CONCEPTUALIZACIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL A PARTIR DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

EL CÁLCULO Y SU ENSEÑANZA

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Luis Carlos Rojas Flórez[1]
Hugo Rogelio Mejía Velasco[2]
Pedro Vicente Esteban Duarte[3] [1]

Recibido: 01 de mayo de 2019,
Aceptado: 12 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:
Luis Carlos Rojas Flores
luis.rojas@cinvestav.mx

Resumen. Se plantea una propuesta basada en una secuencia instruccional de actividades, articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, para el aprendizaje de la noción de pendiente de una recta en el espacio, como prerrequisito para la conceptualización de la derivada direccional. El diseño de las actividades se centra en presentar dinámica y explícitamente los elementos conceptuales inmersos en esta noción, como vector posición, dirección y las variaciones horizontales y verticales en el plano y en el espacio. Se prueba en un grupo de 10 estudiantes de ingeniería que recién se inician en el estudio del cálculo multivariante. En vista del contenido tecnológico utilizado, se escogió como marco de referencia para el análisis de los resultados, el Enfoque Instrumental. Los resultados muestran que presentar explícita y de manera gráfica este concepto, junto a elementos dinámicos que permitan explorarlo desde diferentes perspectivas, favorece el entendimiento y conceptualización de la derivada en el espacio.

Palabras clave: Vector posición y dirección, variaciones en el espacio, pendiente en el espacio, derivada direccional, enfoque instrumental.

Abstract. A proposal was planned based on an instructional sequence of activities, articulated with two- and three-dimensional dynamic objects created using the GeoGebra software, for the learning of the notion of a slope on a straight line in space, as a pre-requirement for the understanding of the concept of directional derivative. The design of the activities is centered on presenting in a dynamically and explicitly the conceptual elements immersed in this notion, like vector position, direction, and horizontal and vertical variations on the plane and on space. A group consisting of 10

[1] *Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I.P.N/ CINVESTAV/México/ Correo:* luis.rojas@cinvestav.mx
[2] *Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I.P.N/ CINVESTAV/México/ Correo: hmejia@cinvestav.mx*
[3] *Universidad EAFIT /Colombia/ Correo: pesteban@eafit.edu.co*

students who recently began their studies of multivariate calculus is tested. Taking in consideration the technological concept used, the Instrumental Approach was chosen as framework for the results analysis. The results show that presenting in an explicit and graphic way this concept, along with dynamic elements that enable exploring it from different perspectives, encourages the understanding and conceptualization of the derivative on space.

Keywords: Vector position and direction, variations on space, slope on space, directional derivative, instrumental approach.

1. Introducción

La derivada direccional es un concepto de vital importancia en las carreras de ingeniería a nivel universitario. Esta noción que involucra y se deriva de la pendiente de una recta en el espacio, provee de herramientas conceptuales al estudiante que debe utilizar en problemas, situaciones o construcciones de nuevos conocimientos que se le presentan durante el transcurso de su carrera universitaria. A pesar de esto, y a diferencia del cálculo diferencial en una variable donde existen gran cantidad de literatura en torno a propuestas de enseñanza y de aprendizaje, de la derivada (Depool, 2005; Sánchez, García, y Linares, 2008; Barragués, Morais, Juncal, y Guisasola, 2013) son pocas las publicaciones en educación matemática que se han ocupado específicamente de la comprensión de este concepto.

En este sentido, la enseñanza y el aprendizaje de la derivada direccional para funciones de dos variables, difiere en muchos aspectos de la derivada para funciones de una variable, esto se puede ver reflejado en los libros de textos que con mayor frecuencia utilizan los maestros y alumnos como guía en el aula de clase. Por ejemplo, para el cálculo de funciones de una variable, antes de introducir la noción de la derivada, se presentan de manera explícita elementos asociados al concepto de pendiente de una recta, incluyendo registros gráficos, algebraicos y numéricos, que posteriormente se utilizan para su conceptualización. A diferencia de esto, para funciones de dos variables no se incluye este contenido temático, la primera discusión del concepto de pendiente en el espacio, se presenta con la introducción de las derivadas parciales. Dicho de otra manera, no se tiene en cuenta la noción de pendiente de una recta para conceptualizar la definición de la derivada direccional como el límite de incrementos para una función de una variable, y mucho menos la noción de pendiente de una recta sobre un plano no vertical, para conceptualizar el teorema que relaciona el operador gradiente y un vector unitario con la derivada direccional. No es claro el porqué de esta decisión; no obstante, la naturaleza de la presentación de este concepto en los libros de texto, sugiere que los autores consideran que los estudiantes pueden extender de manera natural el concepto de pendiente de dos a tres dimensiones y, en consecuencia, no es necesario presentarlo explícitamente (McGee y Moore, 2015), algo que en la realidad no ocurre.

Quizás por lo anterior, usualmente el énfasis en su enseñanza se centra en el desarrollo de procedimientos algebraicos, sin que se llegue a evidenciar la dinámica del cambio que involucra el pensamiento variacional del concepto pendiente en el espacio. En este sentido Martínez-Planell et al. (2015) establecen que, “La idea de la derivada direccional es difícil para la mayoría de los estudiantes y necesitan ayuda para entender incluso las nociones más elementales…carecen de una comprensión geométrica de los componentes fundamentales implicados en la definición de una derivada direccional. (p. 361)”, de igual modo, McGee et al. (2015), hacen énfasis en esta misma problemática e indican que, cuando no se presentan registros semióticos asociados al concepto de pendiente antes de introducir la derivada en el espacio, se presentan dificultades en su entendimiento. Por ello sugieren que, “Si la pendiente en 3D no se presenta explícitamente, los estudiantes luchan con las conversiones asociadas con la pendiente en 3D; por ello, tienen un éxito muy limitado con los tratamientos y conversiones asociadas a la derivada en el espacio. (p.25)”.

En resumen, podemos establecer que la problemática de enseñanza y de aprendizaje de la derivada direccional para funciones de dos variables, recae en gran parte en la comprensión geométrica de la noción de pendiente de una recta en el espacio. Por ello, creemos que antes de introducir la noción de la derivada direccional, se debe ayudar a los estudiantes a construir geométricamente una concepción sólida de la noción de pendiente de una recta en dos dimensiones (sobre el plano bidimensional xy) a partir de los procesos variacionales (cambios verticales y horizontales); y luego, trasladar estas mismas ideas a una recta y a un plano en el espacio, que posibilite posteriormente un descubrimiento y conceptualización gradual de la derivada direccional.

Dicho esto, nuestra propuesta se basó en una serie de actividades de aprendizaje, articulada con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, que tenían como objetivo ayudar a los estudiantes a construir una concepción geométrica sólida de la noción de pendiente de una recta en el espacio, que sirviera de puente para la conceptualización de la derivada direccional como el teorema que la relaciona con el operador gradiente. Así, en este artículo exponemos algunos resultados de esta propuesta, detallaremos dos de las actividades de la secuencia instruccional, la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes, y la manera como solventan las dificultades de comprensión de la noción de pendiente en el espacio en interacción con los elementos gráficos, geométricos y textuales de cada uno de los objetos.

Por otro lado, en vista del componente tecnológico utilizado, para el análisis de los datos derivados de la aplicación metodológica, resultó necesario contar con un enfoque teórico que tuviera en cuenta el carácter no trivial del uso de la tecnología como instrumento de aprendizaje. Por esta razón, seleccionamos como marco de teórico de referencia, para el análisis de la información recolectada, el Enfoque Instrumental (este enfoque se analizará en la siguiente sección).

2. El enfoque instrumental

El énfasis del enfoque instrumental recae en la actividad humana que, en su intento de proporcionar una matemática funcional y más asequible, incorpora un **artefacto** tecnológico digital para la resolución de una tarea. Este artefacto no es siempre un objeto material en su conjunto, por ejemplo, un módulo de cálculo simbólico de un software puede verse como un artefacto, e inclusive una representación dinámica o estática realizada con el mismo software. Sin embargo, un artefacto en desuso no es más que una herramienta desprovista de significado, es la persona o el sujeto quien a través de la interacción con este o en ocasiones con la ayuda de alguien, debe vislumbrar la intencionalidad para el cual fue construido, percibir su propósito y finalidad.

Es precisamente a través del uso del artefacto, cuando la persona desarrolla medios que le permiten descubrir la manera en que éste potencia sus capacidades para el tipo de tarea o actividad para el cual fue diseñado. Este proceso de interacción requiere que la persona desarrolle esquemas mentales en el sentido de Vergnaud[2], que involucran habilidades en el uso del artefacto y conocimiento del contexto (en nuestro caso matemático) en las que el artefacto es útil. Es precisamente aquí, donde el artefacto que, en nuestro caso son objetos dinámicos, se convierte en un **instrumento** que media la actividad para el cual fue diseñado.

En este sentido, Rabardel (2002) introduce la noción de **esquema de utilización**, que describe como un esquema que organiza la actividad con un artefacto asociado con la realización de una tarea dada. Distingue entre dos tipos de esquemas de utilización: **esquemas de uso**, que están orientados al manejo técnico sobre el artefacto, se enfocan en tareas secundarias correspondiente a acciones específicas relacionadas directamente con su uso (por ejemplo: activación de una calculadora, ajuste del contraste de pantalla, ajustes de zoom, ajustes gráficos, etc.) y **esquemas de acción instrumentados**, que consisten en las estrategias que derivan de la acción global sobre el artefacto; se pueden considerar como un conjunto de esquemas de uso que conducen a la realización de una tarea específica sobre el objeto en actividad, por ejemplo: cálculo de pendientes, del límite de una función, una derivada, interpretación geométrica de un concepto, etc.. Estos esquemas no son visibles, pero puede hacerse una reconstrucción a partir de las evidencias elaboradas por el sujeto al momento de realizar la tarea. Estas evidencias llamadas **técnicas de acción instrumentadas**, es la parte observable de un esquema de acción instrumentado, y están conformados por un conjunto justificado de elementos matemáticos; en nuestro caso, evidencias en papel y lápiz, diálogos entre estudiantes, diálogos entre estudiantes y profesor, discusiones grupales, y otros, derivados de la interacción con los objetos.

Como hemos tratado de mostrar, el proceso de convertir un artefacto (objetos dinámicos) en un instrumento en manos de un sujeto es un proceso que está lejos de ser trivial, requiere tiempo y esfuerzo por parte de estudiantes y docentes, que implica un descubrimiento progresivo de las propiedades y características del artefacto. Drijvers y Trouche (2008) llaman a este proceso **la génesis instrumental**, e indican que es un proceso de apropiación, que permite que el artefacto medie la actividad matemática. Por otra parte, la elaboración de un instrumento por parte de un sujeto es un proceso que implica dos sentidos. Por un lado, está el proceso de **instrumentalización**, que está ligado al desarrollo de esquemas de uso orientados a la gestión técnica sobre el artefacto, se enfocan en tareas secundarias correspondientes a acciones específicas sobre el objeto. Este proceso puede estudiarse tanto desde el punto de vista de la estructura del artefacto, como del plano de su funcionamiento. En nuestro estudio, la instrumentalización se limita a esta última, en el sentido que el diseño de cada uno de los objetos está delimitado de manera tal, que los estudiantes no pueden modificar su diseño, más que con el ingreso de puntos, funciones, arrastre de elementos geométricos, zoom sobre vistas gráficas, y otros.

Vergnaud define un esquema como "una organización invariante de la conducta para una clase dada de situaciones." (Vergnaud, 2009, p. 88).

Por otro lado, está el proceso de **instrumentación**, que está ligado al desarrollo de esquemas de acción instrumentadas. Es aquí, donde las limitaciones y potencialidades técnicas y visuales del artefacto, conforman las formas de uso y comprensión conceptual que el sujeto puede adquirir a partir de la interacción con este. En este proceso el artefacto forma el pensamiento del usuario, e implica la organización de estrategias para la resolución de un problema. Para Trouche (2004) es precisamente en este proceso en el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto, es decir, le permite desarrollar una actividad dentro de ciertos límites.

3. Pendiente de una recta en el espacio, noción fundamental para la conceptualización de la Derivada Direccional.

La enseñanza y el aprendizaje de la derivada direccional, es una tarea que se considera bastante difícil. Su comprensión demanda la articulación de distintos conceptos en dos y tres dimensiones, que requieren la presentación de distintos registros e interpretaciones geométricas, que involucran relacionar cambios o incrementos variacionales en el espacio, que están ligadas a la noción de pendiente de una recta en el espacio.

De hecho, para conceptualizar la definición de la derivada direccional como el límite de una función de una variable[3], se debe tener claro la noción de traza, vector posición y dirección sobre el plano bidimensional xy, y el de pendiente de una recta secante en el espacio, lo que implica tener una imagen geométrica clara de los procesos variacionales en el espacio. A partir de ello, se debe efectuar un procedimiento de acercamientos análogo al realizado para funciones en una variable (ver Figura 1), para aproximar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto dado P de su dominio, en dirección de un vector unitario u, a través de la pendiente de la recta secante.

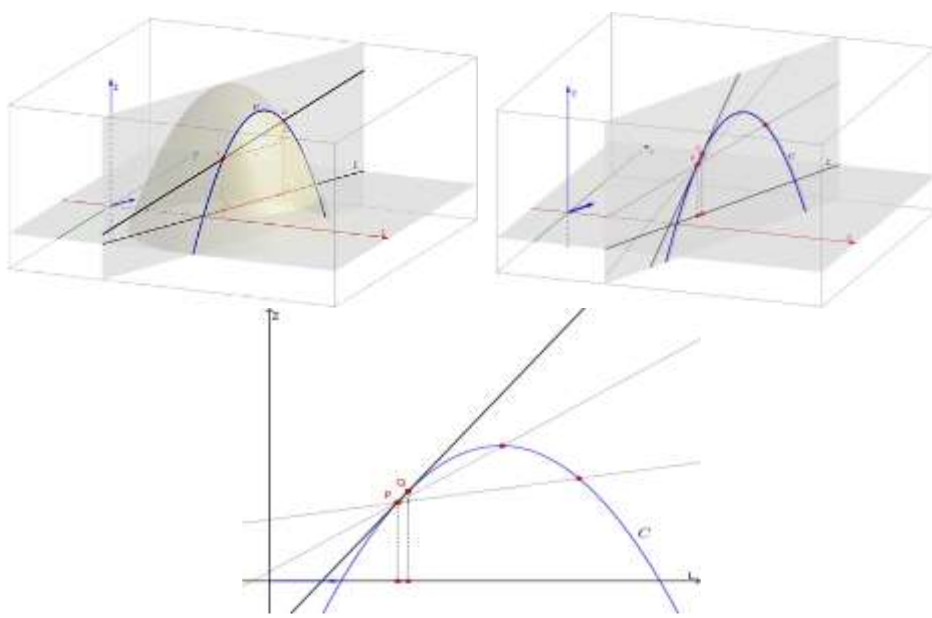

Figura 1: Aproximación a la pendiente de la recta tangente a una función $z = f(x, y)$.

En otros términos, la definición de la derivada direccional como un límite de una función de una variable, se puede ver como una extensión natural de la derivada para funciones de una

[3] $D_u f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\cos\theta, y+sen\,\theta)-f(x,y)}{t}$, donde $u = \cos\theta i + sen\,\theta j$.

variable; puesto que las rectas secantes y tangentes son rectas contenidas en el espacio bidimensional lz, donde l corresponde al eje dado por la intersección del plano vertical con el plano xy, como se observa en la Figura 1. Lo que no es claro, y que no se presenta en los libros de texto, es la construcción geométrica del teorema que relaciona el gradiente con la derivada direccional. De hecho, para conceptualizar y comprender este teorema como la pendiente de una recta tangente en un punto dado $P(x, y)$, a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ como: $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$, donde $\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle$, siendo f_x y f_y las derivadas parciales, y u un vector dirección unitario; implica tener claro fundamentalmente el significado geométrico de la pendiente de una recta en el espacio, que permita asociarlo con otros como, funciones de dos variables, pendiente de un plano no vertical en el espacio, plano y recta tangente, entre otros. Mas aún, para conceptualizar este teorema, hay que reconocer e interpretar gráfica y geométricamente cada una de estas nociones. Por ejemplo, se debe identificar que un plano tangente sobre la gráfica de una función $f(x, y)$ diferenciable en un punto P de su dominio, contiene infinitas rectas tangentes a f en P, además, reconocer el vector dirección $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$ en el cual se desea determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, así mismo, identificar las variaciones horizontales Δ_x y Δ_y, y verticales Δz_x y Δz_y, sobre un plano tangente en dirección de los ejes coordenados x e y respectivamente, y con base en ello, establecer las pendientes de las rectas tangentes contenidas en el plano tangente en estas mismas direcciones, como el cociente que relaciona la variación vertical y la horizontal, esto es, $m_x = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ y $m_y = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$, respectivamente, como se muestra en la Figura 2.

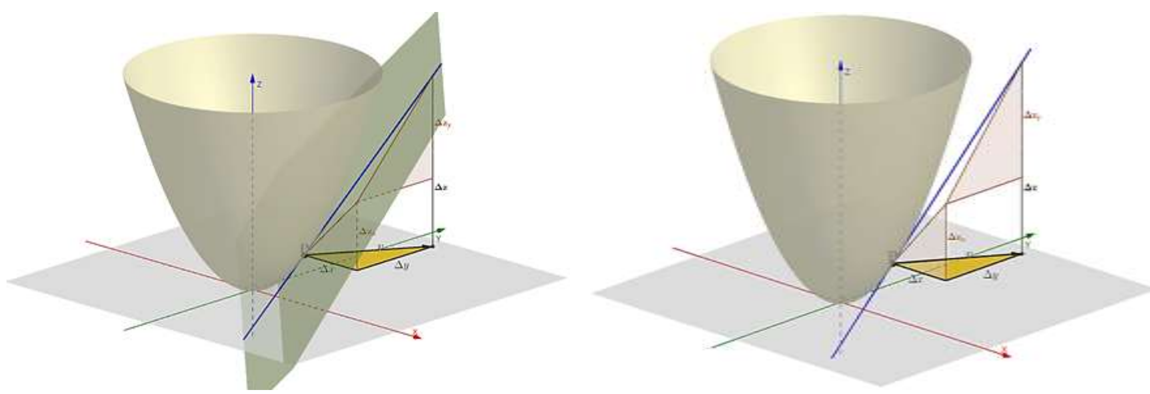

Figura 2: Elementos geométricos presentes en el teorema de la derivada direccional.

Posterior a ello, inferir la expresión que representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en P en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, como un cociente que relaciona la variación vertical total Δz con la variación horizontal[4], (longitud o norma del vector dirección), es decir, como $m = \frac{\Delta z}{\|v\|}$, identificando que esta pendiente puede expresarse como:

$$m_{\langle \Delta x, \Delta y \rangle} = \frac{m_x \Delta x + m_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = D_v f(x,y) = \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Expresión que representa la derivada direccional, y que al considerar un vector unitario u en la misma dirección del vector v, se reduce al teorema que se presenta en los libros de texto $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$, y que en forma general no se hace explícita.

Como se ha querido dar a entender, conceptualizar la derivada direccional para funciones de dos variables, demanda imperiosamente comprender geométricamente la noción de pendiente de una recta en el espacio y particularmente de una recta contenida en un plano, lo que implica construir una imagen clara de la noción de vector posición y dirección, y evidentemente de los procesos variacionales en el espacio, es decir los cambios o variaciones verticales y horizontales en dirección de los ejes coordenados x e y, y en otras direcciones. Por esta razón, nuestro estudio se basó principalmente en ayudar a los estudiantes a construir una concepción geométrica sólida de la noción de pendiente de una recta en el espacio, que les permitiera conceptualizar de una manera lógica la derivada direccional para funciones de dos variables, en particular del teorema que lo relaciona con el operador gradiente. Seguidamente se expondrá el método utilizado para dicha tarea y, posteriormente los resultados y conclusiones derivados de la aplicación metodológica.

4. El método

En este estudio planteamos una secuencia instruccional de actividades que integraba objetos dinámicos creados con el software GeoGebra en dos y tres dimensiones, dirigidas y estructuradas en torno a la compresión geométrica de la pendiente de una recta en el espacio, como prerrequisito para la conceptualización derivada direccional. Esta secuencia consistió en 6 actividades que se entrelazaban entre sí en todo momento, estas fueron: pendiente de una recta en dos dimensiones, vector posición y longitud de un vector sobre el plano bidimensional xy, pendiente de una recta en el espacio, pendiente de una recta sobre un plano no vertical, plano tangente y conceptualización de la derivada direccional como $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$.

Las actividades integraban por lo menos una pregunta a hacer resuelta en interacción con los objetos. El diseño de estos, se enmarco en tres diferentes tipos de acuerdo con la temática que se deseaba abordar y el aprendizaje que se deseaba adquirir. Se diseñaron objetos para operar y comparar, objetos para afianzar conceptos, y objetos para validar definiciones o teoremas. Todos y cada uno de ellos, incorporaban vistas en dos y tres dimensiones que presentaban componentes dinámicos gráficos, numéricos y textuales, para el uso de los estudiantes en la exploración de los conceptos, por ejemplo: movimientos o arrastres, de puntos, de rectas, de vectores, planos, segmentos, realizar zoom sobre los objetos, casillas para ingresar funciones, respuestas a las actividades, cuadros que incluían información textual, geométrica, numérica y algebraica, que se actualizaban de manera automática al manipular los distintos elementos del objeto, entre otros.

[4] A diferencia del caso de una variable, la variación horizontal en el espacio no produce un número, produce un vector.

Por otro lado, la experiencia se propuso a un grupo de 31 estudiantes de cuarto semestre de ingeniería, que recién se iniciaban en la asignatura de cálculo en varias variables, de los cuales 10 de ellos en forma voluntaria aceptaron participar de la investigación. En principio se les aplicó una entrevista de conocimientos previos, referente a la noción de pendiente de una recta en el espacio. Los resultados de esta entrevista coincidieron con los presentados por los autores citados en la introducción de este artículo, que en forma general apuntan a las dificultades que presentan los estudiantes en extender la noción de pendiente de dos a tres dimensiones, lo que dificulta el entendimiento conceptual de la derivada direccional.

En este artículo nos centraremos en dos de las actividades que consideramos esquematizan la secuencia de actividades, y forman los conceptos base para la conceptualización de la derivada direccional, en particular del teorema que la relaciona con el operador gradiente. Estas son, pendiente de una recta en el espacio y, pendiente de una recta sobre un plano no vertical. Junto a cada una de estas, se expondrán algunos de los resultados obtenidos y un análisis situado en nuestro marco teórico de referencia, el enfoque instrumental.

5. Resultados y análisis

A continuación, narraremos algunos resultados derivados de la aplicación de las dos actividades mencionadas anteriormente. Vale la pena mencionar que estas actividades fueron videograbadas utilizando un software que permitía capturar todo lo que aparecía en la pantalla del ordenador en forma de video, y el audio de la, o las personas que se encontraban frente a éste.

5.1 Pendiente de una recta en el espacio

Esta práctica se dividió en dos secciones, la primera hacía referencia a la dirección de una recta en el espacio, y la segunda al valor de su pendiente. En esta última se presentaron dos preguntas, la primera de ellas concerniente al signo de la pendiente de la recta y la segunda a su valor numérico. Seguidamente se narran algunos episodios de lo acontecido en esta actividad.

Iniciada la actividad, el docente propone considerar una nueva recta que pasa por los puntos $A = (1,1,2)$ y $B = (5,4,2)$, los estudiantes ingresan estos puntos en el objeto y mencionan: "El vector dirección sobre xy (plano bidimensional xy) sería, cinco menos uno cuatro, y cuatro menos uno, sería tres, $v = \langle 5-1, 4-1 \rangle = \langle 4,3 \rangle$,.., ahora miremos el signo de la recta,.., la pendiente es positiva", responde su compañera de trabajo "no, no es positiva,…, ¿no es cero?", En este instante comienza a manipular la vista gráfica y menciona "Si tú la miras acá, en z están a la misma altura, está en dos" la compañera se percata de esta situación y le responde: "Tienes razón, es cero, por tanto su pendiente también es cero". Esto nos indicó que el elemento visual del objeto indujo la respuesta de los estudiantes, la posibilidad de ver desde diferentes perspectivas los elementos geométricos, los ayudo a percatarse que los puntos por donde pasaba la recta tenían la misma altura, esto les facilitó ajustar la percepción del signo de la pendiente de la recta. Dicho de otra manera, desarrollaron un esquema de acción instrumentada (identificar el signo de la pendiente de la recta) a partir de un esquema de uso (manipular la vista 3D) ver Figura 3.

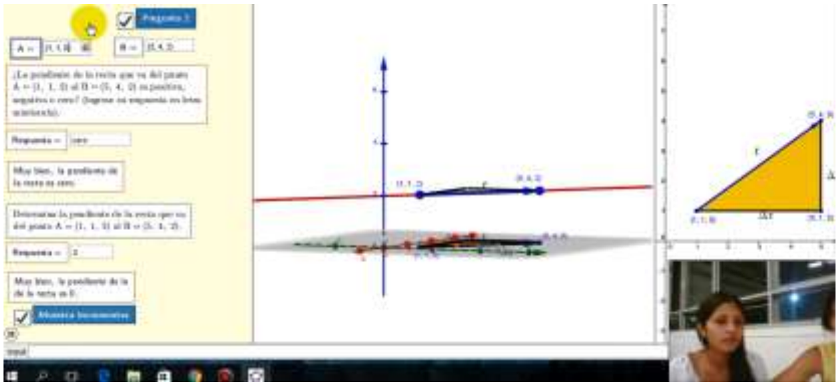

Figura 3. Solución a la actividad recta con pendiente cero.

Sigue la actividad, pero en esta ocasión los estudiantes ingresan los puntos los puntos $A = (1,0,1)$ y $B = (5,4,3)$, luego una estudiante menciona: "Entonces la dirección sería cabeza menos cola cuatro menos cero y, cinco menos uno, ósea cuatro coma cuatro ($v = \langle 4,4 \rangle$)" respuesta que resulta correcta, "Ahora la pregunta dos,…, la recta es positiva, mira que este es el punto A y este el punto B, está creciendo". En este episodio, la estudiante señalando en la pantalla, muestra a su compañera la dirección de recta (vector dirección sobre el plano xy), esto nos indicó que la imagen presentada en el objeto facilitó la interpretación del signo de la pendiente de la recta, lo que refleja un esquema de acción instrumenta.

Continua el dialogo, mencionando: "Entonces la pendiente sería,…, la variación de z que sería tres menos uno, sobre la raíz de la variación de x al cuadrado más la variación de y al cuadrado,…, cinco menos uno al cuadrado, más cuatro menos cero al cuadrado,…, entonces eso es igual a dos, sobre la raíz de dieciséis, más dieciséis,.., ósea dos sobre la raíz de treinta y dos", ingresan la respuesta en la casilla de entrada, siendo esta correcta ver Figura 4. Lo ocurrido en este episodio, confirmó la interiorización y movilización de los procesos variacionales del plano al espacio, en particular quedó claro que los estudiantes identificaron que la variación horizontal estaba dada por la magnitud del vector dirección representado sobre el plano xy, y además, que la variación vertical se determinaba realizando la diferencia entre las coordenadas z, de los puntos A y B, de acuerdo a la dirección del vector.

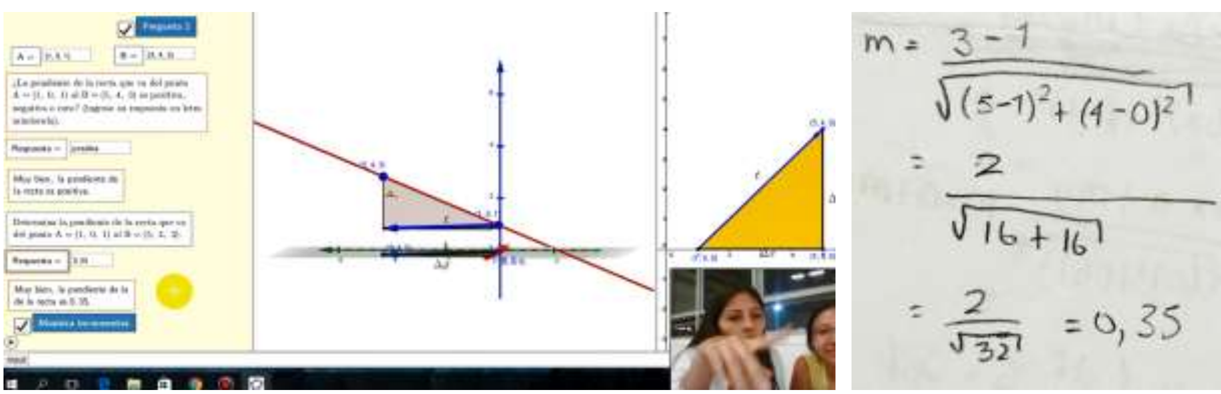

Figura 4. Solución a la actividad pendiente de una recta.

En forma general, las acciones realizadas por los estudiantes en esta actividad evidenciaron distintos esquemas de uso y de acción instrumentada que ayudaron a los estudiantes a dar un significado geométrico de la noción de pendiente de una recta en el espacio. En particular se identificaron esquemas de uso relacionados con el manejo de gráficos al manipular la vista 3D, al activar o desactivar casillas de control para exponer u ocultar objetos, al ingresar puntos en el espacio, y otras actividades de uso intencionadas, que llevaron a los estudiantes a instrumentalizar el objeto, es decir, adaptarse a su funcionalidad.

Por otro lado, el conjunto de todas estas acciones llevó a los estudiantes a comparar y estudiar la manera de determinar la pendiente de una recta de dos y tres dimensiones. Esto se apreció principalmente en las explicaciones (esquemas de acción instrumentadas) dadas por los estudiantes; por ejemplo, que la variación horizontal estaba dada por la magnitud del vector dirección, que la asociaron con el teorema de Pitágoras (actividad 2, vector posición y longitud de un vector), y así mismo, cuando describieron la manera de determinar la variación vertical, como la diferencia entre las coordenadas z de los puntos A y B.

El anterior análisis refleja que los estudiantes utilizaron el objeto dinámico de manera idónea para la resolución de las actividades. En otras palabras, se evidenció el proceso de instrumentalización en torno a los esquemas de uso que desarrollaron los estudiantes respecto a la manera adecuada de utilización de los elementos que constituían el objeto. Por otro lado, la consecución exitosa de las actividades demandó en los estudiantes crear estrategias de carácter geométrico, algorítmicas y explicativas en cada uno de los pasos utilizados durante la solución de las actividades. Es decir, se evidenció el proceso de instrumentación a través del desarrollo de esquemas de acción instrumentados como los descritos en los episodios anteriormente expuestos, que adaptaron para dar solución a las actividades.

5.2 Pendiente de una recta sobre un plano

Esta actividad planteaba determinar la pendiente de una recta sobre un plano no vertical en dirección de los ejes coordenados x e y, y posteriormente en otras direcciones. Vale la pena mencionar que la dirección de la recta contenida en el plano, está determinada por un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, lo cual nos permite definir la pendiente del plano en esta misma dirección. De otro lado, inicialmente se esperaba que los estudiantes reconocieran la pendiente del plano en dirección de los ejes coordenados x e y como $m_x = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ y $m_y = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$, y que estas coincidían con la pendiente de la recta en estas mismas direcciones; y luego, que utilizaran este hecho para conceptualizar la pendiente en cualquier otra dirección sobre el plano. Dicho esto, se pretendía que los estudiantes identificaran que el cambio vertical total Δz de la recta contenida en el plano en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, se podía determinar en términos de la suma de los cambios verticales sobre el plano, en las direcciones de los ejes de coordenados x e y, es decir $\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y$. Así mismo, se procuraba que el estudiante estableciera la expresión que representa la pendiente de la recta contenida en el plano, o lo que es lo mismo, la pendiente del plano en la dirección del vector v, como el cociente que relaciona la variación vertical total Δz con la variación horizontal (longitud del vector dirección v) es decir, $m_{\langle \Delta x, \Delta y \rangle} = \frac{\Delta z}{\|v\|} = \frac{\Delta z_x + \Delta z_y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$.

El docente inicialmente propuso determinar la pendiente del plano en dirección del eje x, mediante el vector $v = \langle 2,0 \rangle$. Los estudiantes comienzan la actividad generando un plano utilizando el botón "Generar plano", ingresan un punto $P = (6,2,3)$, el vector dirección v. Posteriormente, giran la vista gráfica 3D y ocultan el plano utilizando la casilla de control

“Plano”, quedando expuesta únicamente la recta. Como se puede observar en la Figura 5, en el cuadro de texto en la vista izquierda, aparecen los incrementos verticales y horizontales Δz_x, Δz_y, Δx y Δy, y además su respectiva representación gráfica en las vistas 2D y 3D. Con base en estas consideraciones, los estudiantes mencionan: “Bueno, la pendiente es delta de z, sobre delta de x, ó sea ocho sobre dos”. De este diálogo y de lo realizado en pantalla por los estudiantes, se observó que identificaron que la pendiente de la recta coincidía con la pendiente del plano. Esto se evidenció cuando ocultaron el plano, dejando únicamente la recta contenida en este, lo que les facilitó asociar dichas pendientes. Además, se pudo establecer que se apoyaron en la vista gráfica 2D para asociar la dirección y longitud del vector con el incremento horizontal Δx. Estas acciones evidenciaron esquemas de uso que realizaron los estudiantes sobre el objeto; por ejemplo, utilizar el botón para generar planos, ingresar vectores, ocultar los incrementos, el plano y otros. Como también, esquemas de acción instrumentados que llevaron a la resolución de la actividad.

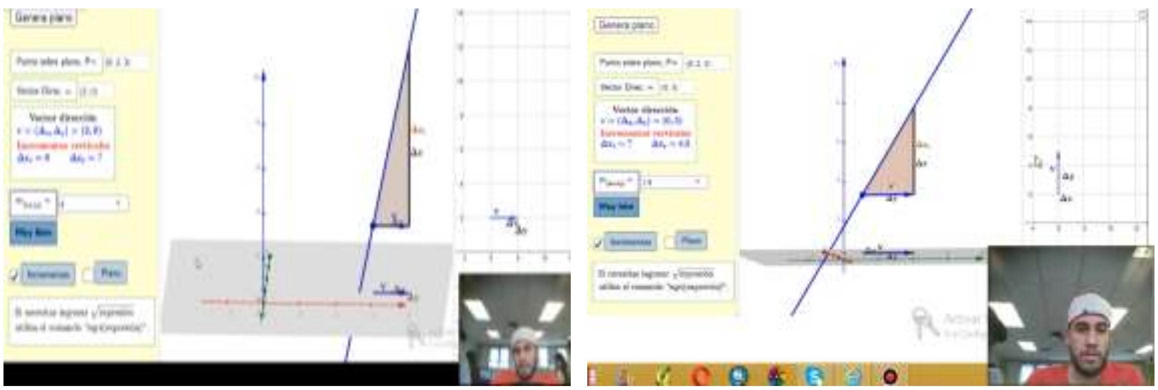

Figura 5. Pendniente del plano en dirección de los ejes x e y.

Luego, el docente propuso determinar la pendiente en dirección del eje y, mediante el vector $v = \langle 0,3 \rangle$, los estudiantes ingresan dicho vector, giran la vista gráfica 3D, esta queda apuntando al eje y, y resuelven la actividad sin ningún problema determinando dicha pendiente como $m = \frac{4.5}{3} = 1.5$, (ver Figura 5).

El siguiente problema, planteaba determinar la pendiente en una dirección diferente al eje x e y, en particular en dirección del vector $v = \langle 2,3 \rangle$, los estudiantes ingresaron dicho vector, giraron nuevamente la vista gráfica 3D, y mencionaron: “Sería delta de z,…, cuatro punto cinco, sobre raíz de delta de x, que sería dos,…, esto al cuadrado, más delta de y que es 3, esto al cuadrado, entonces quedaría,…,nueve veintiseisavos por raíz de trece, (racionalizan la expresión e ingresan $m = \frac{9}{26}\sqrt{13}$)”, respuesta que resultó incorrecta. En este último episodio se observó que los estudiantes tomaron como incremento vertical, el valor dado por Δz_y que correspondía a la variación vertical en dirección del eje y, que fue la utilizada en el anterior ejercicio, y no tomaron en consideración que la pendiente del plano que estaban determinando, no era en esta dirección. Los estudiantes al percatarse de que era incorrecta la solución dada, discuten sobre ello; luego, uno de los estudiantes señalando el gráfico le dice a su compañero: “Pero es que sería todo esto (señala el incremento vertical total Δz), …, pues ya no estamos con respecto a y, ni con respecto a x, estamos con todo esto completo (de nuevo señala con el mouse el incremento vertical total Δz)”. En este punto de la actividad, se observó que los estudiantes comenzaron a utilizar los elementos presentes en el objeto para iniciar la construcción geométrica de la expresión que representa la pendiente del plano en la dirección del vector $v =$

$\langle 2,3 \rangle$ (esquemas de acción instrumentado). Continua la discusión, uno de los estudiantes mientras gira la vista 3D, establece: “Me imagino que es sumar,…, se suma este con este (señala los incrementos verticales en dirección de los ejes coordenados x e y, es decir Δz_x y Δz_y),…”, su compañero de trabajo le pregunta, “¿será?”, a lo que él responde: “Si, pues mira que esta distancia (señala con el mouse el incremento vertical total Δz) es esta (Δz_x) más esta otra (Δz_y),…, visualmente es lo que entiendo” (ver Figura 6).

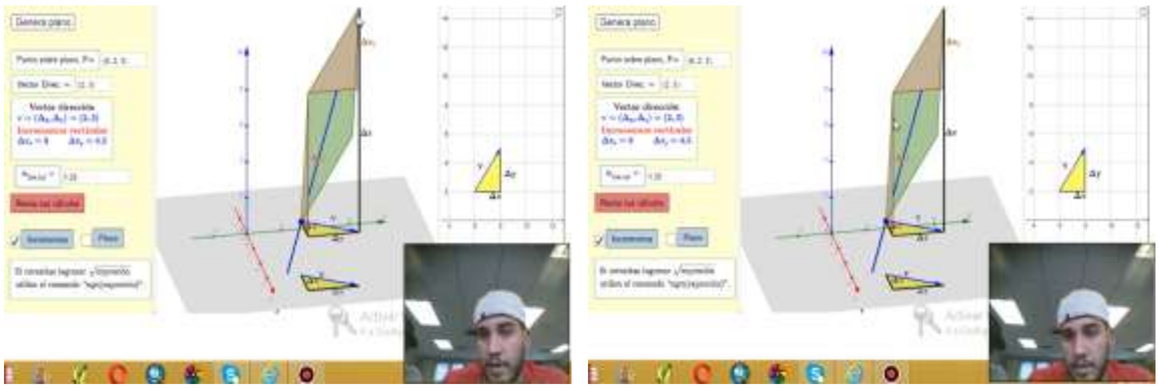

Figura 6. Interpretación geométrica del estudiante del incremento vertical total Δz.

Este episodio muestra claramente, que los estudiantes identificaron que la pendiente la recta coincidía con la pendiente del plano en dirección del vector v, y se valieron de este echo para establecer el valor del incremento vertical total Δz de la recta contenida en el plano, como la suma de los incrementos verticales sobre el plano en dirección de los ejes coordenados x e y. Lo anterior muestra un esquema de acción instrumentado que se originó mediante una discusión que giro en torno a la interpretación de los elementos presentes en el objeto; en particular de las variaciones verticales y horizontales en dirección de los ejes coordenados x e y sobre el plano. Posterior a ello, los estudiantes mencionan: “Entonces sería, veinticinco veintiseisavos, que multiplica a la raíz de trece (la respuesta la ingresan racionalizada, que es equivalente a $m = \frac{12.5}{\sqrt{13}}$)”, respuesta que resulta correcta.

De manera general, los anteriores resultados reflejaron que los estudiantes utilizaron los conocimientos adquiridos de la actividad de pendiente de una recta en el espacio, para dar solución a esta última. Esta transición evidenciada en el desarrollo y movilización de esquemas de uso y de acción instrumentadas (esquemas de utilización), como los descritos durante el desarrollo de la actividad, nos permitió afirmar que, el estudio de la pendiente de una recta sobre un plano en el espacio, permitió a los estudiantes interactuar con diferentes aspectos técnicos y conceptuales, que llevaron a la resolución exitosa de la actividad. De hecho, la situación problémica que presentaron los estudiantes al determinar la variación vertical total Δz, los obligó a considerar la concepción geométrica de dicha variación, y a partir de ello, establecer una expresión algebraica para conceptualizar la noción de pendiente sobre un plano, objetivo principal que se planteó lograr con esta actividad.

Finalmente, para nosotros fue claro que el componente visual y dinámico fue un elemento clave en el éxito de las actividades. En particular, la oportunidad que tuvieron los estudiantes de observar las variaciones en el espacio, y el vector posición que se mostraba en la vista gráfica

2D y 3D, junto a la manipulación de la vista gráfica 3D del objeto, facilitó a los estudiantes identificar que la pendiente de la recta coincidía con la pendiente del plano. Esto les ayudo a interpretar las pendientes en dirección de los ejes coordenados x e y, como $m_x = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ y $m_y = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ respectivamente, y como $m = \frac{\Delta z}{\|v\|} = \frac{\Delta z_x + \Delta z_y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ para la pendiente en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, en otras palabras la derivada direccional para funciones lineales de dos variables (planos de la forma $z = f(x, y) = a_1 x + a_2 y$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$). Finalmente, considerando un plano tangente a una función diferenciable de dos variables en un punto $P(x_0, y_0)$ de su dominio como se muestra en la Figura 2, se extiende la derivada direccional para este tipo de funciones como:

$$D_v f(x_0, y_0) = \frac{f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Posteriormente considerando un vector unitario $u = \langle a, b \rangle$ en la misma dirección del vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, el teorema que se presenta en los libros de texto como:

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = \nabla f(x_0, y_0).u$$

Donde $\nabla f(x, y) = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \rangle$ es el operador gradiente y $u = \langle a, b \rangle$, un vector unitario. Cabe mencionar que, estas consideraciones no se presentan en los libros de texto que con mayor frecuencia utilizan docentes y alumnos en el aula de clase. Por esto, uno de objetivos fundamentales de esta investigación, fue mostrar a los estudiantes esta relación geométrica.

6. Conclusiones

Consideramos que el diseño gráfico y dinámico de los objetos, junto al orden presentado de las actividades, ayudó a promover un significado geométrico de las nociones base contenidas en la derivada direccional. Observamos que facilitó la coordinación y movilización de esquemas de utilización, que ayudó a los estudiantes a crear una imagen clara de la noción de pendiente de una recta, particularmente una imagen y un significado geométrico sólido de los procesos variacionales, que les simplifico la manera de extender esta noción del plano bidimensional xy, al espacio; primero sobre una recta y luego sobre una recta contenida en un plano.

Lo anterior subraya la importancia de presentar explícitamente los elementos conceptuales inscritos en la noción de la derivada direccional, como prerrequisitos necesarios para su conceptualización. Como la pendiente de una recta en el espacio y la pendiente de una recta sobre un plano, específicamente haciendo hincapié en los vectores dirección junto las variaciones horizontales y verticales, que permita a los estudiantes identificarlos y, relacionarlos utilizando distintas representaciones (gráfica, numérica, algebraica y verbal), que les ayude posteriormente a asociarlos para conceptualizar la noción de la derivada en el espacio.

Por otro lado, consideramos que la posibilidad que tuvieron los estudiantes de observar de manera dinámica el vector dirección, las variaciones de rectas y planos en el espacio, la oportunidad de ver el objeto desde diferentes perspectivas, sumado a las herramientas que permitían mostrar u ocultar elementos del objeto, y otras, fue un aspecto decisivo en el nivel de entendimiento y abstracción que lograron de la noción de pendiente de una recta en el espacio, que consideramos facilitó la interpretación y conceptualización geométrica de la derivada direccional.

7. Bibliografía

Barragués, J. I., Morais, A., Manterola, M. J., and Guisasola, J. (2013). Una propuesta de uso de un classroom response system (crs) para promover clases interactivas de cálculo en la universidad. *Educación matemática*, 25(1):63-109.

Depool, R. (2005). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (pcs). *Números. Revista de Didáctica de las* Matemáticas, 62:3-31.

Drijvers, P. and Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 2:363-391.

Martínez-Planell, R., Trigueros, M., and McGee, D. (2015). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. *In Proceedings of the 37th anual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. East Lansing, MI: Michigan State University*.

McGee, D. L. and Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2):357-384.

Rabardel, P. (2002). People and technology a cognitive approach to contemporary instruments. *Retrieved December*, 15:2011.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., and Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2):267-296.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: *Guiding students command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for mathematical learning*, 9(3):281.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. Human development, 52(2):83-94.