UNA PRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO, EN ESCUELAS DE INGENIERÍA, NO CENTRADA EN LA DEFINICIÓN DE LÍMITE

EL CÁLCULO Y SU ENSEÑANZA

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

José Ismael Arcos Quezada [1]

Recibido: 15 de mayo de 2019,
Aceptado: 18 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:
José Ismael Arcos Quezada
ismael_arcos@msn.com

Resumen. Si se admite que la presentación de conceptos matemáticos en la enseñanza debe considerar las necesidades e intereses de aquellos a quienes se dirige el proceso educativo, entonces los cursos de matemáticas que se imparten en las escuelas de ingeniería deben pensarse e impartirse en consideración de la manera en la que los conceptos matemáticos involucrados habrán de ser utilizados en la actividad profesional del ingeniero y, claro está, en la manera en esos conceptos se utilizan para adquirir y utilizar los conocimientos propios de las ciencias de la ingeniería. La presentación tradicional del Cálculo está centrada en el concepto de límite, a pesar de que la experiencia en las aulas muestra claramente que se tienen grandes dificultades para el aprendizaje y a pesar de que los textos utilizados para la enseñanza de las ciencias de la ingeniería utilicen los conceptos del Cálculo con un escaso recurso del concepto de límite. En este documento se pretende insistir en la posibilidad de ofrecer una presentación del Cálculo, en escuelas de ingeniería, que no ponga en el centro de atención al concepto de límite.

Palabras clave. Cálculo en la formación de ingenieros, Enseñanza del Cálculo, Cálculo con infinitesimales.

Abstract. Admitting that the presentation of mathematical concepts in teaching should consider the needs and interests of those to whom the educational process is directed, then the mathematics courses taught in the engineering schools should be thought and imparted in the manner in which the mathematical concepts involved will be used in the professional

[1] *Universidad Autónoma del Estado de México/ Facultad de Ingeniería/ México/ Correo: Ismael_arcos@msn.com*

activity of the engineer and, of course, in the way these concepts are used to acquire and use the knowledge of the engineering sciences. The traditional presentation of Calculus is centered on the concept of limit, although the experience in the classrooms clearly shows that there are great difficulties for learning and even though the texts used for the teaching of engineering sciences use the Calculation concepts with a scarce resource of the concept of limit. This document intends to insist on the possibility to offer a presentation of the Calculus, in engineering schools, that does not put in the center of attention the concept of limit.

Key words. Calculus in engineering education, Teaching of the Calculus, Calculus with infinitesimals.

1. Introducción. Las distintas versiones del Cálculo

Se suele asociar el origen del Cálculo basado en la definición de límite con la publicación del *Curso de Análisis* de Cauchy, en el decenio de los 1820. Gradualmente, esa versión del Cálculo fue adquiriendo aceptación en las aulas hasta alcanzar un estatus hegemónico, a principios del siglo XX y a partir de entonces, y hasta fines del mismo siglo, la presentación de los cursos de Cálculo, en particular los que se ofrecen en las escuelas de ingeniería, estuvo firmemente asociada a la definición de límite, con algunas variaciones en cuanto al grado de rigor adoptado. Sin embargo, la experiencia en las aulas, así como los innumerables trabajos de investigación en Matemática Educativa que se han hecho durante casi medio siglo, dan cuenta de la gran dificultad para entender el Cálculo bajo esa perspectiva y, más que nada, para entender y utilizar sus conceptos en el contexto de las ciencias de la ingeniería.

Y es que, como puede observarse en los textos utilizados para el aprendizaje de esas ciencias, los conceptos del Cálculo se utilizan de una manera mucho más próxima a las versiones anteriores a la Cauchy, en particular a las de Leibniz, Newton o Lagrange, en las que el concepto de límite ni siquiera había aparecido. Esta situación provoca una desvinculación entre los cursos de Cálculo, que normalmente se ofrecen al comenzar los estudios de licenciatura, con los de ciencias de la ingeniería, que se ofrecen a media carrera.

Esta es una situación que habría que analizar con mayor atención, considerando sus efectos en el aprendizaje del Cálculo y en uso del mismo como una herramienta para el entendimiento de las ciencias de la ingeniería y las consecuentes implicaciones en el desempeño profesional de los ingenieros. A continuación, y para contribuir en este análisis se hará referencia a algunos momentos de la evolución de los conceptos del Cálculo y de su enseñanza en las escuelas de ingeniería.

Para comenzar cabe comentar algo de lo dicho por Lazare Carnot en sus *Reflexiones sobre el Análisis Infinitesimal* (cuya segunda edición fue publicada en 1813), obra en la que expone las virtudes del Análisis Infinitesimal, o sea, la versión leibniziana del Cálculo y las compara con las otras versiones (que él llama Métodos) de las que se disponían al inicio del siglo XIX.

Pues bien, Carnot indica, bajo el título, el propósito de la obra, a la vez que describe las tres partes en las que se compone:

> Yo busco conocer en qué consiste el verdadero espíritu del Análisis infinitesimal; las reflexiones que yo propongo al respecto son distribuidas en tres capítulos: en el primero, expongo los principios generales de este análisis; en el segundo examino cómo este ha sido reducido en algoritmo, por la invención del cálculo diferencial e integral; en el tercero, lo comparo con aquellos otros métodos que lo pueden sustituir, tales como el método de exhausión, el de los indivisibles, el de las indeterminadas, etc. Carnot (1921).

Observamos entonces que Carnot afirmaba que estas distintas presentaciones del cálculo no eran mutuamente excluyentes, de manera que podía ser utilizada una de ellas en lugar de otra o más de una de ellas en el estudio de alguna problemática de interés.

Es interesante saber a cuáles otros métodos se refiere Carnot. En el capítulo 3, menciona el *método de exhausión*, para referirse al método de los “antiguos” [griegos], el *método de los indivisibles* (Cavalieri), el *método de las indeterminadas* (que atribuye a Descartes), el *método de las primeras y últimas razones o de los límites* (Newton), el método de las fluxiones (Newton), el cálculo de las cantidades evanescentes (Euler) y la *Teoría de las funciones analíticas o funciones derivadas* (Lagrange), cuya segunda edición fue publicada casi simultáneamente con la segunda edición de la segunda edición de las Reflexiones de Carnot.

Luego, en el primer capítulo, Carnot expone los “principios generales de análisis infinitesimal”, donde comienza por remarcar su importancia como una herramienta eficiente, a la vez que sencilla, para la modelación matemática de la naturaleza, situación especialmente importante en la formación de ingenieros:

> No hay ningún descubrimiento que haya producido, en las ciencias matemáticas, una revolución así de feliz y con tanta rapidez como el del Análisis infinitesimal; ninguna se ha valido de medios más simples y más eficaces para penetrar en el conocimiento de las leyes de la naturaleza.

Aproximadamente medio siglo después, un autor francés, Boucharlat, habría de manifestar la inquietud de tomar elementos de cada una de las tres propuestas con mayor presencia en ese momento; la de los infinitamente pequeños de Leibniz, la de los límites de Newton, y la algebraica de Lagrange:

> El método de los infinitamente pequeños no es sino un medio expedito de encontrar los diferenciales de diversas funciones, él grava sus diferenciales en nuestra memoria mediante figuras geométricas reducidas al último grado de simplicidad, y que hablan más a la imaginación que las ideas abstractas; en fin, este método deviene indispensable en las partes altas de la mecánica y la astronomía, en donde, sin él, la resolución de problemas tendría una extrema dificultad.

> […] Si el método de los límites complementa al de los infinitamente pequeños, rectificando aquello poco que este último podía tener defectuoso, el método de Lagrange complementa a su vez al de los límites, haciendo depender los coeficientes diferenciales de la pura Álgebra. Se puede entonces considerar entonces a estos tres métodos como formando uno solo. Boucharlat (1858).

Podemos reconocer entonces que, para algunos de los autores de libros para la enseñanza del cálculo, en el siglo XIX, resultaba sumamente importante el aspecto didáctico. Se pretendía tomar los elementos positivos de cada versión para conseguir un texto que resultara más accesible para quienes se iniciaban en el estudio de esta ciencia.

Sin embargo, a pesar de los intentos de Carnot y otros seguidores de la versión leibniziana del Cálculo, la propuesta de Cauchy, surgida en la segunda década del siglo XIX fue ganando adeptos y, luego de aproximadamente un siglo, y debido a su fortaleza desde el punto de vista del rigor lógico, terminó por desplazar a las otras, pero sólo en el quehacer de los matemáticos profesionales. Al respecto, y de acuerdo con Boyer (1986), fue Heine, bajo la influencia de Weierstrass, quien en 1872 enunciaría la siguiente definición:

> Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

Esta es, con insignificantes diferencias en la simbología, la definición de límite que aún encontramos en los libros de texto. Y, como indica el mismo Boyer, marcó, de manera definitiva, el fin del recurso de las cantidades infinitamente pequeñas o de puntos moviéndose para generar curvas:

> En esta definición fría, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a cantidades que fluyan engendrando magnitudes de dimensiones superiores, ni al menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, ni a despreciar cantidades infinitamente pequeñas. No han quedado nada más que números reales, la operación de sumar y su opuesta la de restar, y la relación «menor que» entre números reales.

Seguramente se estará de acuerdo con Boyer, en cuanto a la “simplicidad y precisión” de la definición de Heine, siempre y cuando se observe desde la perspectiva de los profesionales de la matemática. Sin embargo, desde la perspectiva de la docencia, en las escuelas de ingeniería, la experiencia recabada durante las últimas cuatro décadas nos indica claramente que la definición rigurosa de límite no resulta accesible para la gran mayoría de los estudiantes.

Ahora bien, más recientemente, el reconocido divulgador de las Matemáticas, Ian Stewart en sus comentarios al conocido libro *¿Qué son las matemáticas?*, escrito en 1941 por Courant y Robbins se ha pronunciado en este mismo sentido, el reconocimiento de las ventajas didácticas de aceptar las cantidades infinitamente pequeñas:

> […] Courant y Robbins subrayan que “las diferenciales” como cantidades infinitamente pequeñas están ahora descartadas definitiva y deshonrosamente”: una reflexión precisa del punto de vista que se tenía por consenso cuando se escribió ¿Qué son las matemáticas? A pesar del veredicto de Courant y Robbins, siempre ha habido algo intuitivo y llamativo en los argumentos a la antigua con infinitesimales. Están aún sumergidos en nuestro lenguaje en ideas tales como “instantes” de tiempo, velocidades “instantáneas” y el considerar una curva como una serie de líneas rectas infinitamente pequeñas y el área acotada por una curva como suma de una cantidad infinita de áreas de rectángulos infinitesimales. Este tipo de intuición resulta estar justificado, pues se ha descubierto recientemente que el concepto de cantidades infinitamente pequeñas no es deshonroso y no tiene por qué ser descartado. (Stewart en Courant y Robbins, 2010).

Para finalizar esta reseña, cabe referirse a Ivor Grattan-Guinness, quien en su artículo titulado ¿*Qué es y qué debería ser el cálculo*?, nos dice:

> El planteamiento de Cauchy-Weierstrass, basado en los límites se ha convertido naturalmente en la forma habitual de enseñanza en los cursos dedicados al cálculo o al análisis (puro). Sin embargo, en los cursos de mecánica, astronomía, física matemática e ingeniería a menudo se emplea la forma euleriana del cálculo diferencial por su flexibilidad intuitiva en la construcción de los modelos diferenciales de los fenómenos físicos en cuestión. Sobre este punto Cauchy fue criticado en la *Ecole Polytechnique* durante la década de 1820 por de Prony, uno de los sinodales de gradación:
>
>> La enseñanza, en el análisis puro y en la geometría analítica, parece haber dejado que desear en la práctica y en la facilidad de las aplicaciones a las fórmulas y a las teorías generales: algunos alumnos muy brillantes, luego de demostrar satisfactoriamente las fórmulas, se encuentran en problemas cuando llega el momento de resolver casos concretos. Es indispensable no aislar nunca las nociones abstractas de las consideraciones en detalle; estas últimas siempre preceden a aquellas en el desarrollo natural de las ideas. Y es necesario aceptar esta ley de la naturaleza, sobre todo cuando se trata de enseñar a jóvenes para quienes la teoría ha de ser una *herramienta* de la práctica.
>
> …En el caso de la enseñanza del cálculo, la hegemonía de los límites ha provocado una esquizofrenia educacional desafortunada y totalmente innecesaria: el cálculo puro no es otra cosa que epsilonitis de pared a pared e ignora la forma diferencial euleriana del cálculo que los cursos de cálculo aplicado con excelente razón, a menudo utilizan como elemento básico. Grattan-Guinness, 1991.

Así pues, Grattan-Guinness afirma, en primer término, que el énfasis en el rigor hace menos accesible el Cálculo al buen entendimiento por parte de los alumnos. Por otra parte, afirma que el abandono de los infinitesimales ocurrió sólo en los cursos de Cálculo, cuando se presentan sus conceptos de manera descontextualizada, ya que sigue utilizándose en aquellos cursos en los que el Cálculo es más bien aplicado, lo cual puede constatarse al hacer un análisis de los textos usados para la enseñanza de las ciencias básicas y de la ingeniería (Arcos, 2000).

2. El límite o la diferencial

A continuación, y para ilustrar lo antes señalado, vamos a ver cómo se utilizan algunos conceptos o temáticas del Cálculo en textos de ciencias de la ingeniería, comenzando con los conceptos de límite y continuidad.

En cuanto a la idea de continuidad, ésta es abordada desde un punto de vista físico, claramente alejado del rigor lógico con el que aborda en los textos de Cálculo. Hasta fines del siglo pasado, se recurría al límite para definir funciones de punto, como la densidad, el volumen específico o la presión, cuidándose de no hablar de distancias excesivamente pequeñas. Así, en el texto de Termodinámica de Burghardt, para definir el volumen específico, se decía lo siguiente:

> Existen varias propiedades bien conocidas, pero que debemos definir rigurosamente para saber con exactitud lo que se desea significar con ellas. *Volumen específico* es el volumen de una sustancia dividido entre su masa. Pero, ¿hay algún punto donde esto deje de ser cierto? ¿Tendría significado el volumen específico si se selecciona una sola molécula para representar la sustancia que vamos a

> medir? No. En primer lugar, el volumen específico es un fenómeno macroscópico; en segundo, para que una propiedad sea macroscópica debe existir en un *medio continuo*; es decir las propiedades macroscópicas tienen que variar continuamente de una región a otra sin interrupciones. Decimos región y no punto porque este último concepto geométrico (infinitesimal) no puede tener partículas de una sustancia dada (¿o si?); de esta manera, el espacio más pequeño que puede ocupar una sustancia macroscópica, sin perder sus propiedades también macroscópicas, es una región con un volumen característico $\delta V'$. Si el volumen específico se designa por v, y δV es un volumen pequeño de sustancia, con una masa δm, entonces $v = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta V}{\delta m}$. (Burghardt, 1984)

Observemos que, además de recurrir a terminología infinitesimalista, se recurre innecesariamente al concepto de límite, ya que, si aceptamos un cierto valor para el volumen característico $\delta V'$, bastaría con indicar que, para cada punto del espacio, se tome una esfera o un cubo, con centro en el punto cuyo volumen sea $\delta V'$, y que contenga en su interior una masa δm de la sustancia, el volumen específico en el punto será $\frac{\delta V'}{\delta m}$.

Más recientemente, con respecto de la misma temática, Çengel, un autor actualmente muy reconocido en escuelas de ingeniería nos dice:

> La materia está constituida por átomos que están igualmente espaciados en la fase gas. Sin embargo, es muy conveniente no tomar en cuenta la naturaleza atómica de una sustancia y considerarla como materia continua, homogénea y sin ningún hueco, es decir, un continuo. La idealización de continuo permite tratar a las propiedades como funciones puntuales y suponer que varían en forma continua en el espacio sin saltos discontinuos. Esta idealización es válida siempre y cuando el tamaño del sistema analizado sea grande en relación entre moléculas. Este es el caso de casi todos los problemas a excepción de algunos especializados. La idealización del continuo está implícita en muchos enunciados, como “la densidad del agua en un vaso es la misma en cualquier punto”. […] En este libro sólo se consideran sustancias que es posible modelar como un continuo. Çengel y Boles, 2015.

Luego de lo cual, y ya que se ha dicho que sólo se considerarán sustancias homogéneas, procede a definir densidad y volumen específico, sin recurrir al límite.

> La densidad se define como la masa por unidad de volumen $\rho = \frac{m}{V}$. El recíproco de la densidad es el volumen específico v, que se define como el volumen por unidad de masa. Es decir $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$.

Por otra parte, en la generalidad de los textos de Cálculo, respecto de la temática relacionada con el concepto de límite, plantean como algo importante, el cálculo del límite de una función f, definida por medio de un cociente de otras dos funciones $\left(f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\right)$, cuando la variable tiende a un valor a, para el cual ambas funciones (numerador y denominador) valen cero ($p(a) = q(a) = 0$), es decir, cuando se presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Es este sentido, una vez que se ha la definido el límite y se han expuesto algunos teoremas para el cálculo del límite (generalmente sin demostrar) se consideran algunos casos simples, por ejemplo, cuando numerador y denominador tienen a $x - a$ como factor. Para casos más complejos la respuesta se da hasta después de definir la derivada, introduciendo la “regla de L’Hôpital”, por medio de la cual se puede calcular el límite para esta y otras formas indeterminadas. En cuanto a la interpretación gráfica, el asunto parece no ser tan importante y se aborda posteriormente, hasta que se habla de la continuidad, haciendo referencia a la discontinuidad "evitable".

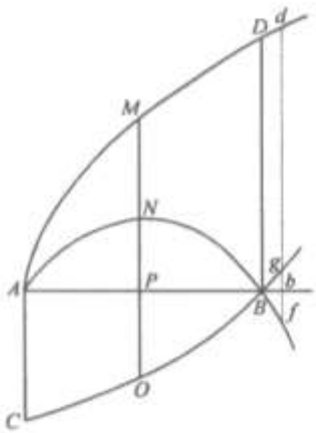

Figura 1. Proposición 1 de la sección IX del *Análisis* de L'Hôpital. Figura tomada de la fuente consultada

Veamos, ahora, el planteamiento original del marqués de L'Hôpital, en su *Análisis de los infinitamente pequeños*, escrito a fines del siglo XVII. En la proposición I de la novena sección (de diez), titulada "Solución de algunos problemas que dependen de los métodos precedente", aborda el siguiente problema:

> *Sea* AMD *una línea curva* (*AP* = *x*, *PM* = *y*, *AB* = *n*) *tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando x = a; es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B* (figura 1 en este documento). *Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD*. L'Hôpital (1998)

Así pues, L'Hôpital se plantea el problema de determinar por dónde pasa la gráfica de la función (definida por un cociente) cuando ambas funciones (numerador y denominador) se anulan. En términos del Cálculo escolar actual, está pasando por alto que la función cociente no está definida en esa situación.

En el caso de las escuelas de ingeniería, cabe preguntarse qué tan importante es indicar que, en este caso, a la gráfica sólo le hace falta un punto, o bien si podemos "ignorar el agujero" indicando que el cálculo del límite nos sirve para ver "por qué punto pasa la gráfica", tal como lo hacía L'Hôpital.

3. El Cálculo diferencial

En la versión leibniziana del Cálculo, la diferencial de una cantidad variable se definía como un incremento infinitamente pequeño de la misma. Esa acepción se conserva hasta nuestros días, en los textos de ciencias de la ingeniería, de manera que, un incremento finito de la temperatura T de un gas, por ejemplo, se denotará mediante ΔT, mientras que un incremento infinitesimal de la misma, es decir, una diferencial de la temperatura se denotará mediante dT.

Desde esta perspectiva, al introducir los conceptos relativos al movimiento rectilíneo, por ejemplo, si se considera que una partícula se desplaza una distancia Δs en un tiempo Δt se dirá que la partícula se movió con una velocidad promedio $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, mientras que, si se desplaza una distancia ds en un tiempo dt se dirá que la partícula se movió con una velocidad (instantánea) $v = \frac{ds}{dt}$.

Sin embargo, en los textos actuales de Cálculo, cuando se define la derivada y se presenta la notación leibniziana $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde $y = f(x)$, se hace hincapié en que no debe verse $\frac{dy}{dx}$ como un cociente, ya que dx y dy no tienen ningún significado por separado. Cuando posteriormente se define la "diferencial" de una función, más bien se define la aproximación lineal del incremento de la función: $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$, donde dx y dy son cantidades finitas.

Actualmente, en los textos de Mecánica (utilizados en las escuelas de ingeniería) se introduce la velocidad como un límite, aunque luego se opera con ella como si tratara de un cociente de diferenciales. Un caso interesante, a este respecto, es el que se observa en los textos de Meriam. En la primera edición, de 1952, se indica:

> La velocidad instantánea v en cualquier posición sobre su trayectoria es la razón instantánea temporal de cambio del desplazamiento o $v = \frac{ds}{dt}$ [...] La aceleración instantánea a de un punto en cualquier posición sobre la trayectoria es la razón temporal instantánea de cambio de la velocidad $a = \frac{dv}{dt}$ o $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Eliminando dt entre [estas ecuaciones], se obtiene una relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración: $v\,dv = a\,ds$. Meriam (1952).

Casi medio siglo después, en la tercera edición, se dice lo siguiente:

> A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero en el límite, la velocidad media tiende a ser la velocidad instantánea del punto, la cual es $v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, o sea $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ [...] A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero, la aceleración media tiende a ser la aceleración instantánea del punto, la cual es $a = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, o sea $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ o $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ [...] Eliminando el tiempo dt entre estas ecuaciones, resulta una ecuación diferencial que relaciona el desplazamiento, velocidad y aceleración: $v\,dv = a\,ds$ o bien $\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$. Meriam y Kraige (1998).

En el texto original se hace una llamada a pie de página en donde se indica que «Las cantidades diferenciales se pueden multiplicar y dividir de la misma forma que las cantidades algebraicas». Así pues, los autores utilizan la derivada como un límite, pero, inmediatamente después, como un cociente.

4. El Cálculo integral

En los textos de Cálculo, el proceso de integración para obtener una expresión, para una cierta cantidad variable, tiene lugar a partir de sumas de Riemann. El valor de la cantidad buscado se aproxima por medio de una suma cuyos términos se expresan en función de una variable, y el valor buscado se obtiene mediante "el paso al límite", cuando cada uno de los términos tiende a cero y el número de términos tiende a infinito.

Por ejemplo, cuando se trata de calcular la masa de una placa plana, esta se aproxima como la suma de las masas de pedazos de área ΔA de la placa, considerando como densidad de cada pieza, la que se mide, por ejemplo, en el centro de la pieza. Es decir $m \cong \delta(x, y)\Delta A$, siendo ΔA un rectángulo de lados Δx y Δy, de manera que $\Delta A = \Delta x \Delta y$, y $\delta(x, y)$ es la densidad en el punto (x, y), que puede ser el centro del rectángulo. Luego se hacen tender Δx y Δy a cero y se obtiene una integral doble.

En los textos de ciencias de la ingeniería, en cambio, en pocas ocasiones se procede de esta forma, más bien se hace a la manera leibniziana, eligiendo una parte infinitamente pequeña de la cantidad buscada (elemento o diferencial) y se suman (integran) luego esos elementos.

Tomemos, por ejemplo, el texto de Estática de Hibbeler, publicado hace menos de una década, y veamos cómo se procede para determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sólido, para lo cual se tiene como antecedente la determinación de la resultante (suma) de un sistema de fuerzas distribuidas, así como de su punto de aplicación. Para la magnitud de la resultante y con referencia a la figura 2 se indica:

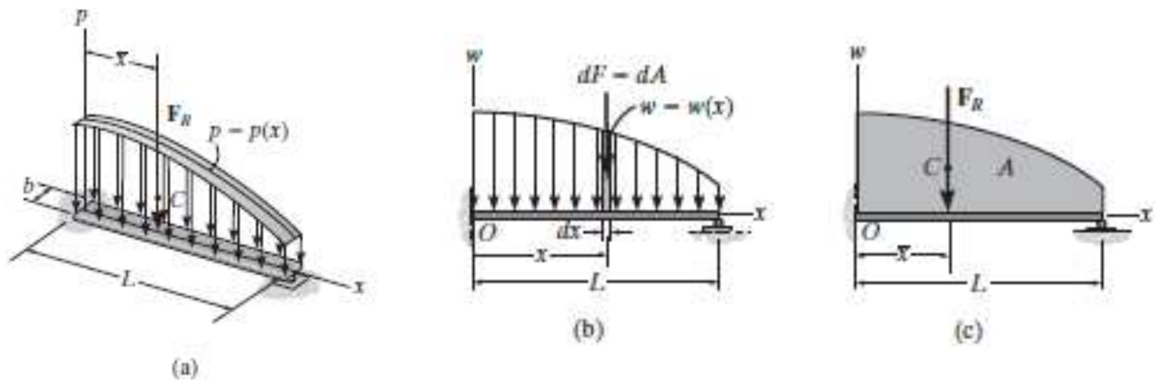

Figura 2

A partir de la ecuación $F_R = \sum F$, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es equivalente a la suma de todas las fuerzas en el sistema. En este caso, debemos usar integración puesto que hay un número infinito de fuerzas paralelas $d\mathbf{F}$ que actúan sobre la viga, figura 2b. Como $d\mathbf{F}$ actúa sobre un elemento de longitud dx, y $w(x)$ es una fuerza por unidad de longitud, entonces $dF = w(x)dx = dA$. En otras palabras, la magnitud de $d\mathbf{F}$ se determina a partir del *área* diferencial sombreada dA bajo la curva de carga. Para toda la longitud L:

$$F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$$

Por consiguiente, la magnitud de la fuerza resultante es igual al área total A bajo el diagrama de carga, figura 2c. Hibbeler (2010).

Observemos que, en todo momento se utiliza una terminología infinitesimalista: número infinito de fuerzas, elemento de longitud dx, integrar es sumar una infinidad de cantidades infinitamente pequeñas, área diferencial dA. El autor no considera necesario o apropiado recurrir al límite.

Para ubicar el punto de aplicación de la fuerza resultante se indica:

Aplicando la ecuación $M_R = \sum M_o$, la ubicación $\tilde{x}$ de la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ puede determinarse igualando los momentos de la fuerza resultante y de la distribución de fuerzas con respecto al punto O (el eje y). Como $d\mathbf{F}$ produce un momento de $x\, d\mathbf{F} = x\, w(x)\, dx$ con respecto a O, figura 2b, entonces, para toda la longitud

$$\bar{x} F_R = -\int_L x w(x) dx$$

Al despejar $\tilde{x}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x) dx}{\int_L w(x) dx}$$

Esta coordenada x, ubica el centro geométrico o *centroide* del *área* bajo el diagrama de carga distribuida. *En otras palabras, la fuerza resultante tiene una línea de acción que pasa por el centroide C (centro geométrico) del área bajo el diagrama de carga*, figura 2*c*.

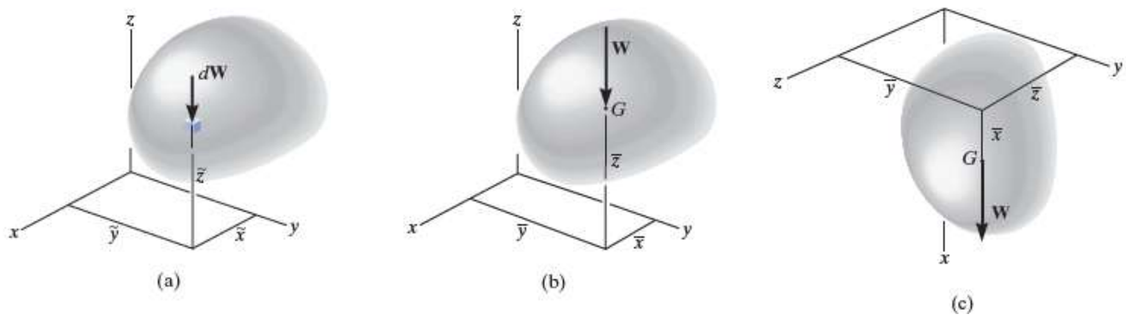

Figura 3

Con este antecedente, para ubicar el centro de gravedad de un cuerpo, Hibbeler indica:

Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso dW, figura 3*a*. Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un solo punto llamado el *centro de gravedad*, *G*, figura 3*b*. […] Con los métodos delineados anteriormente, el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir $W = \int dW$.

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje y, se determina al igualar el momento de W con respecto al eje y, figura 3b, con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si dW se ubica en el punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, figura 3a, entonces $\bar{x}W = \int \tilde{x}\, dW$. De la misma manera, si se suman los momentos con respecto al eje x, $\bar{y}W = \int \tilde{y}\, dW$. Por último, imagine que el cuerpo está fijo dentro del sistema de coordenadas y este sistema se gira 90° con respecto al eje y, figura 3c. Entonces la suma de los momentos con respecto al eje y es $\bar{z}W = \int \tilde{z}\, dW$. Por lo tanto, la ubicación del centro de gravedad G con respecto a los ejes x, y y z se convierte en

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$

Luego llega a las expresiones correspondientes al centro de masa al considerar, de acuerdo con la segunda ley de Newton, el peso del cuerpo (fuerza) como el producto de la masa por la aceleración gravitatoria (supuesta constante):

> A fin de estudiar *la respuesta dinámica* o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar el centro de masa del cuerpo C_m, figura 9-2. Esta ubicación puede determinarse al sustituir $dW = g\ dm$ en las ecuaciones anteriores. Como g es constante, se cancela y entonces
>
> $$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\ dm}{\int\ dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\ dm}{\int\ dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\ dm}{\int\ dm}$$

Finalmente, llega a las expresiones para las coordenadas del centroide o centro geométrico del sólido, al considerar homogéneo el material componente del cuerpo:

> Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad ρ será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen dV tiene una masa $dm = \rho\ dV$. Al sustituir esto en las ecuaciones anteriores y al cancelar ρ, obtenemos fórmulas que localizan el centroide C o centro geométrico del cuerpo; a saber
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \ldots\ldots \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

Observemos aquí que, en las expresiones anteriores, el símbolo de integral indicaba la suma de elementos (partes infinitamente pequeñas) de alguna cantidad, el peso es la suma de elementos de peso $W = \int\ dW$ o la masa es la suma de los elementos de masa $m = \int\ dm$. En estas últimas ecuaciones se añade V como un subíndice en cada uno de los símbolos de integral, lo cual nos indica que los dV son elementos que deben tomarse de V. Lo mismo encontramos en la ecuación $F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$, obtenida anteriormente, los dx son elementos de L y los dA son elementos de A.

Así pues, como lo observan Arcos y Sepúlveda (2011), el reconocimiento de las diferenciales como cantidades infinitamente pequeñas permite dar un significado geométrico a las simbologías utilizadas para cada uno de los distintos tipos de integral: dx es un elemento de un segmento rectilíneo (integral simple), dA es un elemento de una parte del plano, dV es un elemento de una región sólida, etcétera.

Así, procediendo de manera similar, Hibbeler obtiene las coordenadas del centroide de una región plana:

> Si un área se encuentra en el plano $x - y$ y está delimitada por la curva $y = f(x)$ […] su centroide pertenecerá a este plano y podrá determinarse a partir de integrales
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

Finalmente, para el caso del centroide de una barra o alambre curvilíneo (línea), Hibbeler indica:

> Si un segmento de línea (o barra) pertenece al plano $x - y$ y puede describirse mediante una curva delgada $y = f(x)$, figura 4, entonces su centroide está determinado por
>
> $$\overline{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \overline{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

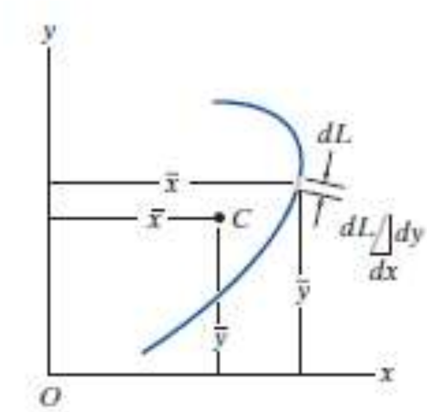

Figura 4

Indicando, enseguida, como obtener algunas expresiones para el elemento de arco dL:

> Aquí, la longitud del elemento diferencial está dada por el teorema de Pitágoras, $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, que también se puede escribir en la forma $dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ o bien $dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$.

5. Conclusión

Por lo que puede observarse en los textos utilizados en los cursos correspondientes, la manera en la que los conceptos básicos del Cálculo se utilizan para abordar y resolver problemas propios de las ciencias de la ingeniería es claramente más cercana a las versiones originales del Cálculo, en las que ideas como las relacionadas con lo infinitamente pequeño resultan indispensables, que a la versión derivada de los trabajos de Cauchy, basada en el concepto de límite, que es la que generalmente se ofrece en las escuelas de ingeniería.

Por otra parte, se puede decir que, en la segunda mitad del siglo pasado, la matemática escolar, en las escuelas de ingeniería, sobre todo los cursos de Cálculo ponían el énfasis en el rigor lógico. Sin embargo, ante la evidencia de las dificultades que el entendimiento de los conceptos del Cálculo disminuía notablemente con una presentación basada en el rigor, el énfasis se movió hacia aspectos de carácter operativo y algorítmico.

Este cambio no propició un mejor entendimiento y uso de los conceptos matemáticos, a la hora de ponerlos en juego para abordar y resolver problemas propios de las ciencias de la ingeniería y para la modelación matemática de problemas físicos, tareas indispensables para una buena formación escolar de los ingenieros.

Considerando esto y lo expuesto en este trabajo cabe reflexionar sobre la elaboración de propuestas didácticas para la presentación de los conceptos del Cálculo, de manera que se perciba una continuidad al momento de utilizar esos conceptos en contextos propios de las ciencias de la ingeniería. Una de tales propuestas sería una en la que lo infinitesimal tenga cabida.

Si además se aprovechan los recursos tecnológicos disponibles en la actualidad, se puede hacer una presentación en la que los aspectos operativo y algorítmico disminuyan su importancia, de manera que los propósitos de los cursos de Cálculo sean los de habilitar a los estudiantes en esas dos competencias matemáticas clave: la solución de problemas y la modelación matemática.

Bibliografía

Arcos, I. (2000). *Acerca de la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería. Un acercamiento infinitesimalista*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Arcos, I., Sepúlveda, D. (2011). La diferencial de área, una perspectiva infinitesimalista. *El Cálculo y su enseñanza*, 3, 19-33.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Boucharlat, J. L. (1858). *Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, Paris: Mallet-Bachelier.

Burghardt, M. D. (1984). *Ingeniería Termodinámica*. Segunda edición. México: Harla.

Carnot, L. (1921). *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal*, París: Gauthier-Villars, reimpresión de la segunda edición de 1813.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis*. México UNAM. Versión en español basada en los trabajos originales en francés: Cours d'analyse (1821) y Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal (1823).

Çengel, Y. A., Boles, M. A. (2015). *Termodinámica*. Octava edición. México: Mc Graw Hill Education.

Courant, R., Robins, H. (2010). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.

Grattan-Guinness, I. (1991), ¿Qué es y qué debería ser el cálculo? *Mathesis*, 7 (3), 363-387.

Hibbeler, R. C. (2010) *Ingeniería mecánica. Estática*. Decimosegunda edición. México: Pearson Educación.

L'Hôpital, M. de. (1998), *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: UNAM. (Versión en español del original en francés: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, de 1696).

Meriam, J. L. (1952), *Mechanics II, Dynamics*. New York: Wiley.

Meriam, J. L., Kraige, L. G. (1998), *Mecánica para ingenieros. Dinámica*. Tercera edición, Barcelona: Reverté.