tarde de verano, en un parque lavado por la lluvia, viéramos a una bella mujer que camina silbando, al mirar sus ojos, se podría pensar en . . .

V Comentario

Este trabajo es fruto del esfuerzo colectivo de los cursos de Algebra Lineal impartidos por el Prof. Humberto Madrid cuyos métodos aportan algo esencial en la enseñanza de las matemáticas: la claridad. Las ideas de este trabajo son análogas a las utilizadas en los cursos del Prof. Humberto Madrid. En ellas, en un momento determinado se llega a la necesidad de establecer operaciones con matrices. Esto se logra estableciendo una función biyectiva entre matrices y un conjunto adecuado de transformaciones lineales (que es un espacio vectorial). Haciendo uso de dicha biyección, se definen las operaciones entre matrices, y el conjunto de matrices adquiere una estructura de espacio vectorial.
Mi sincero agradecimiento a Humberto por toda la ayuda que, de él recibí para elaborar este trabajo, pero particularmente por todo lo que nos ha enseñado dentro y fuera de su cátedra.

Notas a espacios vectoriales curiosos

Estamos acostumbrados a ejemplos geométricos y no geométricos de espacios vectoriales. De los primeros, tenemos las rectas, planos e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$. De los otros espacios de funciones, matrices, etc., etc. De vez en cuando, ejemplos de espacios vectoriales sobre campos finitos. Pero la imagen geométrica que nos viene a la mente son los subespacios en $\mathbb{R}^n$ -los más cercanos a nuestras percepciones - y los imaginamos algo así como "chatos" (copia de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$,o $\mathbb{R}^k$).
Difícilmente podríamos pensar en un espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ como un conjunto acotado, simplemente porque exigimos que *x* sea elemento de ese espacio, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y toda $x \in \mathbb{R}^n$. En este trabajo se muestra que si ponemos un tanto de imaginación, esferas, segmentos, o casi lo que sea, puede ser un espacio vectorial, rebasando en mucho las imágenes concretas que de ese concepto podemos tener.
Se enfrenta uno al dilema; enunciar el resultado, el teorema, o presentarlo de tal forma que tengan alguna idea de dónde surge tal resultado. Si bien, dicho resultado puede provenir de diversas necesidades, me parece conveniente mostrar, con algún detalle al menos, una de ellas. Una forma de introducir las operaciones con matrices (y esto depende del público y las circunstancias) es hacerlo a través de trasformaciones lineales.
A final de cuentas, si uno dice que las matrices se multiplican así, de esa forma medio extraña, (a diferencia de la suma), me parece que por lo menos se merece una explicación. 11

En mis cursos de Algebra Lineal, se presenta a una explicación de ello mediante transformaciones lineales, presentación que además conlleva la idea de isomorfismo entre espacios vectoriales. Esto es una ventaja, pues da pie a la introducción del concepto de isomorfismo.

La idea es la siguiente: teniendo familiaridad con las matrices como una notación eficaz para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se plantea la necesidad de encontrar la inversa de un matriz, A^{-1}, para resolver tales sistemas.12 Surge entonces la pregunta ¿cómo multiplicar matrices? (para que tenga sentido A^{-1}, se requiere que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$). Como los estudiantes ya conocen el ´algebra de funciones, resulta más o menos fácil replantear el problema de resolver $Ax = b$, en término de funciones; encontrar una función F, tal que $F(x) = b$. Puesto que sabemos efectuar la composición de funciones podemos "transplantar" dicha idea para definir el producto de matrices. Por otro lado, no es ésta la única presentación que puede hacerse del producto de matrices existe una gran variedad de situaciones que llevan a ello.13

3. El compañero J. Carmona se sorprendió bastante al conocer el vector $\mathbb{R}^{43}$ representado en una hoja de papel en forma de orden de servicio de un restaurante. De aquí le surge una duda: ¿el plano puede ser "una representación" de $\mathbb{R}^{43}$ o de otros espacios? De la duda surge la discusión, de ahí alguna ideas vagas y dispersas que en un momento dado adquieren claridad y coherencia cuando él demuestra que a una esfera agujerada se le puede dar una estructura de espacio vectorial (utilizando las ideas delineadas en la nota anterior). El camino quedó abierto y en base a otras discusiones se logran otros ejemplos interesantes, y se le puede seguir.

Sería sumamente valioso generar algunos ejemplos concretos, que fuesen atractivos y donde las operaciones obedecieran a reglas sencillas, para que ellas mismas pudieran ser utilizadas para motivar el concepto de espacio vectorial.

4. En este trabajo queda claro que aunque podemos interpretar a una biyección simplemente como un cambio de nombre, los resultados pueden ser sorprendentemente extraños. Huelga decir que lo hecho para espacios vectoriales puede hacerse igualmente para grupos, anillos, campos, espacios métricos, espacios topológicos, etc., etc. ¿Puede el lector intentarlo?

BIBLIOGRAFÍA

Batschelet, E. (1971). *Mathematics for the Life Scientists*. Springer Verlag. USA

Fletcher, T. J. (1972). *Linear Algebra*. Ed. Van Nostrand

Fletcher, T. J. (1974). *Didáctica de la Matemática Moderna*. En la enseñanza media. Ed. Teide. Barcelona España.

Gale, D. (1972). *The Theory of Linear Economic* Models. University of Chicago Press.

Hoffmann, B. (1966). About vectors. Ed. Prentice-Hall. USA. ISBN 10: 0486604896 ISBN 13: 9780486604893.

Kemeny, J. G. Snell, J. L. y Thompson, G. L. (1972). *Introducción a las matemáticas finitas*. CECSA México.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Vol. 1*. Oxford University Press. USA. ISBN-13: 978-0195061352

Lilley, S. (1965). *Hombres, Máquinas e Historia*. Ed. Ciencia Nueva, Madrid España.

López-Estrada, J. Apuntes de Geometría Analítica (copias mimeografiadas). Inédito. Facultad de Ciencias UNAM.

Searle, S. R. (1968). Matrix Algebra for Biological Sciences. *Journal of Pharmaceutical Sciences*. Volume 57, Issue 3, Page 536. Wiley Sons.

Notas

[1]En Mérida a una estudiante del último año de las matemáticas les parecía increíble que un concepto "tan abstracto" como el de grupo tuviera aplicaciones y más le admiraba que el concepto pudiera ser motivado.

[2]Por supuesto que tenemos tema de conversación al respecto. En otra oportunidad hablaremos de ello, particularmente del concepto de independencia lineal tan íntimamente ligado a la geometría de los espacios vectoriales.

[3]Hay más ejemplos, éste aparece publicado en una selección de trabajos de alumnos: "Cuentos, Variaciones e Invenciones sobre Algebra Lineal". Comunicaciones Internas, No. 5 (1979). Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM

[4]En particular, este trabajo fue motivado por Paty Colunga quien quería saber qué es un vector.

[6]Una combinación lineal de dos vectores X, Y, es un vector de la forma $\alpha X + \beta Y$

[7]Por supuesto, lo que hay en el fondo es el concepto de isomorfismo.

Esto, claramente es una oportunidad magnífica para introducirlo porque es un ejemplo de algo que ellos han manejado durante años. A este nivel, si no se tiene la oportunidad de introducir el concepto formal, se puede hacer de manera informal, ilustrándolo, dando lugar a su introducción formal.

[8]Sean V un espacio vectorial sobre un campo C, con operaciones $\oplus$, $*$ y W también un espacio vectorial sobre C con operaciones $+.$ ^{0}; decimos que V y W son isomorfos si existe $F : V \rightarrow W$ biyectiva tal que

a)$f(v1 \oplus v2) = f(v1) + f(v2)\, v1, v2 \in V$

b)$f(\alpha * v) = \alpha^{0i} f(v)\, \alpha \in V$

A f se le llama un isomorfismo entre V y W.

[9]Recuérdese el siguiente resultado: Dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo campo son isomorfos, sí y sólo sí dim V = dim W.

[10]H. Madrid, "Operaciones con Matrices". Notas Mimeografiadas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. (1975)

[11]Generalmente los alumnos ya conocen cómo se multiplican las matrices. Esto no me revela de mi obligación de dar una explicación del porque se multiplica de esa forma.

[12]Ver: H. Madrid. "Operaciones con matrices". Notas mimeografiadas. Facultad de Ciencias, UNAM

[13]E. Bonilla. "Algunos Aspectos de la Enseñanza del Algebra de Matrices". Tesis Profesional. Facultad de Ciencias, UNAM (1980).

[14]Ver el ejemplo E del inciso 4 de "Sobre el Concepto Vector"

[15]Copias disponibles en Depto. de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM.