El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018. Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p.31-50

Estrategia de enseñanza y aprendizaje para el estudio de los elementos característicos de la parábola

F. Cruz Cruz, J.J. Báez Rojas, y M.G. Corona-Galindo

senseicruzf30@gmail.com, jjbaezr@inaoep.mx, mcorona@inaoep.mx

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla

México

Resumen. El presente trabajo da cuenta de una estrategia didáctica para innovar el anquilosado proceso de enseñanza-aprendizaje de la parábola, en el Bachillerato General José Clemente Orozco de Tehuacán, Puebla, México. La propuesta está estructurada con diferentes actividades que se desarrollan en dieciséis sesiones-hora clase de 60 minutos cada una. Los resultados obtenidos en cada actividad, muestran el proceso gradual del aprendizaje. Finalmente, se acota que los estudiantes aplicaron los conocimientos adquiridos en la construcción de una cocina parabólica solar y en este trabajo se muestran también las evidencias del funcionamiento eficiente y eficaz de la ***propositio***.

Palabras clave: aprendizaje significativo, enseñanza-aprendizaje, parábola, cocina parabólica

Abstract. The present work shows a didactic strategy to innovate the staled teaching-learning process of the parabola, in the general high school Jose Clemente Orozco of Tehuacán, Puebla, México. The proposal is structured with different activities that take place in sixteen one-hour sessions of 60 minutes each one. The results obtained in each activity show the gradual process of learning. Finally, it is pointed out that the students applied the knowledge acquired in the construction of a solar parabolic cooker and this work shows the evidence of the efficient and effective operation of the proposal as well.

Keywords: significant learning, teaching-learning, parabola, parabolic cooker

Fecha de recepción: 03/08/18 Fecha de aceptación: 31/10/18

1. Introducción

El proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas debe ser re-direccionado a fin de que provoque un cambio significativo, tanto en la vida del estudiante como del docente; pues ambos deben ser capaces de resolver problemas académicos y de la vida diaria. De acuerdo con Madrid y Flores (2017), esto último, es difícil de lograr porque los estudiantes no comprenden los conceptos y el docente no reflexiona ni investiga para lograr una profunda formación en el estudiante, precisamente contrario a lo que propone, Gonzales, Zerpa, Gutiérrez y Pirela (2007). Por otro lado, Ausubel, D. Novak y Hanesian (2014), teórico cognoscitivista, postula que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva; mientras que Carrera y Mazzarella (2001), en su trabajo "Vygotsky Enfoque Sociocultural", afirma que el niño aprende socializando con los demás y construye un nuevo conocimiento a través de los recursos, medios, métodos o estrategias que el docente le provee.
Díaz Barriga (1997) cita que el aprendizaje no es una simple asimilación pasiva de información literal; pues el sujeto la transforma y estructura de tal manera que los materiales de estudio y la información exterior se interrelacionan e interactúan con los esquemas previos de conocimiento y las características personales del aprendiz. En cuanto a las matemáticas, algunos investigadores como Cuevas, Martínez, Pluvinage y Delgado (2012, 2013, 2018) introducen el concepto de pensamiento funcional (o cuarto estrato del pensamiento) como una etapa cognitiva del pensamiento matemático que hace posible que el estudiante pueda interactuar con el mundo real.

En cuanto al docente, a tenor de Pimienta Prieto y García Fraile (2012), se señala que las estrategias de enseñanza-aprendizaje son herramientas que el docente debe emplear para favorecer la adquisición de conocimientos de una forma permanente, tomando en cuenta las competencias específicas que se pretende desarrollar. Dichas estrategias se deben organizar secuencialmente para indagar conocimientos previos y lograr puentes cognitivos entre estos y el nuevo que se está exponiendo. En la misma línea, Celis, Sánchez, Martínez, Soberanes y Juárez (2014), mencionan que las estrategias didácticas deben señalar claramente los procedimientos, técnicas y recursos que motiven una fácil comprensión de los aprendizajes.

Respecto al tema que nos ocupa, Padrón, Gómez y Leal (2011), proponen una estrategia, fundamentada en la teoría de Vygotsky, para el aprendizaje de las Secciones Cónicas, correspondiente a la asignatura de Geometría II, que contiene el tema de la parábola, utilizando la Plataforma Virtual Moodle de la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo. Teniendo en cuenta la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Moreira, Ruiz (2013) y otros mencionan la necesidad de ir "Buscando estrategias que permitan lograr una mejor asimilación de los conceptos y que den un mejor sentido a las matemáticas en los estudiantes". Dicha propuesta se apoya en ideas constructivistas y en este marco implementa una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa (UEPS) como estrategia de enseñanza, específicamente en la enseñanza de la parábola como lugar geométrico, por su lado Ruiz (2013) propone un camino alternativo para enseñar la parábola como lugar geométrico con uso de TIC.

En el medio sociocultural en que se aplica la presente propuesta, se observa en los estudiantes, que asisten al curso de Geometría Analítica, grandes dificultades para comprender el tema de la parábola, sobre todo, el entendimiento de los elementos que la caracterizan, así como sus relaciones; debido a ello, demandan clases prácticas para aplicar los conocimientos adquiridos sobre el tema, condenando las exposiciones mecanizadas, pues aprenden sólo a substituir datos en las ecuaciones; en consecuencia, las califican de obsoletas, aburridas y cansadas. Para resolver esta problemática y en la línea de aplicación de las proposiciones de los autores antes mencionados, surgió la estrategia de enseñanza-aprendizaje que se expone en este trabajo. Ésta se fundamenta en el Cognoscitivismo, haciendo emerger pensamientos funcionales en el estudiante a través de una organización clara y secuencial de los conceptos fundamentales para aprender las peculiaridades de la parábola.

Para llevar a cabo este proyecto, recurrimos a la literatura especializada en la enseñanza de las matemáticas. Originalmente revisamos cerca de 53 documentos científicos, pero desechamos 31 porque no abordaban directamente el tema de la parábola, ni mostraban aplicaciones del constructivismo, mucho menos la manera de generar pensamientos funcionales en la empresa que nos ocupa. De los trabajos seleccionados en consonancia con nuestro objetivo, fijamos la atención en las alocuciones de los teóricos del aprendizaje constructivista, aquellos del aprendizaje significativo y en las experiencias publicadas por otros autores a fin de que, en conjunto, nos aleccionaran, para remozar nuestras ideas sobre el tema, hasta hacerlas vertebrar en una propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre los elementos de la parábola. Respecto a la selección de la muestra para aplicar la estrategia, seleccionamos a los nueve estudiantes que cursaron la asignatura de Geometría Analítica en el tercer semestre del Bachillerato General José Clemente Orozco de Tehuacán, Puebla, México y la llevamos a cabo en el semestre “A” de agosto-diciembre del 2015. La escuela mencionada se creó con el fin de atender a los estudiantes de la Sierra Negra de Puebla, que no habían aprobado el examen de ingreso a otros bachilleratos de Tehuacán. También ingresan jóvenes de la casa hogar Aldeas Infantiles SOS-Ayudando a la Niñez en México y de las Telesecundarias aledañas. Por si esto fuera poco, está ubicada en una zona de delincuencia liderada por los *huachicoleros* (ladrones de combustible) y los estudiantes que terminan su bachillerato se emplean en los comercios locales o se ocupan en el comercio ambulante. Debido a la mejora del aprendizaje que se logró, después de la aplicación de la estrategia, están llegando ahora a la escuela estudiantes de otras secundarias federales y tres estudiantes de otras preparatorias dejaron su *alma mater* e ingresaron al Bachillerato General José Clemente Orozco.

1.1 Contexto de la educación matemática en la región de aplicación de la propuesta

La educación en nuestro país se da en forma lineal en todos los niveles: una enseñanza conductista en donde el docente transmite contenidos y el estudiante memoriza con el fin de aprobar exámenes, esto es en consecuencia, un aprendizaje mecánico que al poco tiempo se olvida, por lo que el estudiante no logra desarrollar procesos cognitivos que lo lleven a razonar y afianzar el conocimiento. Por otro lado, algunos docentes se resisten a los cambios e innovaciones que requiere nuestra enseñanza y persisten en las mismas prácticas antiguas y tediosas. En este marco, Moreira (2017) afirma que el aprendizaje significativo es necesario como referente para la organización de la enseñanza en una cultura educativa en la que se estimule el aprendizaje mecánico y, consecuentemente, predomine la enseñanza para la solución de test. Asimismo, agrega que en la actualidad los profesores parecieran estar obligados a actuar solo como entrenadores de sus estudiantes para que aprueben dichos test.

En el Bachillerato General José Clemente Orozco de Tehuacán, Puebla, México, se observa que la enseñanza de las matemáticas (en particular la Geometría Analítica) se lleva a cabo en forma tradicional: un aprendizaje mecánico donde el docente expone y el alumno memoriza; después, en el mejor de los casos, los alumnos resuelven algunos ejercicios teóricos aplicando en forma directa las fórmulas expuestas en clase; pero cuando se cambia el problema a un contexto real los alumnos ya no responden. Como consecuencia, se obtienen malos resultados en el aprendizaje y se manifiestan con bajas notas en los exámenes.

Dentro de las teorías sobre el proceso enseñanza-aprendizaje, Ausubel (2014) y Moreira (2017), teóricos del aprendizaje significativo, señalan que los docentes deben partir de los conocimientos previos del alumno, sus representaciones, conceptos y proposiciones, que servirán de base para generar y cimentar nuevos conocimientos. Woolfolk (2010) en su libro de Psicología Educativa menciona que Vygotsky arguye que el aprendizaje significativo favorece la relación entre lo que el estudiante ya sabe (conocimiento previo) y lo que se desea que el aprendiz adquiera (Zona de desarrollo próximo). Por su lado, Moreira (2012) apunta que la variable que más influye en el aprendizaje significativo es el conocimiento previo, así como la intención del aprendiz ya que debe presentar una disposición al trabajo.

Por otro lado, El Sistema Educativo Nacional de Bachilleratos en México (SNB) está basado en el desarrollo de competencias (Diario Oficial, 2008) divididas en genéricas, comunes para todos los subsistemas, y disciplinares que corresponden a las diferentes áreas. Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad, así como el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Con respecto a las competencias, Pimienta Prieto y García Fraile (2012) argumentan a favor de que precisamente las estrategias de enseñanza aprendizaje ayudan a los docentes a desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes que facilitan la detección del nivel de conocimientos de los estudiantes con vías a organizar una secuencia didáctica eficaz. Para el presente trabajo, se retoman *ad litteram* algunas de las competencias genéricas y disciplinares que se describen para el área de las matemáticas en el documento oficial mencionado líneas arriba.

En el esquema expuesto, es toral la implementación de una estrategia didáctica que trace la hoja de ruta de la adquisición personal del conocimiento en forma gradual y que adminicule con desafíos el razonamiento crítico y la honestidad del estudiante; además de motivarlo y facilitarle el proceso de la generación del conocimiento. Después de haber diseñado la propuesta, su ejecución se llevó a cabo en dos fases: en la primera se puso en práctica para enseñar paso a paso los conceptos fundamentales que el estudiante debe saber sobre la parábola y, en la segunda, se aplicaron los conocimientos adquiridos para construir una cocina solar parabólica.

1.2 Planteamiento del problema de investigación

El propósito del presente trabajo es dar a conocer una estrategia para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre la parábola. Nuestra *propositio* está empotrada en la motivación del estudiante para aprender matemáticas, en el suministro de una diligencia para reforzar los conocimientos adquiridos y en la provisión de fondos conceptuales para resolver problemas cotidianos que le sean útiles en la innovación tecnológica de su entorno y del propio país. *In rerum natura* expuestas, se contraviene al anquilosado método de enseñanza que se propone en la mayoría de los libros de texto de Geometría Analítica v. gr. Steen y Ballou (1973), Lehman (2008), así como a los consuetudinarios libros de texto que las supervisiones escolares recomiendan, por citar algunos, el de Martínez Vázquez (2016) y el de González Cárdenas (2011)

1.3 objetivos de la propuesta

La finalidad de la consecución de la idea va dirigida a que los estudiantes adquieran los conocimientos teóricos sobre la parábola; el adiestramiento necesario para aplicar los conocimientos adquiridos; las habilidades y actitudes necesarias para resolver problemas de su entorno y que se motiven para el estudio de las matemáticas. Con este marco de fondo, nuestra propuesta consiste en la conformación de un proceso de 16 horas de clase, distribuidas en 16 sesiones de trabajo, para llevar paso a paso al estudiante a través de tareas, para la casa y el aula, así como a través de la interacción con sus pares y el uso de Excel y GeoGebra a aprender los conceptos fundamentales de la parábola y con ellos construir una cocina solar parabólica. Los pormenores se comunican en el parágrafo 2.

1.3 Justificación de la investigación

En algunos libros de geometría analítica, e.g. Leman (2008), Ortiz Campos (2005), González Cárdenas (2011), el estudio del tema de la parábola se lleva a cabo de la siguiente forma: primeramente, presentan un esquema de los elementos, definen el concepto, deducen las fórmulas correspondientes y finalizan con una propuesta de ejercicios, pero no presentan problemas prácticos, demanda permanente de los estudiantes actuales. Para satisfacer los planteamientos de los autores, los estudiantes aplican los diferentes elementos sin sentido ni razonamiento; en consecuencia, adquieren un conocimiento pasajero. Ante este escenario, se requiere de nuevos métodos o estrategias que motiven al estudiante al aprendizaje de la parábola. En este contexto, se presenta esta propuesta que viene a innovar los antiguos métodos de enseñanza. Para lograr un buen desarrollo de ella, es necesario que los estudiantes tengan conocimientos previos de aritmética, algebra, geometría plana, geometría analítica y conocimientos de Word, Excel, buscadores y GeoGebra. En este marco, se infiere que el alumno debe desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes. Así, pues, afirmamos que, a través de nuevas estrategias de aprendizaje, se tiene que lograr una interrelación de las competencias entre sí, a fin de provocar en el estudiante un cambio cognitivo.

1.4 Referencias conceptuales sobre el tema de investigación

En los bachilleratos generales estatales, el estudio de la parábola está incluido en el programa de matemáticas III (Geometría Analítica) que se lleva en el tercer semestre, y, aunque parezca un tema manido, consideramos que no es desmesura comenzar la episteme que nos ocupa desde una *tabula rasa.* Por ello, En esta sección damos cuenta de los principales conceptos y elementos de la parábola, sus relaciones, así como sus propiedades geométricas y algebraicas:

Steen y Ballou (1973) citan que una parábola es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia no dirigida a un punto fijo es igual a la distancia no dirigida a una recta fija. El punto fijo se llama foco y la recta fija se llama directriz de la parábola. Por su lado, Lehman (2008) ilustra sobre los elementos de la parábola; a saber: directriz, foco, eje focal, vértice, la cuerda focal y lado recto. También, deduce las relaciones que guardan las variables (x, y) asociadas a la parábola para los casos en que abre a la derecha y a la izquierda, hacía arriba y hacia abajo con respecto al plano cartesiano; o bien esta desplazada del origen en cualquier dirección.

Respecto al portafolio de evidencias, Martínez Sánchez (2002) señala que esa cartera de información patentiza el crecimiento intelectual del estudiante durante el desarrollo de la estrategia que es precisamente el proceso de aprendizaje. En nuestro caso, es fundamental en la evaluación del aprendizaje adquirido durante la aplicación de la estrategia.

1. 5 Metodología

Esta propuesta se aplicó en el semestre "A" de agosto-diciembre del 2015 a los estudiantes que cursaron la asignatura de Geometría Analítica en el tercer semestre del Bachillerato General José Clemente Orozco de Tehuacán, Puebla, México. La estrategia se aplicó en 16 sesiones clase de 60 minutos cada una, adecuándose en dos partes: en la primera se efectuó una dinámica gradual de aprendizaje, mediante diferentes actividades en el aula, llevando al estudiante a inferir el conocimiento de los elementos de la parábola y se complementó con algunas investigaciones hechas en casa que sirvieran de contexto para el trabajo posterior. En la segunda parte, los alumnos aplicaron los conocimientos aprendidos en la construcción de una cocina parabólica solar. Fue fundamental en todo el proceso, tomar en cuenta las nociones previas que el estudiante tenía sobre el tema antes de la exposición. Al tiempo que esto sirvió como plataforma de despegue para la adquisición de nuevos conocimientos, sirvió para anclar los nuevos elementos que se adquirirían en cada sesión.

2. Desarrollo de la propuesta

Como ya se reiteró anteriormente, la estrategia se desarrolla en 16 sesiones clase. En la primera sesión se trabajaron preguntas para diagnosticar qué idea tenían los estudiantes acerca del tema de la parábola.

2.1 Sesión 1

Se entregó una hoja en blanco a los estudiantes y se les formularon las siguientes preguntas para que contestaran por escrito en un tiempo de diez minutos: a) ¿Qué es una parábola o qué entiendes por parábola? b) ¿Has visto algún objeto que tenga la forma de parábola? En caso afirmativo ¿en dónde? Al terminar el tiempo preestablecido de diez minutos, se pidió a los estudiantes que compartieran sus trabajos. Algunas respuestas no eran claras, solamente mostraban atisbos de una idea vaga de cómo es la parábola, pero en la pregunta del inciso b) algunos estudiantes describieron muy bien construcciones de su entorno que tenían forma de parábola. c) Continuando con la dinámica de trabajo, se solicitó a los estudiantes que dibujaran objetos o construcciones con la forma de parábola y al finalizar las compartieran con el grupo. Esto permitió una retroalimentación entre compañeros. Al finalizar la presentación de los trabajos, se indicó a los estudiantes la actividad a realizar en casa para la sesión del siguiente día: investigar y dibujar objetos o construcciones con forma de parábola, indicando en qué se ocupan o para qué sirven, pueden ser fotografías, dibujos, impresión de imágenes, etc.

2.2 Sesión 2

Al siguiente día, se pidió a los estudiantes que compartieran frente al grupo los trabajos que realizaron en casa. En la Figura 1, se presenta el trabajo de un estudiante. Después de la explicación, se colocaron los trabajos en el pizarrón para que los alumnos observaran y opinaran sobre las características que tenían en común. Las ideas que aportaron fueron las siguientes: a) curva abierta, no se cierra; b) se abre a cualquier lado; c) tiene un punto fijo; d) es una curva cónica. A continuación, con las ideas que aportaron los estudiantes se generó el siguiente concepto de parábola: Curva cónica abierta que se abre a cualquier lado y que tiene un punto fijo. Con este concepto los estudiantes ya tenían una idea del lugar geométrico de la parábola. Al finalizar la sesión, el docente dio indicaciones a los estudiantes para que investigaran en casa el concepto de parábola; además, cómo trazar punto a punto, con regla y compás, una parábola que se abra a la derecha. Para la siguiente sesión, se les pidió traer juego geométrico, hojas milimétricas y una cámara para fotografiar y conformar su portafolio de evidencias.

2.3 Sesión 3

Con los conocimientos adquiridos hasta ese día, se sugirió a los estudiantes trazar, punto a punto con escuadras y compás en una hoja milimétrica, una parábola que abra a la derecha. De lo investigado el día anterior, presentaron un trabajo confuso; por esta razón se unieron por parejas para unificar criterios respecto al procedimiento a seguir y determinaron los siguientes pasos: a) trazar una recta horizontal al centro de la hoja (eje focal); b) trazar una recta perpendicular a la recta horizontal del lado izquierdo, se llamará recta fija (directriz); c) colocar un punto fijo (PF) sobre la recta horizontal a una distancia aproximada de tres o cuatro centímetros de la recta fija o directriz; d) colocar tres puntos separados entre sí a una distancia cualquiera sobre la recta horizontal al lado derecho del PF; e) trazar rectas perpendiculares a la recta horizontal que pasen por cada uno de los puntos que se colocaron sobre la horizontal; f) se instruye que con un compás se determine el punto medio (Pm), entre la recta fija o directriz y el punto fijo (PF). Para obtener los puntos que forman la parábola, se miden distancias con el compás de cada punto por donde pasan las perpendiculares a la recta fija o directriz, apoyando la punta metálica del compás en el punto fijo (PF) y marcando arcos con el lápiz del compás sobre la recta perpendicular correspondiente en la parte de arriba y en la parte de abajo. Con un lápiz, unir los puntos marcados sobre las perpendiculares y trazar el lugar geométrico; g) con las escuadras, trazar segmentos paralelos a la recta horizontal, de cada punto de la parábola a la recta fija o directriz y segmentos del punto fijo PF a cada uno de los puntos que forman la parábola. Hasta este momento, los estudiantes no saben todavía qué es el foco ni la directriz; h) identificar en forma ordenada con letras mayúsculas del alfabeto a todos los puntos que se encuentran sobre la parábola; i) hacer una relación de todos los puntos y leer su posición como par coordenado, teniendo de referencia a la recta horizontal como eje x y la recta vertical que pasa por el punto medio, Pm, como el eje y; estos serían los ejes coordenados. Todavía no saben que la recta horizontal, es el eje focal.

2.4 Sesión 4

En este cuarto día calcularon distancias o longitudes del punto fijo (PF) a los puntos de la parábola y de los puntos de la parábola a cada punto correspondiente sobre la recta fija, iniciando con la siguiente actividad: a) se solicitó elaborar una tabla con Excel a fin de calcular dichas distancias. Con este fin, utilizaron las coordenadas que obtuvieron en la hoja milimétrica de la sesión tres; b) al terminar, observaron los resultados obtenidos y los comentaron a todo el grupo. Algunos estudiantes mencionaron que hay distancias iguales o parecidas (no dijeron cuáles eran), en una segunda observación identificaron que la longitud del PF a un punto sobre la parábola es igual a la distancia de ese punto a la recta fija o directriz.

2.5 Sesión 5

Continuando con el proceso, el siguiente paso fue la obtención de la relación de la parábola con vértice en el origen que abre a la derecha: a) se trazó, una vez más, otra parábola siguiendo los pasos indicados en la sesión tres. En este lugar geométrico se escribieron los siguientes puntos: punto fijo (PF) más dos puntos arbitrarios: el punto G sobre la parábola y el punto H sobre la recta fija o directriz. Los valores numéricos, de los pares coordenados correspondientes a los puntos mencionados anteriormente, se sustituyeron por sus coordenadas, de acuerdo a la siguiente asociación: PF por (p, 0**),** G por (x, y) y H por (-p, y). En donde las coordenadas (x, y) son variables, y p es un parámetro: distancia del vértice al foco (Cf. Figura 2).
La Tabla 1 muestra la obtención de distancias con Excel. Observaron que la distancia del punto fijo (PF) al punto G de la parábola es igual a la distancia del punto G de la parábola al punto H que se encuentra sobre la recta fija (directriz), lo cual ya habían notado en la sesión anterior. Con estas observaciones y calculando la distancia entre dos puntos, los estudiantes infirieron la igualdad de los siguientes segmentos, $\overline{PF-G} = \overline{G-H}$**.** En la Figura 2, se observa el trazo de la parábola, el desarrollo del igualamiento y la obtención de la relación de la parábola.
Al concluir esta sesión, el estudiante ha aprendido las propiedades de la parábola con eje focal paralelo al eje x. A continuación, comprobará qué pasa con la parábola que se abre hacia arriba, con eje focal paralelo al eje **y**.

2.6 Sesión 6

En esta hora-clase, los alumnos siguieron los pasos indicados en las sesiones 3, 4 y 5 para trazar la parábola con eje focal paralelo al eje y a fin de determinar el par coordenado de los puntos que componen el lugar geométrico**.** Para ello, hicieron las siguientes adecuaciones: el eje focal lo trazaron en forma vertical, paralelo al eje y; la recta fija o directriz perpendicular al eje focal.

2.7 Sesión 7

Puestos en esta tesitura, los estudiantes calcularon distancias del punto fijo (PF) a los puntos de la parábola y de los puntos de la parábola a cada punto correspondiente sobre la recta fija o directriz. Además, hicieron la tabla con Excel para calcular dichas longitudes, utilizando las coordenadas que tenían en la hoja milimétrica trabajada en la sesión seis.

Con los resultados obtenidos, los estudiantes reafirman que la distancia del PF, a cada punto de la parábola es igual a la distancia de los puntos de la parábola a los puntos sobre la directriz. Confirmaron que lo mismo acontece con la parábola con eje focal paralelo al eje x, i.e. el lugar geométrico es invariante ante rotaciones.

2.8 Sesión 8

En este día los estudiantes dedujeron la relación de la parábola que abre hacia arriba en la forma siguiente: a) primeramente, trazaron otra parábola siguiendo los pasos que trabajaron en la sesión seis. En este lugar geométrico anotaron lo siguiente: punto fijo (PF), punto H sobre la parábola y punto I sobre la recta fija o directriz. Sus valores numéricos de pares coordenados correspondientes los sustituyeron por las siguientes variables: PF por (0, p), H por (x, y) e I por (x, -p). En donde el par (x, y) representa las coordenadas, y p es el parámetro: distancia del vértice al foco; b) con estas indicaciones los estudiantes encontraron la igualdad de los segmentos: $\overline{PF-H}=\overline{H-I}$. Para lograrlo, utilizaron la relación que ya conocían del cálculo de distancias entre dos puntos en donde sustituyeron las coordenadas x_1 , x_2 e y_1 , y_2 por las variables establecias en el parrafo anterior.

En esta parte del proceso, los estudiantes lograron adquirir por cuenta propia los conocimientos de la parábola en dos posiciones: con eje focal paralelo al eje x y con el eje focal paralelo al eje y. Para reafirmar lo aprendido, o bien aclarar dudas, el docente les solicitó estudiar la teoría en libros y elaborar un escrito de todos los elementos.

2.9 Sesión 9.

Con los escritos elaborados en casa, los estudiantes ordenaron, en tablas escritas en Excel, los elementos característicos de la parábola de acuerdo a su posición. De esta manera, ubicaron claramente la nomenclatura y los nombres correspondientes de acuerdo a los autores de los libros consultados. A continuación, el docente propuso ejercicios teóricos de la parábola con vértice en el origen y fuera del origen del plano cartesiano que los estudiantes resolvieron satisfactoriamente en su cuaderno y en el pizarrón.

Para realizar en casa, se les pidió a los estudiantes que investigaran e hicieran un reporte sobre el funcionamiento de una cocina parabólica solar, considerando las siguientes preguntas: a) ¿Qué es? b) ¿Cómo funciona? c) ¿Cómo se construye? d) ¿Qué materiales se necesitan para la construcción? e) ¿En qué situaciones se aconseja emplear una cocina parabólica?

2.10 Sesión 10

Siguiendo con la dinámica establecida de la estrategia y para comprobar el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes, el docente aplicó una evaluación práctica: para ello utilizó una cocina parabólica construida por él mismo con materiales metálicos y la expuso a los alumnos para que la analizaran. De esta manera, se pone al estudiante en otro contexto, *videlicet* que se entere de problemas reales de su entorno, como el ahorro de energía y que se dé cuenta que puede resolverlos. Los resultados obtenidos se pueden ver en la Figura 3, donde se presentan respuestas correctas en un 90% y pertenecen a un estudiante con promedio regular en matemáticas del 6 sobre 10. En otro examen las respuestas correctas corresponden a un 75 % y pertenece a un estudiante al que siempre se le habían dificultado las matemáticas y que su promedio era de 4 sobre 10. Al finalizar el examen, se deja de tarea lo siguiente: preparar y traer los materiales necesarios para construir una cocina parabólica solar

3. Resultados

En esta sección daremos cuenta de la aplicación, llevada a cabo por los estudiantes, de los conocimientos aprendidos acerca de la parábola.

Sesiones 11 a la 16
Para la construcción de las cocinas parabólicas, se formaron cuatro equipos: tres con dos estudiantes y uno de tres. Cada equipo determinó un proceso de construcción diferente, dos equipos inventaron su método y los otros dos equipos retomaron un método ya establecido, pero propusieron las coordenadas del foco y determinaron el trazo. Para la elaboración utilizaron materiales de reciclaje.

Equipo 1. Este equipo inventó su diseño, utilizó materiales metálicos para formar la estructura de la parábola, el desarrollo constructivo que propusieron fue el siguiente.

a) Fijan la distancia del foco al vértice de treinta centímetros. b) Diseñan el trazo del perfil de la parábola con GeoGebra para determinar las alturas de la ordenada en intervalos de cinco centímetros sobre el eje x. c) Elaboran cuatro perfiles de la parábola con solera de ½” x 1/8” según el trazo. d) Para formar el paraboloide, hicieron cuatro aros con alambre galvanizado del número 14 --unidos con soldadura 6013--, cuyos diámetros corresponden a la distancia entre ordenadas iguales. e) Arman la estructura con solera de ½”x 1/8” y los aros de alambre se fijaron a la base que son perfiles de la parábola. f) Sobre la misma base, se coloca la estructura que soporta la parrilla (altura del foco) a treinta centímetros del vértice. g) Al concluir la estructura, se forra con papel aluminio (Cf. Figura 4).

Equipo 2. Este equipo construyó su cocina con plantillas de cartón: 14 piezas iguales que forman el desarrollo del paraboloide y propusieron la distancia del vértice al foco de veinte centímetros por lo que la cocina resultó más cerrada. A continuación, se describe el proceso de construcción: a) Trazo del perfil de la parábola con GeoGebra, definiendo el foco a una distancia de veinte centímetros del vértice, para obtener valores de las ordenadas a cada 10 centímetros del eje x. b) Dibujaron un plano cartesiano en un cartón para trazar el perfil, extendiendo las ramas a cincuenta centímetros a cada lado del vértice. c) Dividieron el perímetro del borde de la cocina en catorce partes iguales, para formar las plantillas con las que debía armarse el cuerpo de la cocina parabólica. d) Unieron las catorce plantillas con alambre galvanizado en la parte inferior. e) Las orillas de los lados de las plantillas las pegaron con tiras de cartón en la parte exterior. f) Finalmente, forraron con papel aluminio (Cf. Figura 5).

Equipo 3. El proceso constructivo de este equipo fue similar al anterior, sólo que el foco que escogieron fue de 25 centímetros y unieron las plantillas con tiras de tela de cincuenta centímetros de longitud y cuatro centímetros de ancho unidas con pegamento. f) Finalmente, también, forraron la cocina con papel aluminio (Cf. Figura 6).

Equipo 4. Este equipo también diseñó su propio método y resultó ser la parábola más grande con un diámetro de 1.50 metros construida con cartón reciclado, cabe señalar que el

lado recto está más arriba del borde. A continuación, se describe el procedimiento: a) Se propone el foco a 35 centímetros del vértice. b) Se calculan las alturas de las ordenadas a cada cinco centímetros sobre el eje x, basándose en la relación de la parábola $x^2 = 4py$. c) Trazan el perfil de la parábola extendiendo las ramas una longitud horizontal de 75 centímetros a partir del eje focal en ambos lados. d) Recortan el perfil de la parábola dejando una franja de cinco centímetros de ancho abajo del vértice que servirá como base. e) Elaboran cinco cerchas completas y las colocan en forma cruzada. f) Recortan triángulos de la medida correspondiente y los pegan entre cerchas para formar el paraboloide. g) Colocan la base de la parrilla sobre el vértice con una altura de dos centímetros menos que la distancia focal y forrado con papel aluminio; tal como se muestra en la Figura 7.
Al culminar los trabajos, se probaron las cocinas parabólicas cocinando los alimentos que se aprecian en las Figura 8, Figura 9, Figura 10 y Figura 11.

4. Discusión

Durante el proceso de cada una de las actividades que componen la estrategia de enseñanza-aprendizaje, se presentan resultados positivos; pues el estudiante por sí mismo se ve obligado a adquirir el conocimiento para poder continuar con la siguiente acción. La seriación de cada trabajo genera un proceso cognitivo gradual en el conocimiento de los elementos de la parábola, lo cual queda guardado en el portafolio de evidencias que se le pidió elaborar a cada uno de los estudiantes.
Al finalizar todas las sesiones, se comprobó que el método fue eficiente y eficaz; pues los estudiantes, a quienes se les dificultaban las matemáticas, divagaron menos y fueron más efectivos al resolver los ejercicios y el examen propuesto al final del curso. Además, al construir la cocina parabólica fueron capaces de aplicar los elementos de la parábola de manera precisa y proponer su propio diseño, confirmando de manera eficiente la adquisición y apropiación de los conocimientos. Debe hacerse notar que, para poder asegurar el éxito de la propuesta, es importante la interrelación estudiantes-docente en todas las actividades implicadas en el proceso. Asimismo, dado que el estudiante debe trabajar sólo, es fundamental poner atención a los conocimientos previos que tenga el estudiante, sobre todo aquel concerniente al álgebra y a la geometría. La prueba final para otorgarles una calificación aprobatoria fue la evidencia de que los alimentos se cocinaron.

5. Conclusiones

En el presente trabajo propusimos un programa de 16 horas de clase, distribuidas en 16 sesiones de trabajo, para que el estudiante de educación media superior, a través de tareas para la casa y el aula; la interacción con sus pares y el uso de Excel y Geogebra aprenda los conceptos fundamentales de la parábola y con ellos construya una cocina solar parabólica. No se les examinó de la manera usual, sino con la evidencia de que los alimentos que escogieron se cocinaran. En la parábola del equipo uno, cocinaron salchichas, en la del dos también salchichas, en la del tres, huevos y en la del cuatro bisteces. El chorizo se cocinó en la cocina del docente que sirvió de patrón para examinar los resultados. Los productos del trabajo acreditan con creces la eficiencia y eficacia del método propuesto. Además, se logró crear e innovar un método de enseñanza-aprendizaje, que dio respuesta a las demandas de un aprendizaje significativo. Así mismo, la innovación del método motivó a los estudiantes al estudio personal de las matemáticas y afluyó en la apropiación de los conocimientos y sobre todo mejoraron el nivel académico y se espera que también de vida.

Agradecimientos. Primeramente, agradecemos al árbitro anónimo que revisó el trabajo; pues sus atinadas observaciones sirvieron para mejorarlo. Uno de los autores (FCC) agradece en primer lugar a su esposa A. Natividad Flores P., a sus hijos Daniel, Libertad e Iván por haber sobrellevado todas las horas de ausencia en la realización del trabajo. De igual forma a todos los estudiantes que participaron para llevar a cabo la estrategia didáctica.

Referencias Bibliograficas.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (2014). *Psicología Educativa un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas, p. 45-85

Carrera. B., & Mazzarella C. (2001). *Vygotzky: enfoque sociocultural*. Endurece, 5 (13), 41-44 Recuperado 2 abril 2018, http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35601309

Celis, M., Sánchez, J. M., Martínez, M., Soberanes, A. & Juárez, C. (2014). *Estilos de aprendizaje de acuerdo a la teoría de cuadrantes cerebrales en estudiantes del centro universitario UAEM valle de Chalco. El Cálculo y su Enseñanza*, 5(5) 139-148. Recuperado 3 de abril de 2018, **http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/**

Cuevas, C., A., Martínez, M., Y Pluvinage, F. (2012). *Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo: Un experimento con el uso de Tecnologías digitales y sus resultados. ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES* COGNITIVES, 17, 137–168. Recuperado 3 abril 2018 http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/

Cuevas, A., Pluvinage, F. (2013). *Investigaciones sobre la enseñanza del cálculo*. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, 57-82. Recuperado 3 de abril 2018, http:// mattec.matedu.cinvestav.mx/el calculo/

Cuevas, A., C., Delgado, M., Y Martínez, M. (2018). *Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial*. Revista LOGOS CIENCIA & TECNOLOGÍA. 10(2), 20-38. Recuperado 2 de abril. http://revistalogos.policia.edu.co/index.php/rlct/search/search

Diario Oficial. (2008). Secretaria de Educación Pública, (SEP), *Acuerdo Secretarial 444.* Recuperado de 28 de julio de 2017. http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_444_marco_curricular_comun_SNB.pdf

Díaz Barriga Arceo, F., Hernández Rojas, G. (1997). *ESTRATEGIAS DOCENTES PARA UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill, segunda edición.

González Cárdenas, R. (2011). *Geometría Analítica y Funciones*. México: Editorial Chicome, p. 133-152

González, N., Zerpa, M., Gutiérrez, D. y Pirela, C. (2007). *La investigación educativa en el hacer docente*. *Laurus, Revista de Educación, 13* (23), 279-309. Recuperado 27 marzo 2018 <http://wrww.redalyc.org/articulo.oa?id=76102315> ISSN 1315-883X.

Lehman, C. (2008). *Geometría Analítica*. México: Editorial Limusa, p. 149-154.

Madrid, H., flores, M. (2017). *El Álgebra Lineal en el entorno personal de las peticiones a Internet (Recomendaciones a: música, películas, libros, compras, etc.)* El Cálculo y su Enseñanza, 9, 64–76. Recuperado 2 abril 2018, http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Martínez Vázquez, L. (2016). *Geometría analítica y funciones*. México: Ed. Book Mart.

Martínez Sánchez, N. (2002). *El portafolio como mecanismo de validación de aprendizaje.* Perfiles Educativos. XXIV (95), 54-66, Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la educación, México. Recuperado 15 de agosto 2017, http://www.redalyc.org/pdf/132/13209505.pdf

Moreira, M.A. (2012). *¿Qué hacer para producir verdadero aprendizaje significativo?* Revista Qurriculum, La Laguna 15, 29-56.

Moreira, M., A. (2017). *Aprendizaje significativo como un referente para la organización de la Enseñanza.* Archivos de Ciencias de la Educación, 11(12), e029. Recuperado 4 de abril de 2018, https://doi.org/10.24215/23468866e029

Ortiz Campos, J.F. (2005). *Geometría Analítica*. México: Publicación Cultural. Primera Edición, p. 132-140.

Padrón, M. del C., Gómez, M., y Leal, J. (2011). *Estrategia para el aprendizaje del estudio de las secciones cónicas mediante la plataforma virtual MOODLE en la asignatura de geometría analítica ll de la Facultad de Ciencias de la educación*. Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación 5 (2), 85-100.

Ruiz, J. F. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en el grado décimo de la Institución Educativa Luis López de Mesa en el municipio de Medellín Colombia*. Medellín. Colombia. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias. Trabajo Final como requisito parcial para optar al título de: Magister en Enseñanza delas Ciencias Exactas y Naturales.

Pimienta Prieto, J. H., y García Fraile, J.A. (2012). *Estrategias de enseñanza-aprendizaje docencia universitaria basada en competencias.* México: Pearson Educación, 2-3 Recuperado 20 de julio 2017, https://es.slideshare.net/.../estrategias-de-enseanza-aprendizaje-julio-h pimienta-prieto

Steen, F. H., y Ballou, D. H. (1973). *Geometría Analítica*. México: Publicación Cultural S.A. Primera reimpresión. p. 52-59.

Woolfolk, Anita. (2010). Psicología Educativa. México. México: Pearson Educación, decimoprimera edición. 42-48.

Figura 1. Uno de los objetos con forma parábola reportado por un estudiante

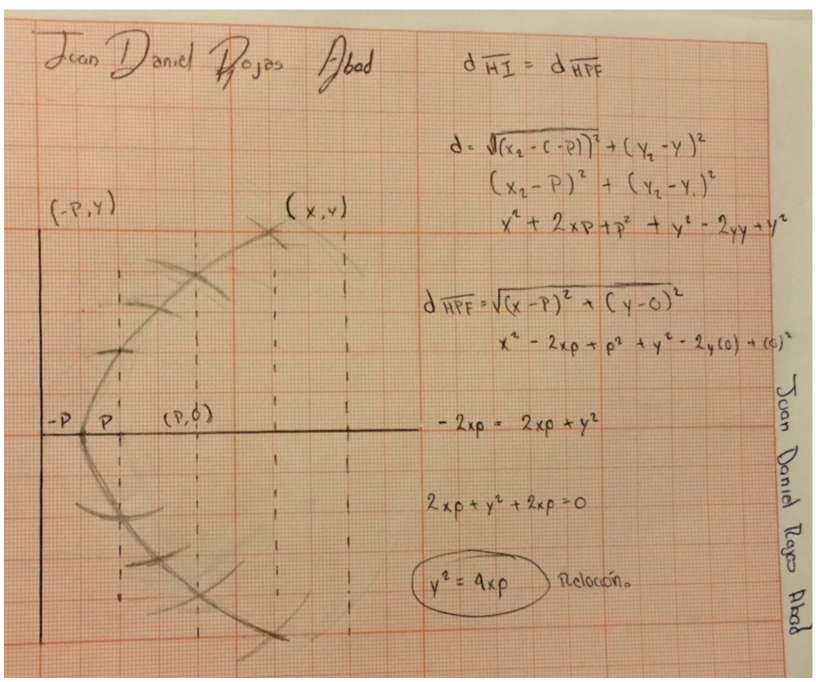
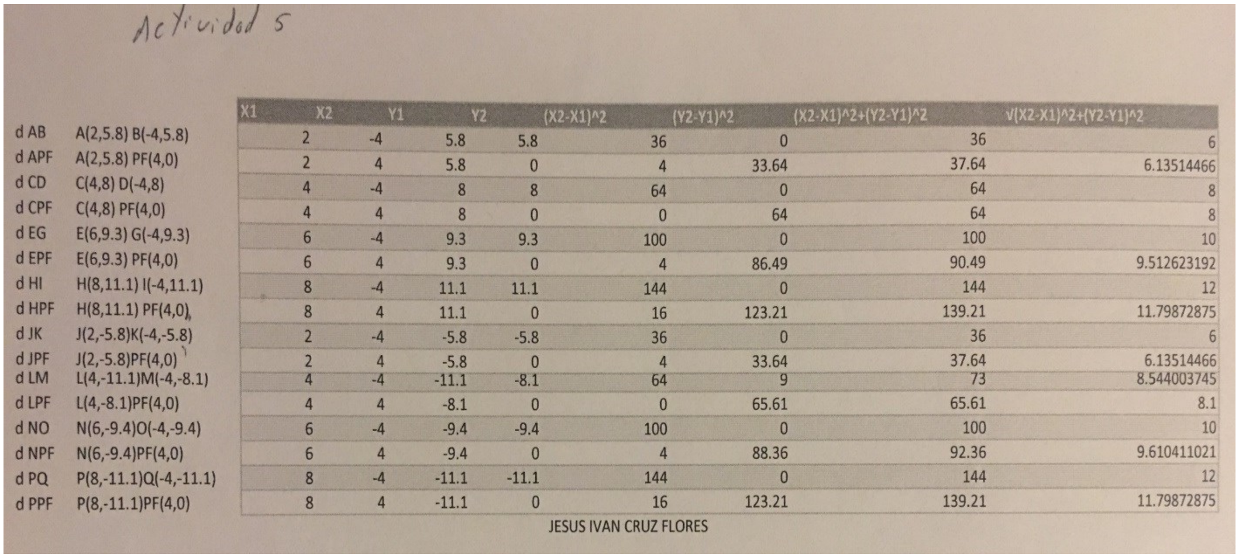


Figura 2. Trazo y obtención de la relación que gobierna la parábola



Actividad 5

		X1	X2	Y1	Y2	(X2-X1)^2	(Y2-Y1)^2	(X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2	√(X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2
d AB	A(2,5.8) B(-4,5.8)	2	-4	5.8	5.8	36	0	36	6
d APF	A(2,5.8) PF(4,0)	2	4	5.8	0	4	33.64	37.64	6.13514466
d CD	C(4,8) D(-4,8)	4	-4	8	8	64	0	64	8
d CPF	C(4,8) PF(4,0)	4	4	8	0	0	64	64	8
d EG	E(6,9.3) G(-4,9.3)	6	-4	9.3	9.3	100	0	100	10
d EPF	E(6,9.3) PF(4,0)	6	4	9.3	0	4	86.49	90.49	9.512623192
d HI	H(8,11.1) I(-4,11.1)	8	-4	11.1	11.1	144	0	144	12
d HPF	H(8,11.1) PF(4,0)	8	4	11.1	0	16	123.21	139.21	11.79872875
d JK	J(2,-5.8)K(-4,-5.8)	2	-4	-5.8	-5.8	36	0	36	6
d JPF	J(2,-5.8)PF(4,0)	2	4	-5.8	0	4	33.64	37.64	6.13514466
d LM	L(4,-11.1)M(-4,-8.1)	4	-4	-11.1	-8.1	64	9	73	8.544003745
d LPF	L(4,-8.1)PF(4,0)	4	4	-8.1	0	0	65.61	65.61	8.1
d NO	N(6,-9.4)O(-4,-9.4)	6	-4	-9.4	-9.4	100	0	100	10
d NPF	N(6,-9.4)PF(4,0)	6	4	-9.4	0	4	88.36	92.36	9.610411021
d PQ	P(8,-11.1)Q(-4,-11.1)	8	-4	-11.1	-11.1	144	0	144	12
d PPF	P(8,-11.1)PF(4,0)	8	4	-11.1	0	16	123.21	139.21	11.79872875

JESUS IVAN CRUZ FLORES

Tabla 1. Calculo de obtención de distancias de un estudiante

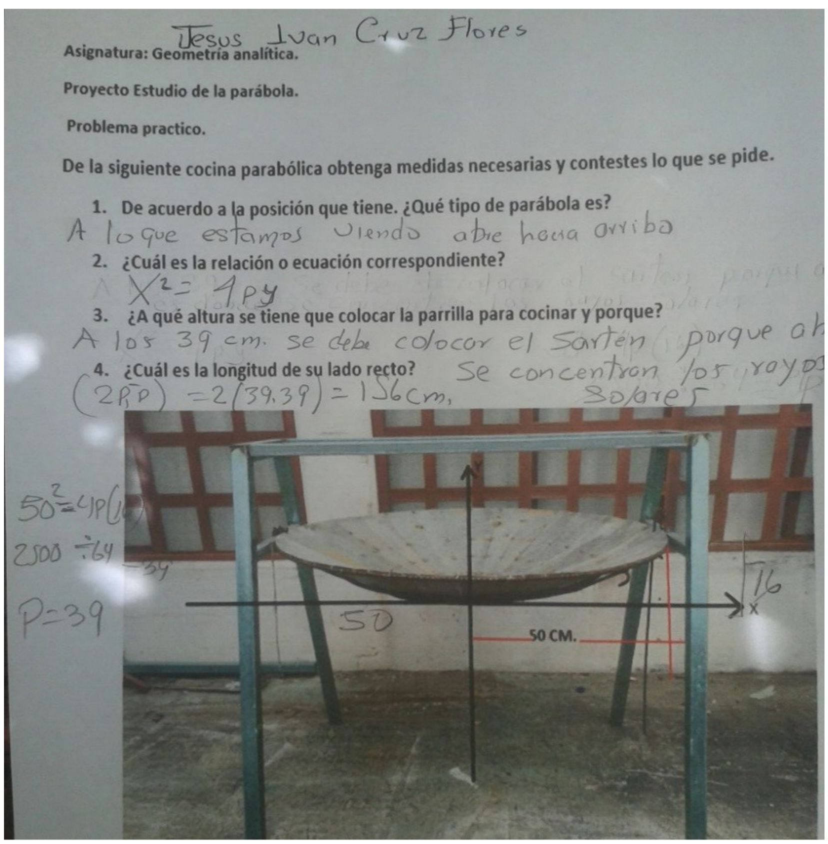


Figura 3. Examen de un alumno con la cocina solar prototipo

Figura 4. Cocina parabólica del equipo 1

Figura 5. Cocina parabólica equipo 2

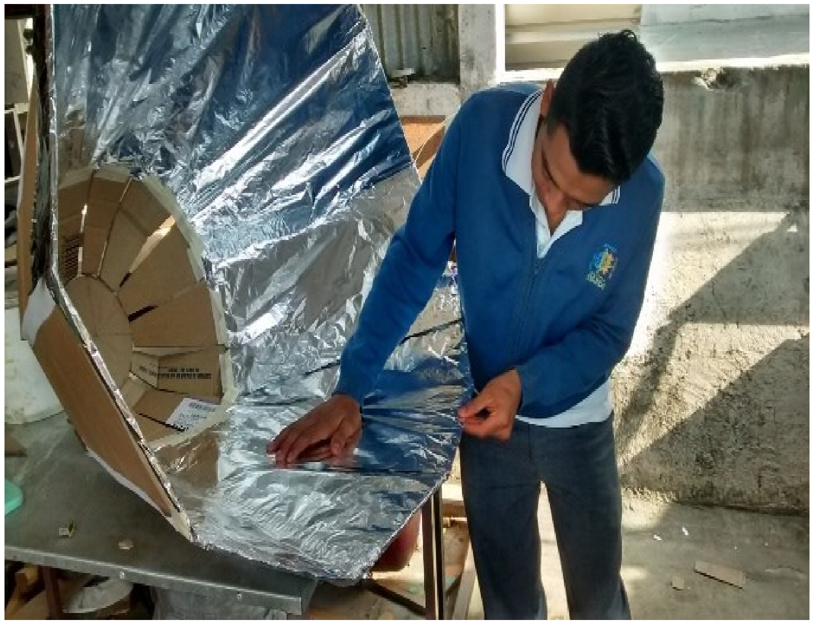
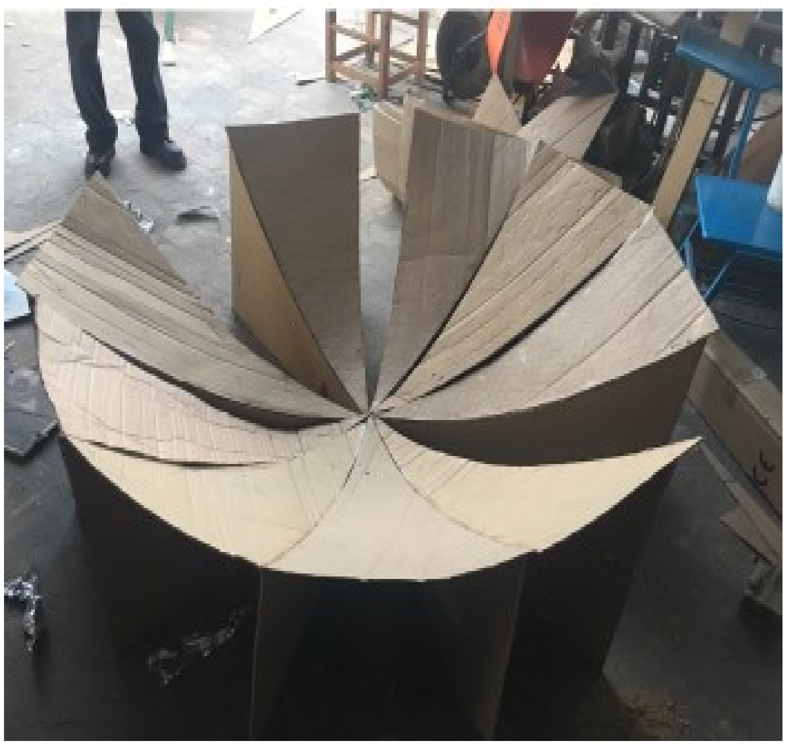


Figura 6. Cocina parabolica equipo 3



. Figura 7. Cocina parabólica equipo 4

Figura 8. Cocinando salchichas

Figura 9. cocinando bistec

Figura 10. Cocinando huevos

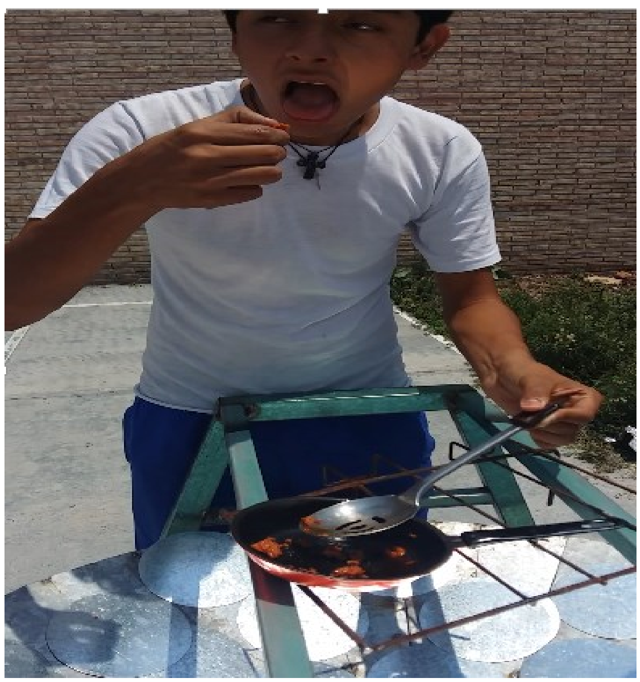


Figura 11. cocinando y comiendo chorizo.