

Un problema real en el tránsito desde el pensamiento algebraico al pensamiento funcional del Cálculo Matemático

A Real Challenge in the Transition from Algebraic Thinking to Functional Thinking in Mathematical Calculus.

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Miguel Delgado Pineda
miguel@mat.uned.es

Universidad Nacional de
Educación a Distancia
(UNED), España

Recibido: 23 de junio de 2026

Aceptado: 28 de junio de 2026

Autor de Correspondencia:

Delgado Pineda



Resumen: Qué entendemos por pensar en Matemáticas, qué es aquello que se le demanda al estudiante. Además, se hace necesario que el estudiante se adapte a los distintos tipos de pensamientos matemáticos. Es básico reconocer las dificultades que aparecen al para generar un proceso de enseñanza participativa en Cálculo Matemático. Igualmente, es necesario establecer la conexión de cada uno de los tipos de pensamientos matemáticos con el objetivo de aprender nuevos conceptos matemáticos tal que ese aprendizaje se haga con la mayor naturalidad matemática posible. No se debe facilitar que el estudiante se restrinja al pensamiento algebraico puesto que en el aprendizaje del Cálculo se hace necesario tratar con un poderoso pensamiento funcional.

En este trabajo tratamos una forma experimental para transitar hasta el pensamiento funcional que es un tipo de pensamiento matemático para entender cualquier proceso de modelización que se ejecuta en Matemáticas. Este tránsito lo acompañamos con modelos experimentales donde el estudiante debe hacer, modificar y entender tanto sus acciones como sus procesos y sus objetivos matemáticos. La experiencia comienza con el estudio de la distancia a un punto fijado a la que está una hormiga que se desplaza por el perímetro de un cuadrado.

Palabras clave: Pensamiento funcional, Pensamiento matemático, Concepto de función, Modelización matemática, Experimentación matemática.

Abstract: What do we mean by thinking mathematically, and what is required of the student? Furthermore, it is necessary for the student to adapt to different types of mathematical thinking. Recognizing the difficulties that arise in order to generate a participatory teaching process in Calculus is fundamental. Likewise, it is necessary to establish the connection between each type of mathematical thinking with the goal of learning new mathematical concepts in such a way that this learning occurs with the greatest possible mathematical naturalness. Students should not be restricted to algebraic thinking, since learning Calculus requires engaging with powerful functional thinking. In this work, we explore an experimental approach to transitioning to functional thinking, a type of mathematical thinking used to understand any modeling process in mathematics. This transition is supported by experimental models where the student must perform, modify, and understand their actions, processes, and mathematical objectives. The experiment begins with the study of the distance to a fixed point for an ant moving along the perimeter of a square.

Keywords: Functional thinking, Mathematical thinking, Concept of function, Mathematical modeling, Mathematical experimentation.

Introducción

Uno de los temas más tratados en la bibliografía relativa a la Educación Matemática es la forma en la que el estudiante tiene para transitar desde una forma de pensar con símbolos y expresiones de tipo algebraico a la necesaria y nueva forma de pensar, para él, con funciones. Es decir, la transición del pensamiento algebraico al pensamiento funcional. Esta transición queda reflejada en la literatura como uno de los saltos cognitivos más complicados y complejos que hace el estudiante en su formación académica básica (Cuevas et. al, 2018). Incluso se suele indicar que ese salto no se da con éxito del todo, puesto que las funciones pueden ser vistas como simples expresiones algebraicas (Cuevas & Delgado, 2016). También suele ocurrir en muchas ocasiones que el estudiante utiliza la palabra *incógnita* en lugar de la palabra *variable* cuando está tratando con funciones.

Podemos reunir un pequeño listado de las dificultades que más se tratan en la literatura sobre el aprendizaje de función, ya que cada nuevo estudiante universitario experimenta, o ha experimentado en la Enseñanza Secundaria, alguna de las más frecuentes dificultades didácticas que emergen en las acciones siguientes:

- Al considerar a la función como una simple fórmula algebraica. Es decir, dar mayor importancia a una expresión sin más. Por ejemplo, de la expresión entre dos variables no se considera explícitamente nada; $y = \frac{1}{x}$.
- Al no distinguir una función de una ecuación. Es decir, no entender que una función que se define mediante una expresión algebraica. Esta puede estar definida por una expresión explícita (fórmula tipo $y = 2x + 3$) o bien de forma implícita (fórmula tipo ecuación o $2x - y + 3 = 0$). Incluso se puede caer en interpretar que una expresión polinómica es una función (expresión tipo $2x - y + 3$).
- Al menospreciar el concepto de dominio de una función. Este hecho aparece en las primeras etapas en las cuales casi todas las funciones empleadas son de tipo polinómico, y que suele obviar que están definidas en todo \mathbb{R} . Casi nunca se tiene en cuenta que pudiera estar definida esa expresión polinómica en un subconjunto de los números reales. Por ejemplo, la expresión parabólica de un disparo parabólico no está definida en todo \mathbb{R} .
- Al ignorar el concepto de recorrido de una función. En muchos ejercicios de los libros de texto el recorrido de la función parece un concepto transparente, como si fuera algo sin importancia. Por ello, en muchos casos no se sabe contestar si una función es positiva o no, o dónde es positiva y dónde no

Otras dificultades aparecen con la forma de interpretar las expresiones analíticas, por lo siguiente:

- Al cambiar el concepto de incógnita por el concepto de variable. En general, se hace hincapié en enseñar a resolver ecuaciones ($2x + 3 = 0$) pero no se suele describir el conjunto factible de una inecuación $2x + 3 \leq 0$. Se describe la forma de resolver algunas inecuaciones $x \leq$

$-\frac{3}{2}$ como proceso algebraico, pero no se entra a describir el conjunto factible $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{3}{2}\}$. En cierta medida se prolonga el concepto de incógnita en lugar de iniciar el concepto de variable.

- Al no entender las variables como posible forma de expresar algunas magnitudes. Ante un problema en la que intervienen ciertas magnitudes. Por ejemplo, determinar el valor del volumen de un cubo conocido o el valor de la longitud de la arista del cubo. En cierta medida, suele aparecer la expresión $V = l^3$ como una fórmula estática en lugar de la expresión $V(l) = l^3$, donde los símbolos V y l representan esas magnitudes, con independencia del valor que tome; por supuesto $l > 0$.
- Al no entender la posible dependencia entre variables (o magnitudes). El ejemplo del punto anterior permite ejemplificar esta dificultad.

Además, hay muchas más dificultades didácticas, sin embargo, no fijamos en las dos concretas siguientes:

- Al no coordinar diferentes registros semióticos de representaciones como una forma de aludir al concepto general y no a la forma. Esto suele aparecer cuando las situaciones prácticas se centran en dado un registro, construir otro. Es decir, el segundo registro no se entiende como parte descriptiva si no como la solución de un problema. Tómese el ejemplo que se quiera para enlazar los registros tabulares, gráfico, analítico y verbal. Hay una asimetría entre unos y otros. Por ejemplo, del registro tabular al registro gráfico es muy frecuente, para lo cual basta, en muchos casos, con utilizar unas reglas de dibujo. Sin ejemplo, del registro gráfico al registro tabular casi no hay prácticas, cuando basta utilizar las mismas reglas midiendo posiciones y alturas.
- Al apreciar cierto tipo de pensamiento algebraico como muy operacional. En este caso se interpreta que la expresión de la función sólo tiene sentido como una calculadora de valores (una pura máquina) que permite cálculos puntuales o construir registro tabular de la función.

Todas estas dificultades son el fruto de una incorrecta forma de acceder al pensamiento funcional. Por ello, en este trabajo se presentan algunos aspectos del pensamiento matemático, focalizando la necesidad de adquirir el denominado pensamiento funcional. El acercamiento al pensamiento funcional lo hacemos empleando una situación didáctica, ya experimentada, que permite al estudiante adoptar el pensamiento funcional de una forma clara. Para ello, se emplean unas actividades relacionadas con la metáfora de una hormiga que camina por el perímetro de un cuadrado (Delgado & Martínez, 2023).

En la experiencia que tratamos, las variables son longitudes que no dependen del tiempo, con lo cual el estudiante puede iniciar o reiniciar el estudio en cualquier momento. Esta elección de magnitudes es así ya que usualmente la forma más intuitiva de ver la variación de algo es empleando una variable muy peculiar; el tiempo, dado que es lo que más varía en nuestras vidas y lo apreciamos fácilmente en lo global. Esta variable tiempo se modeliza como una variable continua, pero de la cual no se tiene forma de medir con un número real preciso, puesto que

difícilmente podemos interpretar millonésimas de segundo. Por otro lado, el tiempo “fluye”, de cero a ... (podría ser infinito), y esto impone ciertas restricciones a la intuición y a la imaginación.

En general podemos asegurar, vista la literatura, que se producen dificultades para acceder al pensamiento funcional. Ahora bien, esas dificultades pueden ser agrupadas en las tres categorías no necesariamente disjuntas que podemos distinguir:

Categoría 1: Que se corresponde con la consideración de que una función debe ser reconocida por una noma-expresión analítica, con lo cual quedan descartadas ciertas funciones no típicas como las funciones definidas a trozos o por partes, las funciones discontinuas, las funciones no definidas en un conjunto conexo, las funciones no acotadas, etc.

Categoría 2: Que está relacionada con la dificultad para pensar en términos de variación puntual, ya que no se identifican variables como tales, ni se identifican simbólicamente las magnitudes que pudieran dar sentido a ciertas variables y la posible relación entre ellas.

Categoría 3: En esta categoría se tiene la dificultad para comprender la variación en lo global, ya que no se entienden relación intrínseca entre dominio e imagen de ese dominio o rango. Sin entender esta cuestión no se interpreta a la función como una relación entre conjuntos o que ciertas magnitudes toman valores en ciertos conjuntos.

La resistencia de algunos estudiantes de no ver variables o interpretarlas como incógnitas bien pudiera aclararse con una metáfora extraída del mundo literario; concretamente de libro *El Principito*, para lo cual citamos algunos párrafos. En un momento, el protagonista le pide al aviador que le dibuje un corderito (Saint-Exupéry, 2015). Dibuja uno y le pone “curitas o pegas” pues parece enfermo, dibuja otro y tampoco le gusta por otro motivo. En un momento dado, el aviador dibuja una caja con orificios que contiene un supuesto corderito no visible. Qué tránsito se produce en la mente del Principito para quedar entusiasmado por el corderito contenido en la caja, pues él sólo ve una caja. Podemos decir que ha pensado en términos funcionales pues observa una variable (caja) que toma valores (corderitos).

Comentarios sobre el Pensamiento

La Psicología define el concepto pensamiento como: *Proceso mental psicológico a través del cual las personas pueden crear, regular y desarrollar ideas acerca de ellas, del entorno que nos rodea o de los demás* (Espino, 2004). Aunque no está de más, destacar las tres acepciones del diccionario de la RAE (2014) de la palabra Pensamiento: “*Facultad o capacidad de pensar*”, “*acción y efecto de pensar*” y “*conjunto de ideas propias de una persona, de una colectividad o de una época*”, pues al fin y al cabo pensamos en nuestro idioma materno. Ahora bien, ¿qué entendemos por pensar? Nuevamente el diccionario destaca de la palabra Pensar dos acepciones: “*Formar o combinar ideas o juicios en la mente*” y “*Conjunto de actividades y procesos psíquicos conscientes e inconscientes, especialmente de carácter cognitivo*”.

En distintos manuales de Psicología aparecen distintas clasificaciones de tipos de pensamiento básicos. Hay más que clasificaciones con distintas categorías que han sido descritas de una

forma básica. Pareciera que esa extensión de los pensamientos básicos contendría las distintas formas de pensar en Matemáticas. Pudiera pensarse que sí, pero debemos afinar esas categorías de forma que se distingan las distintas formas de pensar en nuestra materia. Esto no es fácil si no se tiene cierta formación matemática, puesto que alguien pudiera no distinguir todos esos tipos

Si a cada forma de actuar del estudiante se le puede asignar un tipo de pensamiento básico (psicológico), entonces debemos destacar el tipo de pensamiento predominante cada vez que ejecute una actividad matemática. Nos referimos los tipos básicos de pensamiento matemático. Un ejemplo son los que se presentan en Cuevas et. al (2018) destacando cuatro tipos de pensamiento matemático esenciales: Pensamiento aritmético, pensamiento aritmético avanzado, pensamiento algebraico y pensamiento funcional.

Entendemos que cada capacidad matemática innata o adquirida se clarifica en la mente del estudiante, o de cualquier persona, como un tipo de pensamiento matemático. Ahora bien, ¿cómo registramos la información correspondiente a cada tipo de pensamiento matemático? Sin duda, el pensar del estudiante deja en mente registros mentales de los que habla Duval (2004), pero no podemos saber qué es lo que ha pensado si no nos lo comunica. En este proceso de comunicación intervienen los denominados registros de representación semiótica que se encuentran en Duval (2004) y en Delgado (2016) que nos permiten intuir el registro mental de un objeto matemático.

Comentarios sobre el Pensamiento Numérico

Al añadirle un complemento a la palabra pensamiento (facultad o capacidad de pensar) estamos describiendo los objetos con los cuales se piensa. Así pues, entendemos por *Pensamiento Numérico* la facultad o capacidad de pensar con cantidades y números. Ahora bien, el tipo de número tiene su importancia, así pues, destacamos tres tipos:

- *Pensamiento Numérico Básico*: Es el relativo a cantidades; magnitudes representables por números naturales y por números enteros. En esencia consiste en disponer de la capacidad de contar. Es decir, la capacidad de asignar a cualquier conjunto finito un número para destacar cuántos elementos tiene ese conjunto.

En general, esta capacidad es la que se desarrolla en las primeras etapas educativas, así como las comparaciones de números y las operaciones básicas. Se emplean registros textual y numérico con cierto nivel de aritmética, ya que de estos números se tiene unos símbolos (los dígitos) y una escritura posicional que permite ponerle nombre a cualquier número. Por ejemplo 1234 tiene de nombre o registro textual: mil doscientos treinta y cuatro.

- *Pensamiento Numérico Avanzado*: Es el relativo a tratar con magnitudes conmensurables y con proporciones. Es decir, magnitudes a las que se le puede asignar un número racional, tanto si se expresan en modo fracción o en escritura decimal. Tratar con el concepto de proporción, que es un concepto difícil para los estudiantes, requiere una evolución mental del concepto de número que en muchos casos los estudiantes de primeros cursos de Enseñanza Secundaria no han hecho.

La aritmética de estos números se suele admitir con una memorización de pasos tanto si la escritura es de fracción como si es escritura decimal. Pongamos un ejemplo de lo que queremos decir; $\frac{1}{2} + 0.5$, muchos estudiantes son capaces de operar y proponer el resultado; sin embargo, la expresión $\frac{1}{2} + 0.499999 \dots$ no saben tratarla. El problema de estos números es que cualquiera de ellos puede ser nombrado de muchas formas distintas, si bien hay una única fracción irreducible para cada número racional. Es decir, el estudiante llega a distinguirlos y encapsularlos en su mente. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{16}$ y $\frac{25}{100}$ son registros numéricos del mismo número racional, por ello prevalece el registro textual: un cuarto.

- **Pensamiento Numérico Abstracto:** Es el relativo a magnitudes continuas e imaginarias. Es decir, magnitudes que a las que se le asigna un número real o un número complejo. Para adquirir este tipo de pensamiento el proceso es más costoso debido a la falta de una escritura clara o “nombre propio” para cada número real. Muchos autores destacan que este tipo de pensamiento numérico debe entenderse como un tipo de pensamiento algebraico por la naturaleza de los números empleados y la dificultad que tienen los estudiantes para tratar con dichos números. Una razón de esto se aprecia al observar la forma en la que interpretan los estudiantes la expresión $1 + \sqrt{2}$ puesto que interpretan que se trata de una operación y que deben dar un valor aproximado a esa expresión. En muchos casos se quedan sin entender que se trata de “nombre” de un número real sin más.

Una vez vistos los tipos de pensamiento matemático, podemos decir que *Pensar Numéricamente* es formar o combinar ideas o juicios con cantidades y magnitudes discretas o continuas. Un ejemplo de pensar numéricamente es realizar el cálculo de la expresión $\sqrt{3^2 + 4^2}$ que es 5.

La realidad es que en muchas ocasiones la literatura relativa al pensamiento numérico queda referida a las dos primeras clases: básico y avanzado, puesto que se centran en la Enseñanza Primaria y la Enseñanza Secundaria. Esto se puede apreciar simplemente al interrogar a un buscador sobre pensamiento numérico.

Comentarios sobre el Pensamiento Algebraico

Un ejemplo que bien pudiera acercar al estudiante a evolucionar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico podría ser pensar en un número, pero sin decirlo, y solicitar al estudiante que nos diga el resultado de multiplicar tres por ese número que está en nuestra mente.

De la sublimación de la capacidad numérica emerge una nueva capacidad, la capacidad algebraica como una extensión de la capacidad numérica. Ahora bien, la sublimación se puede realizar con alguno de los tipos de pensamiento numérico o con todos. Pongamos un ejemplo partiendo del pensamiento numérico básico: Casi todos los estudiantes serían capaces de contestar a las siguientes preguntas: ¿Qué número hay que sumar al 23 para obtener 43? ¿Qué número hay que sumar a 23 para que obtener 13? Ahora bien, todos saben responder correctamente a la pregunta: ¿Qué número es el que sumando su triple a 23 permite obtener 11? Creemos que aquellos que tiene dificultad para responder a esta última pregunta no aplican pensamiento algebraico alguno, e intentan continuar pensando numéricamente y les resulta dar

con la solución por cálculo mental. Si se piensa algebraicamente entonces se utiliza una letra para denominar a ese valor desconocido o incógnitas, y operar con dicha letra numéricamente.

Aunque el pensamiento es personal, en cierta medida, se aprecia el pensamiento algebraico en el estudiante si se centra en la modelización de una cuestión mediante alguna ecuación y en la resolución de dicha ecuación. Es decir, se aprecia pensamiento algebraico cuando el estudiante es capaz de emplear incógnitas textuales o simbólicas para hacer referencia a unos números desconocidos y siente la necesidad de descubrir dichos números ocultos. Un ejemplo clásico consiste en determinar todas las ternas pitagóricas. Es decir, determinar listas de tres números naturales que cumplen el teorema de Pitágoras. Una cuestión es descubrir alguna terna, por ejemplo (3, 4, 5), otra cuestión es determinar todas las ternas, puesto que deben ser presentadas en términos de parámetros.

Podemos decir que tanto el pensamiento numérico como el pensamiento algebraico son pensamientos estáticos, son producto de algún algoritmo fijo. Por ejemplo, escribamos como escribamos una ecuación ($3x + 23 = 11, \dots, 3valor + 23 = 11$), las incógnitas siempre toman el mismo valor. Simplemente se asume que tal número existe y se busca un método para determinar ese valor. Para ello, se emplean procedimientos operacionales clásicos. Es decir, no se analiza la existencia de solución, si no que se busca y aplica un método para obtener dicha solución ($x = -4$). Así pues, entendemos por *Pensamiento Algebraico* aquella facultad o capacidad de pensar con símbolos y objetos abstractos que trascienden a las cantidades, las magnitudes y los números. De este tipo de pensamiento destacamos cuatro tipos

- *Pensamiento Algebraico Elemental*: Es el relativo a las operaciones con objetos con o sin significado numérico. En esencia, está relacionado con todo aquello relativo a las estructuras algebraicas de grupo y semigrupo.
- *Pensamiento Algebraico Escalar*: Es el relativo a las operaciones con magnitudes escalares. En esencia, está relacionado con todo aquello en relación con las estructuras algebraicas de cuerpo (campo) y anillo.

En general cuando en la literatura se aboga por el pensamiento algebraico, casi siempre se refieren a estos dos tipos de pensamiento puesto que tratan con simples operaciones. Por ejemplo, si se le pide a un estudiante determinar el número que es igual al doble de la suma de sus cifras, este deberá plantear que distintas modelizaciones: una para números de una cifra ($a = 2a$), otra para números de dos cifras ($10a + b = 2(a + b)$), otras para números de tres cifras ($100a + 10b + c = 2(a + b + c)$), y así sucesivamente, teniendo la consideración de que $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$. La solución es única; 18, salvo para números de una cifra que es 0.

En general, los problemas que se modelizan mediante inecuaciones suelen superar este tipo de pensamiento. Por ejemplo, si se le pide al estudiante el número que es menor que el doble de la suma de sus cifras, entonces el modelo para dos cifras es:

$$10a + b < 2(a + b),$$

es decir, el número 19. Pero si se le pide al estudiante el número que es mayor que el doble de la suma de sus cifras entonces el modelo es:

$$10a + b > 2(a + b).$$

En este último caso el estudiante se encuentra que hay más de una solución. Que esa inecuación y esas “incógnitas” describen un subconjunto de \mathbb{N}^2 , y eso choca con una mentalidad algebraica propiamente dicha.

En la categoría de pensamiento algebraico se pueden considerar otros dos tipos de pensamiento algebraico, si bien, son tipos más especializados y abstractos.

- *Pensamiento Algebraico Vectorial*: Es el relativo a las operaciones con magnitudes vectoriales. En esencia, está relacionado con todo aquello que tiene que ver con las estructuras algebraicas de espacio vectorial. Con un ejemplo puede entenderse este tipo de pensamiento en relación con ecuaciones matriciales y sus resoluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- *Pensamiento Algebraico Global*: Es el relativo a las operaciones con objetos de un álgebra o un retículo, más o menos, abstractos.

Llegados a este punto cabe preguntarnos por la posible respuesta de los estudiantes a dos preguntas sencillas, en el supuesto de que estamos trabajando con los números reales, aunque podría hacerse con otros conjuntos. Supuesto que x es un elemento de \mathbb{R} les preguntamos: ¿Qué es $(x - 1)(x - 2)$? Una respuesta que no sea “un número” indicará la calidad del pensamiento numérico abstracto con independencia de que digan que es un polinomio por la familiaridad de escritura con los polinomios en la letra x .

¿Qué es $(x - 1)(x - 2) = 0$? Una respuesta que no sea los números 1 y 2 indicará la calidad del pensamiento algebraico con independencia de que digan que es una ecuación.

Comentarios sobre el Pensamiento Funcional

No es fácil acertar con una definición perfecta de lo que es el pensamiento funcional, sin embargo, podemos entender como *Pensamiento Funcional* aquella facultad o capacidad de pensar funcionalmente. Aunque podemos disponer de la acepción de la acción o efecto de pensar funcionalmente. Con estas definiciones aparece en un cierto círculo “pensante”. Es claro, que si se piensa con símbolos y objetos abstractos, entonces se debe intentar trascender de aquellos objetos genuinamente algebraicos. Lo mejor es disponer de un ejemplo que nos permita entender la última frase. Por ejemplo, todo estudiante reconoce la expresión que determina el área A de un cuadrado, del cual se conoce el lado l . En general, se emplea una expresión del tipo $A = l^2$, una expresión a la cual se le otorga una característica algebraica. Ahora bien, si utilizamos una aplicación como GeoGebra y definimos un deslizador de nombre l y que toma valores desde 0 a 10, y definimos un cuadrado con la instrucción *polígono((0,0),(l,0),4)* entonces se nos muestra en la pantalla el deslizador y un cuadrado de lado l que marque el deslizador l . Al mover el deslizador hacia la derecha, entonces el cuadrado se hace más grande. Es en ese instante cuando se le debe solicitar al estudiante la expresión del área de un cuadrado genérico. En esta situación debería establecerse la expresión $A(l) = l^2$ puesto que el valor del área $A(l)$ depende del valor

del lado l . Si esto no es así, podemos decir que tenemos un problema académico y una dificultad didáctica.

Reconocemos que *Pensar funcionalmente* es formar o combinar ideas o juicios con el uso de algunas variables.

A diferencia del pensamiento algebraico en el que se emplean símbolos (incógnitas) que se interpretan como números desconocidos, en el pensamiento funcional se emplean símbolos (variables) que pueden tomar valor en un determinado conjunto de números. Así pues, una *variable* es un objeto (símbolo) que representa *a uno y a cada uno* de los elementos de un determinado conjunto. En esta ocasión no tratamos con variables discretas y utilizamos la denominación de variable para variables continuas.

El problema que tienen los estudiantes es que expresiones muy similares se corresponden con objetos muy distintos. Por ejemplo, en la expresión $2x - 8 = 0$ se tiene que x representa a un número oculto (incógnita), mientras que en la expresión $2x - 8 < 0$ se tiene que x es cualquier número de un conjunto (variable).

Un ejemplo donde es requerido el pensamiento funcional es al emplear relaciones funcionales entre dos, o más, variables. Otro ejemplo es cuando directamente se requiere la participación de una función.

Si bien destacamos que existen tres tipos de pensamiento funcional que exponemos a continuación, en este trabajo nos centramos en el primer tipo.

- Pensamiento Funcional Escalar: Es el relativo a las operaciones con variables escalares. Es decir, al utilizar variables cuyo conjunto representado es uno de los conjuntos numéricos usuales. El paradigma de este tipo de pensamiento es tratar con una función real de variable real.
- Pensamiento Funcional Vectorial: Es el relativo a las operaciones con magnitudes vectoriales. En esencia, se tratan relaciones o funciones escalares, o vectoriales, entre variables vectoriales reales. Por ejemplo, las funciones reales de variable vectorial real (superficies o hiper-superficies), las funciones vectoriales real de variable real (curvas en el espacio) y las funciones vectoriales real de variable vectorial real.
- Pensamiento Funcional Abstracto: Es el relativo a las operaciones con magnitudes vectoriales y objetos de espacios vectoriales más genéricos.

La forma en la cual se transita del pensamiento algebraico al pensamiento funcional es una de las razones por la cual puedan aparecer, o no, las dificultades didácticas que tenga el estudiante con las funciones. Es cierta medida esas dificultades se pueden incrementar o decrementar en función de los registros de representación semiótica que el estudiante sea capaz de relacionar entre sí.

Llegados a este punto cabe preguntarnos por la posible respuesta de los estudiantes a las tres preguntas sencillas siguientes, en el supuesto de que estamos trabajando con números reales, x está en \mathbb{R} , les preguntamos:

¿Qué es $(x - 1)(x - 2) < 0$? Una respuesta que no sea “cualquier un número mayor que 1 y menor que 2” indicará la persistencia del pensamiento algebraico en contra del pensamiento funcional con independencia de que digan que es una inecuación. Esto es más patente si indican que es una inecuación en una incógnita x .

¿Qué es $y = (x - 1)(x - 2)$? Una respuesta que no sea una relación funcional entre dos variables, o entre dos magnitudes, indicará la calidad variacional de la forma de pensar. El pensamiento algebraico persiste si sustituyen la palabra “variables” por la palabra “incógnitas”.

¿Qué es $f(x) = (x - 1)(x - 2)$? Una respuesta que no sea la expresión de una función en la variable x definida en su dominio máximo, indicará la calidad del pensamiento funcional.

Como caminar hacia el pensamiento funcional

En esta ocasión nos referiremos a dos variables como A y l del cuadrado anterior. Variables que pueden representar dos magnitudes concretas como área y lado, o no, como las genéricas x e y . En cualquier caso, hay tres conceptos que son esenciales dominar para que un estudiante acceda con éxito a la comprensión del objeto función que desencadena el pensamiento funcional.

El primero es el concepto de *variación*; es decir, el estudiante debe entender que, si se considera que las variables representan magnitudes, entonces estas magnitudes pueden cambiar. El segundo es el de *relación*, o *correspondencia*; es decir, el estudiante debe asumir que cada cambio de valor en una variable afecta a la otra variable, así pues, ésta cambia su valor. El tercero es el de *dependencia*; es decir, el estudiante debe identificar qué variable (magnitud) hace variar de una forma determinada a la otra. En cierta medida se trata de reconocer la variable dependiente y la variable independiente. Esto no suele ser simple como cuando se dice, puesto que la longitud de una circunferencia puede depender del radio $l(r) = 2\pi r$, pero también se tiene que el radio de una circunferencia puede depender de la longitud de la circunferencia $r(l) = \frac{1}{2\pi} l$. En este caso, tanto r como l varían en \mathbb{R}^+ . En general suele tomarse como variable independiente aquella magnitud que es más fácil de medir; el radio en la circunferencia y el lado en el cuadrado. Un factor con la que los estudiantes identifican la variable dependiente de la independiente es el lugar que ocupa cada variable en una igualdad, en general la dependiente está escrita en el lado izquierdo de la igualdad. Es decir, siempre espera la presentación de la variable dependiente definida de forma explícita.

Las actividades encaminadas a favorecer el tránsito al pensamiento funcional en el estudiante tiene que ver con el andar de una hormiga por un cuadrado, véanse Delgado & Martínez (2023, 2024, 2025). La denominación *el andar de la hormiga* se basa en afrontar la respuesta a la pregunta genérica: *¿A qué distancia está la hormiga del punto marcado si sólo la hormiga recorre n lados del cuadrado?* Es decir, si recorre uno, dos, tres, cuatro, cinco... o más lados del cuadrado, ver figura 1.

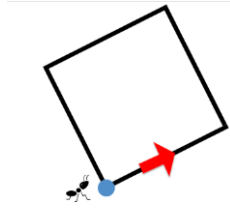


Figura 1: Situación didáctica inicial del andar de la hormiga.

El concepto matemático central es la experimentación como ejemplo de modelización matemática. El objetivo general es que los estudiantes no aprendan sólo a asumir un registro analítico de una función periódica, sino que entiendan que dicho concepto surge de forma experimental empleando un proceso de movimiento real. En cierta medida se produce un notable proceso de transposición didáctica, ya que un concepto tan abstracto como el de función, es representado metafóricamente con un paseo de la hormiga bastante simple, puesto que la hormiga no puede retroceder. Con la experiencia se deben generar conexiones entre los distintos registros de representación semióticos de los conceptos función, dominio, rango, gráfica, continuidad y derivabilidad.

La experiencia consiste en describir la distancia a la que está una hormiga que se desplaza, o no, por el perímetro de un cuadrado. No importa cómo se mueve, pues sólo importa el lugar en el que se encuentra. Ahora bien, la hormiga no desanda camino, pero puede recorrer el perímetro sin parar. En esta experiencia sólo se anotan la posición de la hormiga y la distancia al punto elegido. Así pues, que la hormiga se mueva hace que aparezcan recorridos y distancias. Estos elementos pueden ser medidos experimentalmente con una regla, así pues, emergen dos variables, una es el recorrido r y otra la distancia al punto d . Además, es esencial reconocer el conjunto en el que varían cada una de ellas. Ahora bien, la cuestión esencial consiste en ver de esas variables cómo están relacionadas. Esto se aprecia al experimentar y medir, con lo cual se puede llegar a comprender que una variable cambia en relación con el cambio de otra; primero se coloca a la hormiga, y luego se mide la distancia al punto. Aquí emergen los conceptos de función, el dominio y el rango.

La experimentación se puede realizar con distintas situaciones didácticas estandar que las denotamos con $C_{n,m,p,l}$, donde C indica que se trabaja en el perímetro de un cuadrado, el valor n dice cual es el vértice elegido para la toma de distancias y el valor m establece el vértice del que la hormiga parte. Así pues, $n, m \in \{0,1,2,3\}$. El valor p informa sobre el número de lados del cuadrado que recorre la hormiga, por lo tanto $p \in \mathbb{N}$, ya que la hormiga pudiera dar vueltas una vez que completa los cuatro lados. Por último, el valor l tiene una importancia numérica importante puesto que refleja la longitud del lado del cuadrado; $l \in \mathbb{R}^+$, ver figura 2.

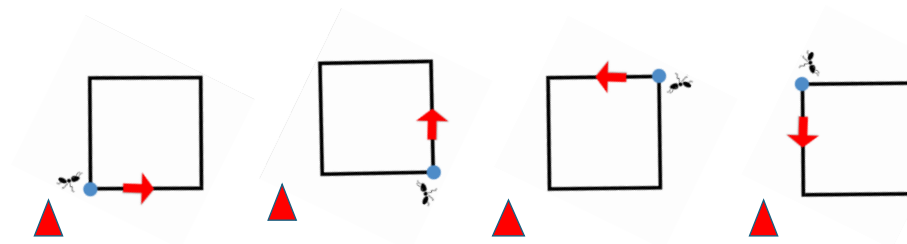


Figura 2: Imágenes correspondientes a $C_{0,0,p,l}$, $C_{0,1,p,l}$, $C_{0,2,p,l}$, $C_{0,3,p,l}$.

Es claro que es aconsejable experimentar las situaciones $C_{0,0,1,1}$, $C_{0,0,2,1}$, $C_{0,0,3,1}$ y $C_{0,0,4,1}$, es decir, que la hormiga se desplace: por un lado, por dos, por tres y por los cuatro de un cuadrado unitario.

Esta experimentación acerca al estudiante a una posición sólida sobre la formación de su pensamiento funcional. Si bien puede entender que cada una de las variables no toma un único valor, sino que recorre todo un conjunto de valores. En sí, el interés no está centrado en cuánto valen las variables, sino en la forma en la que cambia la distancia cuando varía el recorrido. En cierta medida, se podría pensar en cuánto cambia el recorrido cuando cambia la distancia, pero esto no accede al concepto de función. Se queda en simple relación entre el recorrido y la distancia. Así pues, el recorrido se convierte en la variable independiente y la distancia en la variable dependiente. Con esta forma dinámica se genera un pensamiento relacional propensamente funcional.

Las acciones iniciales del estudiante están descritas de la siguiente forma:

- 1ª Dibujar un cuadrado.
- 2ª Aplicar un protocolo para asegurarse que es un cuadrado.
- 3ª Marcar un vértice como punto de tomar distancias.
- 4ª Mover la hormiga e ir haciendo medidas tanto del recorrido como de la distancia a la que está del punto marcado.

Con este inicio experimental se le presenta un entorno donde no hay expresión inicial alguna; es decir, no hay acercamiento alguno al pensamiento algebraico; ni hay que sustituir valores en una expresión, tampoco hay que resolver una ecuación alguna.

Los procesos del estudiante están descritos de la siguiente forma:

- 1º Mover a una hormiga por el cuadrado introduce al estudiante en un proceso de modelización. Mover a la hormiga de posición implica nuevas medidas del recorrido y la distancia.
- 2º Construir una tabla de pares de valores numéricos de la forma recorrido-distancia al hacer la variación de la posición de la hormiga.
- 3º Construir una aproximación de la gráfica de la función utilizando una nube de puntos que se corresponden con la tabla de valores.

4º Valorar si es necesario estudiar una tabla de valores más fina para aproximar mejor algunas partes de la gráfica.

Con estos procesos, el estudiante no queda centrado en evaluar una función punto a punto. El estudiante construye la función punto a punto simplemente una vez que hizo las medidas oportunas. Aquí desaparece el efecto de sustituir valores en la expresión de una función dada.

Los objetos que construye el estudiante están descritos de la siguiente forma:

1º El estudiante debe preguntarse si necesita calcular punto a punto todo, o puede entenderla como una transformación general. Es decir, puede anticipar el valor que devolvería esa transformación a un valor genérico r del recorrido.

2ª ¿Está capacitado el estudiante para imaginar la gráfica continua (completa) sin dibujarla del todo partiendo de la nube de puntos obtenida?

De cómo responda el estudiante podremos observar que ha objetivado el concepto de función y algunos registros de representación semióticos. Es decir, observaremos si ha nacido en él un “perfecto” pensamiento funcional. Además, una vez obtenido este tipo de pensamiento, el objeto función se convierte en un ente autónomo del cual podrá entender, más adelante, tanto toda una manipulación algebraica (suma, producto, composición) como unas condiciones y conceptos de tipo topológicos y métricos como continuidad, monotonía y derivación.

Al experimentar con $C_{0,0,4,1}$ el estudiante debería llegar a determinar el dominio de la función, $[0,4]$, el rango, $[0, \sqrt{2}]$, una expresión analítica

$$d(r) = \begin{cases} r & 0 \leq r \leq 1 \\ \sqrt{1 + (r - 1)^2} & 1 < r \leq 2 \\ \sqrt{(3 - r)^2 + 1} & 2 < r \leq 3 \\ 4 - r & 3 < r \leq 4 \end{cases}$$

y una gráfica

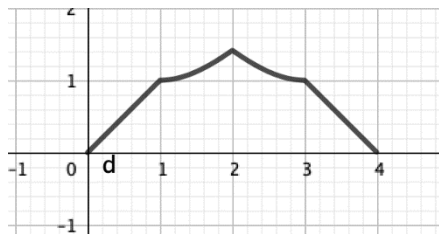


Figura 3: Gráfica de la función distancia d , para una vuelta completa.

Ahora bien, una cuestión es lo que debería obtener y otra cosa es lo que se obtiene experimentalmente, ya que ni siquiera los estudiantes universitarios de primer curso obtienen la información completa (Delgado & Martínez, 2023).

Que la hormiga se desplace continuamente por el cuadrado sin parar de dar vueltas debe forzar al estudiante a ver que la función es periódica, sin que intervengan las funciones trigonométricas. El movimiento permitirá al estudiante predecir dónde estará la hormiga después de varias vueltas. ¿Podrá el estudiante determinar la distancia al aumentar constantemente el recorrido? ¿Podrá asegurar la existencia de $\lim_{r \rightarrow \infty} d(r)$?

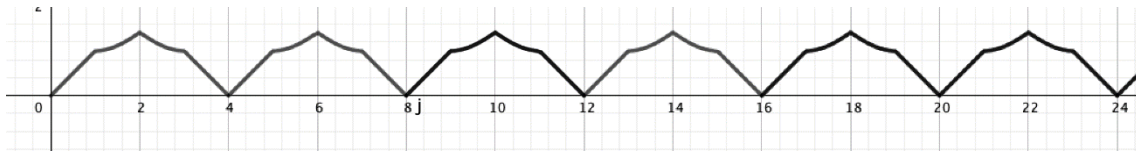


Figura 4: Construcción gráficamente de d si la hormiga no para.

La figura 4 muestra una aproximación de la gráfica de la función distancia si la hormiga no para de dar vueltas al perímetro del cuadrado. Sin duda, el estudiante debe entender que la gráfica de la figura 3 correspondiente a una vuelta, se replica una y otra vez; indefinidamente. Quizás en ese momento se pueda plantear qué sentido tiene el anterior límite. Claro que antes el estudiante debe llegar a la interpretación de que ese límite es la altura a la que llegaría la función en el infinito.

Obstáculos comunes en la transición del pensamiento algebraico al funcional

Los obstáculos que se encuentran los estudiantes para pasar del pensamiento algebraico al pensamiento funcional tienen que ver con las dificultades didácticas que hemos mencionado anteriormente. De alguna forma mostramos cómo el trabajar con la hormiga mitiga o elimina dichos obstáculos.

En general, al iniciar al estudiante al trabajo con funciones se suelen presentar funciones lineales o funciones afines, incluso funciones constantes. Esto suele generar una primera impresión en los estudiantes de que todas las relaciones funcionales se pueden representar mediante una línea recta (Dreyfus & Eisenberg, 1983). La hormiga obliga a no caer en esa ilusión de línea recta.

En el paso del álgebra a las funciones suele presentarse con el uso de una variable como una etiqueta, confundiendo el símbolo con un objeto, bloqueando la concepción de que el símbolo representa una cantidad numérica que varía. El símbolo del recorrido r que la hormiga impone, es esa cantidad que mide su desplazamiento, y el movimiento de la hormiga genera esa variación del recorrido. Lo mismo ocurre con la distancia que es algo que varía con el movimiento de la hormiga.

Las medidas correspondientes al primer lado del cuadrado imponen la linealidad, de la función, pero el segundo lado se deroga forzosamente una ilusoria linealidad. Ahora bien, en muchas ocasiones experimentales el estudiante reportó la linealidad al no saber contestar otra cosa. Aquellos que construyeron la nube de puntos para construir un proyecto de gráfica forzaron las medidas para que los distintos segmentos de la poligonal de lados curvos fuera una poligonal de lados rectos (Delgado y Martínez, 2023). Así pues, hay un cierto efecto de transformar puntos en líneas rectas.

El mayor obstáculo que encuentran los estudiantes al estudiar funciones es que no consiguen identificar las tablas de valores, las gráficas y las expresiones de las funciones. No interpretan que una tabla, una gráfica y una expresión son tres registros de representación semiótica del mismo objeto; la función. Esta dificultad con los registros se genera al entender que la tabla de valores es el producto de sustituir valores en la expresión de la función; es decir, es el producto de una tarea. Lo mismo ocurre con la gráfica, pues es entendida como una tarea a realizar desde la expresión y la tabla.

Al actuar con la hormiga todo se está construyendo al mismo tiempo, puesto que se están realizando medidas y la expresión queda como la supuesta medida de una cantidad simbólica.

Un profesor puede hacer experimentar a sus estudiantes con la hormiga y, probablemente, dicho profesor tenga la ilusión de que estas situaciones serán tratadas adecuadamente por sus estudiantes, incluso si se trata de un primer curso de universidad. Pero eso no es así como puede apreciarse en Delgado et. al (2026).

Si las situaciones se emplean como vía introductoria al concepto de función, uno puede esperar resultados no satisfactorios. Unos malos resultados de los estudiantes son un indicio suficiente para detectar las deficiencias de conocimientos de estos y la necesidad de una intervención didáctica. Si las situaciones se emplean como una vía para reforzar los supuestos aprendizajes, esos resultados deficientes son un aviso de que algo falla en el proceso de abordar los conceptos. Los fallos del estudiante marcan en cierta medida lo insatisfactorio que puede ser la forma de explicar del profesor o la forma de aprender del estudiante. Sea como sea, la experiencia indicará lo qué no se entiende o no se asimila del tema tratado.

El efecto atractivo que posee el dibujo del cuadrado en un plano hace que los estudiantes de secundaria y universidad se sientan atraídos por las fórmulas de la distancia entre puntos, como si se estuviera trabajando en un plano vectorial euclídeo. La realidad es que tan sólo se requiere disponer del teorema de Pitágoras. Así pues, el estudiante realiza una búsqueda de sus conocimientos teóricos antes de identificar la situación.

Experimentalmente los estudiantes no han llegado a reconocer a la función de una vuelta como función continua en su dominio, $[0,4]$, y derivable en casi todo el dominio menos para $r = 1$, $r = 2$ y $r = 3$.

Hay una serie de etapas que pueden generar obstáculos en el estudiante. Estas las mostramos con una ejemplificación de cómo poder hacer la transición hasta el pensamiento funcional. Las destacamos como cuatro escalones de comprensión que el estudiante debe escalar para adquirir el pensamiento adecuado. Superar estos escalones no siempre es fácil de conseguir con otros métodos distintos al de la hormiga.

- Escalón 1: El registro verbal ha de transformarse de forma gráfica para poder experimentar. Se puede imaginar un cuadrado, pero no podrá medirse sobre él si sólo es imaginario. Es decir, hay que hacer un cuadrado.
- Escalón 2: En el cuadrado no puede medirse punto a punto para todos sus puntos del perímetro puesto que es un perímetro continuo. Por lo tanto, el estudiante debe optar por elegir una nube de puntos en cada lado para poder construir un registro tabular que “aproxime” a la función. Sin duda, para cada lado debe elegirse la nube más adecuada o disponer de una distribución uniformemente distanciada debido a la precisión que dé la herramienta de medir. Su decisión le permitirá continuar con más o menos precisión hacia un registro gráfico.
- Escalón 3: Los puntos marcados en los lados establecen una partición de un intervalo que es el dominio de la función. Es claro que en ese momento puede preguntarse por la distancia a la que está para algún punto de ese intervalo. Por un lado, puede intentar contestar la expresión de la distancia en cada lado para un punto genérico de ese intervalo. Por otro lado, al representar la nube de puntos de la tabla gráficamente se puede notar formas y crecimiento y decrecimiento de su modelo de función. Además, puede saber si su futura gráfica sube o baja, y si lo hace rápido o lentamente. En este escalón el estudiante debe tener conciencia de una posible noción de razón de cambio de la magnitud distancia en relación con el cambio de la magnitud recorrido, aunque no sepa explicitarlo formalmente.
- Escalón 4: El último escalón corresponde a una visión global donde el estudiante ha despojado a las magnitudes de los valores numéricos para comprender la distancia como una función. Es decir, la función es un todo expresada con distintos registros. Alcanzado este escalón, el estudiante está en posición para predecir el comportamiento de la función que define a la hormiga que no para de dar vueltas, sin necesidad de calcular valores ya que tiene la forma de la primera vuelta. Es ahora cuando el pensamiento funcional está plenamente percibible.

El obstáculo inicial de una posible visión algebraica, donde la letra o el símbolo suele ser una incógnita, experimenta un cambio importante para pasar a ser esa letra un argumento variable. El estudiante debe interpretar a la función como una máquina que devuelven algo cuando se le hace procesar una cierta entrada, véase el registro metafórico en Delgado (2016). Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ devuelve 9 si la entrada es 3, devuelve *zapato*² si la entrada es *zapato* o x^6 si la entrada es x^3 .

Por último, hacemos una referencia a un obstáculo muy difundido ya que muchos estudiantes piensan: “Si no hay una única expresión descrita en una única línea de escritura, no se están tratando con una función”. En muchas ocasiones una función definida a trozos o por partes es interpretada como distintas funciones definidas en todo el dominio. Por ello, suele ser bastante usual que a la hora de valorar a una función para un cierto valor no se aplique la expresión que le corresponde a ese valor. Es evidente que con estos experimentos emerge la necesidad de aceptar funciones definidas a trozos, sin ningún reparo.

¿En qué medida el actuar con la hormiga es positivo? Lo principal del trabajo con la hormiga es que se desarrolla de forma manual con tiempo de sobra para realizar todas las tareas y pasos de forma que las evidencias prácticas van calando en la actuación personal del estudiante. Así pues, no se evita obstáculo alguno, si no los encuentra en sus acciones prácticas. Ahora bien, la hormiga por sí sólo no impide la aparición de dificultades si no hay un proceso reflexivo del estudiante. Actuar con la hormiga no se puede copiar del libro, ni del compañero, pues uno se encuentra con su propio cuadrado. Claro que al experimentar uno puede hacerlo en un grupo pequeño y tratar esas situaciones didácticas relacionadas al trazado de un cuadrado por cuyo perímetro debe andar una hormiga idealizada, y poder preguntarse, y reflexionar, por los conceptos ¿Variable? ¿Dominio? ¿Rango? Relación entre variables. ¿Función? ¿Gráfica?... Además, el trabajo se adapta a estudiantes de diferentes niveles educativos sin ninguna dificultad.

Comentario sobre la comunicación en Cálculo Matemático

Es claro que la Matemática es una ciencia cuya estructura es globalmente dispersa en distintas ramas, localmente muy concentrada en cada rama, potencialmente acumulativa y con relaciones y pasarelas entre ramas. Probablemente no sea así cómo puede apreciarla un estudiante que está acumulando conocimientos matemáticos; así pues, el profesor no debería pretender que se detecte una matemática uniformemente desarrollada en cada una de las ramas de ésta. Los contenidos matemáticos académicos son una respuesta genérica a un sinnúmero de los problemas que ocuparon u ocupan a la humanidad. Así pues, los problemas son una parte esencial de las Matemáticas y el estudio de sus resoluciones, si las hubiese; es en lo que se centran las Matemáticas. En esencia, se puede considerar que cada problema es un micro mundo matemático en el archipiélago de las Matemáticas.

Si se aprende Matemáticas es para poder aprender a resolver ciertos problemas y otros nuevos problemas análogos a los aprendidos. Ahora bien, antes hay que reconocer el problema y eso no siempre es fácil. Suponiendo que un estudiante ha aprendido una de esas islas matemáticas, el profesor se debe asegurar que lo aprendido es correcto. Ahora bien, para ello, hay que comunicar lo que se sabe. Ahí está el principal problema y la mayor dificultad, que se sustancia en la comunicación de las ideas matemáticas, puesto que no sólo requieren un lenguaje espacial; el matemático con su semántica particular y la utilización de las mismas palabras con significados distintos según el contexto.

Una vez establecida la sintaxis y la semántica matemática no dejan de existir dificultades puesto que se debe reconocer ambas partes, que esa comunicación trata el mismo objeto matemático, ya que hay que superar que se puedan tener distintos registros de representación mental del objeto. Cabe reconocer que en la comunicación es necesario emplear registros semióticos de representación aceptados por ambas partes, y aquí emerge otra dificultad puesto que no siempre se tiene asegurado que el estudiante posee la capacidad de relacionar dos registros distintos o registros que no atesora. Podemos suponer un ejemplo en el que el profesor se refiere al número 0.4999... y el estudiante necesita reconocerlo como 0.5.

En Matemáticas hay que observar lo que se dice y cómo se dice, no sólo entender lo que se cree que quiere decir. Pongamos un ejemplo de dos enunciados que corresponde al mismo problema: “Determinar todas las ternas de números naturales que cumplen el teorema de Pitágoras” y “determinar todas las ternas pitagóricas”.

Si bien la comunicación matemática pudiera parecer oscura por parte del profesor, es necesario que el estudiante desarrolle cierta empatía matemática. Es claro que el primer enunciado es preciso puesto que el estudiante debe decidir escribir:

$$\forall(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \text{ tal que } a^2 + b^2 = c^2,$$

con lo cual queda claro que hay infinitas numerables ternas. Sin embargo, con el segundo enunciado el estudiante puede pensar en trata de escribir:

$$\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a^2 + b^2 = c^2,$$

que son infinitas no numerables ternas. Ahora bien, el termino *terna pitagórica* se refiere sólo a ternas de naturales, ni siquiera enteras, ya que corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Sin duda, la habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa es el sentido común matemático, pero también hay que empatizar. Pongamos otro ejemplo acerca de preguntar si son iguales, o no, las expresiones $\frac{x^2-1}{x-1}$ y $\frac{x+1}{1}$. Aquí un comunicante puede decir que si, y otro puede decir que no. Si el primero está pensando en fracciones polinómicas es claro que la clase de equivalencia a la que pertenecen ambas fracciones es la misma $\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right] = \left[\frac{x+1}{1}\right]$.

Ahora bien, si el otro comunicante está pensando en el marco de funciones racionales entonces $f \neq g$, con $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x+1}{1}$, puesto que sus dominios no son el mismo.

Es el momento de hacer una cita a un refrán español; *Razón y cuenta, amistad sustenta* y a un dicho de Confucio: *El conocimiento sólo tiene valor cuando se traduce en una acción ética*. Así pues, hacer llegar al estudiante al pensamiento funcional y a la comprensión del Cálculo Matemático con las actividades de la hormiga hace honor a los dos anteriores dichos. Además, interactuar con la hormiga facilita al estudiante a adquirir la capacidad para tratar problemas matemáticos desde diferentes planteamientos y su formulación correcta en lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución. Se incluye en esta competencia la representación gráfica y la aproximación geométrica.

También facilita la competencia relativa a la habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita.

Con la hormiga se persigue: *Perfeccionarse a través del estudio, la reflexión y la disciplina moral*. Confucio.

Conclusiones

Tratar la transición del pensamiento algebraico al pensamiento funcional pudiera ser observado de una forma sistemática si ejerciéramos una cierta descomposición genética para establecer el concepto de función. Como no queremos hacer una exposición en abstracto no referiremos a que podemos observar en el estudiante cuando se le propone calcular el área de un cuadrado y el volumen de un cubo de lado 2.

Una posible acción del estudiante es buscar las fórmulas del área $A = l^2$ y del volumen $V = l^3$. Cómo sabe que el lado es 2, simplemente sustituye en las fórmulas algebraicas y obtiene los resultados; 4 y 8. En este tipo de acción predomina el pensamiento algebraico, ya sólo puede calcular valores con la fórmula al sustituir l por 2.

Un posible proceso es generado cuando es capaz de explicar qué ocurre cuando se aumenta el lado o cuando se disminuye sin tener la necesidad de hacer cálculos numéricos, ya que en cierta medida se reconoce un cierto proceso de interiorización. Aquí no se le puede catalogar al pensamiento ni de puramente algebraico ni de puramente funcional, podemos decir que se trata de un pensamiento de transición entre ambos.

Un posible objeto es reconocible cuando el estudiante es capaz de reconocer las dos funciones que definen el área y el volumen; $A(l) = l^2$ y $V(l) = l^3$, y es capaz de compararlas entendiendo los distintos crecimientos y la diferencia de sus gráficas, reconociendo que están definidas en el conjunto $(0, \infty]$. En esta ocasión el pensamiento que predomina es puramente funcional.

El anterior ejemplo es bastante simple, pero tiene los problemas del uso que el estudiante, con anterioridad, él ha dado a las fórmulas de área y del volumen, donde las expresiones algebraicas se interpretan en modo estático. Resulta que cambiar de forma de pensar para verlas en forma dinámica rompe con lo que sabe desde las primeras etapas académicas. Al aplicar la experimentación de la hormiga se inicia al estudiante poco a poco en hacer tareas y pensar en qué hacer en la siguiente, de forma que el concepto de función emerge poco a poco sin romper aparentemente con lo que ya conoce. Esta forma de introducir al estudiante en el trabajo con funciones permite que éste sea capaz de cambiar aquellas expresiones que trataba de forma puramente algebraica como elementos de carácter funcional. Se cambia la percepción de una expresión de forma estática para llegar a ser una expresión dinámica o funcional.

Trabajar con la hormiga no impone ningún control de la velocidad que pudiera llevar la hormiga, ni de lo rápido o lento que se mude de punto en el perímetro, como si quiere estar parada hasta que se mueva. Esta forma de evitar el control de la variable tiempo permite comprender la variabilidad respecto a la simple posición. Preguntas como ¿Qué efecto tendría en la gráfica si se mueve a la hormiga en el otro sentido del recorrido? ¿Qué le ocurriría a la expresión si en lugar de disponer de un cuadrado unitario se tuviese un cuadrado con otra medida del lado? Los pequeños retos al estudiante haciendo variar determinados parámetros en la experimentación no le obligaría a variar la forma de pensar, puesto que en esencia se tiene el mismo problema. O lo que es lo mismo, el concepto de función ha sido encapsulado por el estudiante.

La posibilidad de tratar a la hormiga con el cuadrado trazado en el suelo, en un pizarrón, sobre un papel o en un ordenador con GeoGebra, o similar, permite reforzar por varios medios la forma de pensar ya que el entorno hace variar la herramienta de medir, pero no varía el cómo se mide. Facilitar el paso final de forma experimental hace que el estudiante deje de ver a la función como un proceso (cálculo) y lo reconozca como un objeto matemático. Objeto que puede ser definido con cierta facilidad, y del cual se podrán estudiar algunas propiedades.

Por la hormiga se intenta favorecer: *La coherencia entre lo que sabemos y lo que hacemos sigue siendo uno de los grandes desafíos.* Confucio.

En la transición entre pensamientos se requiere disponer de distintos tipos de representación de los objetos mediante registros de representación para que el pensamiento quede totalmente anclado en el estudiante. Es decir, que el estudiante entienda, reconozca y relacione los distintos registros de representación de una función.

Con la experiencia de la hormiga se ha introducido el problema de forma textual, es decir, en Lenguaje Natural, hecho que puede sorprender al estudiante ya que no se le da fórmula alguna. El estudiante debe generar registros tabulares y registros gráficos, tanto con gráficos discretos como con gráficos continuos. La hormiga regresa al punto de partida cuando recorre los cuatro lados con lo cual se puede asumir la gráfica o la curva que representa a la distancia si la hormiga no se para. Para ello, se repite una gráfica básica dando entrada a las funciones periódicas. Por último, el registro de representación analítico que rompe con la idea de que una función debe ser escrita con una única expresión para todo su dominio y establece el concepto de partición de un dominio. Además, con este problema el estudiante se está aproximando al concepto de continuidad en un intervalo y al de continuidad en un punto, ya que en ciertos puntos la expresión de la función cambia. También se puede introducir la derivada en cada punto empleando una estrategia gráfica dibujando la recta tangente. Igualmente se pueden determinar los valores máximo y mínimo que toma la función continua y aquellos puntos donde la función no es derivable.

Queda pues, que el educador matemático decida usar la hormiga. *Si ya sabes lo que tienes que hacer y no lo haces, entonces estás peor que antes.* Confucio.

REFERENCIAS

- Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14, 422–431. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cuevas-Vallejo, C.A. y Delgado Pineda, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza*, 7, 108-119.
- Cuevas-Vallejo, C.A., Delgado Pineda, M. y Martínez-Reyes, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Logos, Ciencia y Tecnología*, 10(2), 20-38.

- Cuevas-Vallejo, C. A., Delgado Pineda, M., Martínez-Reyes, M., González Ortiz, O. & Orozco-Santiago, J. (2021). La encrucijada de la enseñanza en línea en tiempos de pandemia. *Revista de Educación y Tecnología*, (14), 88-105.
- Delgado Pineda, M. (2016). Registros para una función real cualquiera de variable real. *El Cálculo y su Enseñanza*, 6, 1-28.
- Delgado Pineda, M. & Martínez Reyes, M. (2021). Conexiones matemáticas: El caso de la recta tangente y la derivada. En: Cuevas, C. & Martínez, M. *Investigaciones Educativas* (201-215). UAEM-PEAC.
- Delgado Pineda, M. & Martínez Reyes, M. (2023). Experiencia innovadora con funciones periódicas derivadas del andar de una hormiga en ingeniería. *Pi-InnovaMath: Revista de Innovación en Matemáticas Fundamentales*, 5, 15-28.
- Delgado Pineda, M. & Martínez Reyes, M. (2024). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora. En A. Martín & J. Rodrigo (Eds.), *Investigaciones y Experiencias en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática* (pp. 112-130). UNED Ediciones.
- Delgado Pineda, M. & Martínez Reyes, M. (2024-2025) Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora. *Investigaciones y Experiencias en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (CORE/UNED)*, 2024-2025.
- Delgado Pineda, M., Martínez Reyes, M. & López Balderas, J. M. (2025). Aprendizaje de las matemáticas en educación básica a partir de un enfoque en comprensión lectora. *Pi-InnovaMath: Revista de Innovación en Matemáticas Fundamentales*, 5.
- Delgado Pineda, M., Martínez Reyes, M. & López Balderas, J. M. (2026). Una experiencia de cómo extender un proceso de innovación educativa a otros profesores de Matemáticas. *Pi-InnovaMath: Revista de Innovación en Matemáticas Fundamentales*, 9.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5(3-4), 119- 132.
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education. En D. Holton (Ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275-282). Kluwer Academic Publishers.
- Espiuno, O.G. (2004). *Pensamiento y razonamiento*. Pirámide.

- López Balderas, J. M., Martínez Reyes, M. & Delgado Pineda, M. (2023). De la acción al conocimiento: aprendizaje de las matemáticas a partir de un enfoque algorítmico en educación básica. *Pi-InnovaMath: Revista de Innovación en Matemáticas Fundamentales*, (6), 40-55.
- Martínez Reyes, M. & Delgado Pineda, M. (2019). El reto de la formación docente en el uso de herramientas digitales para la enseñanza del cálculo. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática*, (18), 45-62.
- Martínez Reyes, M., Delgado Pineda, M. & Cuevas-Vallejo, C. A. (2022). Hacia una nueva modalidad educativa: El reto de las instituciones de educación superior en México y España. En *Memorias del Congreso Internacional de Innovación Educativa (CIIE)*. Tecnológico de Monterrey.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.^a ed.)
- Saint-Exupéry, A. de (2015). *El Principito (Le petit prince)*. Editorial Salamandra. (1943 Reynal & Hitchcock).

