

# La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

Heart Rate Recovery as a Context for Teaching the Exponential Function: A Didactical Design Based on the Theory of Objectification, Mathematical Modeling, and Covariational Reasoning

*El Cálculo y su Enseñanza*

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

José Luis Díaz Gómez

[joseluisdiazgomez@gmail.com](mailto:joseluisdiazgomez@gmail.com)

Universidad de Sonora

México

**Recibido:** 10 de junio de 2026

**Aceptado:** 30 de junio de 2026

Autor de Correspondencia:

José Luis Díaz Gómez



**Resumen:** La enseñanza de las funciones suele privilegiar enfoques algebraicos que dificultan la comprensión de los procesos de cambio y variación. En este trabajo presentamos un diseño didáctico para la enseñanza de la función exponencial en estudiantes de Ciencias de la Salud, articulando la Teoría de la Objetivación, la Perspectiva de Modelización y el Razonamiento Covariacional. La Génesis Instrumental se incorpora como marco complementario para analizar el papel de los artefactos tecnológicos en la secuencia. La propuesta se organiza en torno al estudio de la recuperación cardíaca después del ejercicio físico y se estructura en tres episodios: experiencia somática del fenómeno, construcción del modelo exponencial y análisis dinámico de la tasa de cambio mediante GeoGebra. Un elemento central del diseño es la introducción de la variable Exceso, que permite identificar relaciones multiplicativas en los datos fisiológicos y favorecer la transición hacia un modelo exponencial. El trabajo presenta un análisis a priori y un caso ilustrativo de carácter heurístico, constituyendo una propuesta teórica orientada a futuras implementaciones en aula.

**Palabras claves:** función exponencial, modelización matemática, razonamiento covariacional, teoría de la objetivación, génesis instrumental.

**Abstract:** The teaching of functions often privileges algebraic approaches that hinder students' understanding of processes of change and variation. This paper presents a didactical design for teaching the exponential function to Health Sciences students, articulating the Theory of Objectification, the Modeling Perspective, and Covariational Reasoning. Instrumental Genesis is incorporated as a complementary framework for analyzing the role of technological artifacts within the sequence. The proposal is organized around the study of heart rate recovery following physical exercise and is structured into three episodes: embodied experience of the phenomenon, construction of the exponential model, and dynamic analysis of the rate of change using GeoGebra. A central element of the design is the introduction of the Excess variable, which makes it possible to identify multiplicative relationships in physiological data and supports the transition toward an exponential model. The paper includes an a priori analysis and a heuristic illustrative case, constituting a theoretical proposal aimed at future classroom implementations.

**Keywords:** exponential function, mathematical modeling, covariational reasoning, Theory of Objectification, instrumental genesis.

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

## **1. Introducción**

El concepto de función ocupa un lugar central en el currículo de matemáticas y representa uno de los contenidos cuya comprensión suele presentar mayores dificultades para los estudiantes. Aunque su relevancia como herramienta para describir y modelar fenómenos del mundo real es ampliamente reconocida, diversas investigaciones han mostrado que muchos estudiantes desarrollan una comprensión limitada de este concepto. En particular, suelen interpretar una función como una regla de correspondencia entre variables o como un procedimiento para calcular valores específicos, sin considerar los procesos de variación que dicha relación describe (Sierpinska, 1992; Breidenbach et al., 1992, Tocto et al., 2023).

Una posible explicación de esta situación radica en que, con frecuencia, la enseñanza introduce las funciones a través de definiciones, expresiones algebraicas y procedimientos formales antes de explorar los fenómenos que les dan sentido. Como consecuencia, los estudiantes pueden percibir las como entidades abstractas desvinculadas de situaciones reales. Esta dificultad adquiere especial relevancia en la formación de estudiantes de Ciencias de la Salud, quienes requieren interpretar las funciones como herramientas para comprender procesos biológicos dinámicos, tales como el crecimiento, la recuperación fisiológica o la evolución de determinados indicadores clínicos.

A partir de esta problemática, proponemos una secuencia didáctica sustentada en distintos referentes teóricos para promover una comprensión más rica del concepto de función. En lugar de considerar estas perspectivas de manera independiente, las articulamos como componentes complementarios de un mismo proceso de aprendizaje. Desde esta visión, comprender una función exponencial decreciente implica no solo reconocer su expresión matemática, sino también experimentar el cambio que representa, analizarlo en un contexto significativo y coordinar las variaciones entre las cantidades involucradas.

Con base en estos planteamientos, en las secciones siguientes describimos los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta y presentamos la secuencia didáctica diseñada para promover una comprensión funcional de los procesos de cambio y variación.

## **2. Marco teórico**

Comprender el concepto de función requiere considerar distintos aspectos del aprendizaje matemático. Las dificultades que enfrentan los estudiantes no pueden explicarse únicamente desde una perspectiva cognitiva, ni tampoco solo desde el análisis de los contenidos matemáticos. Por ello, en este trabajo articulamos tres enfoques que permiten abordar el problema desde ángulos complementarios: la experiencia del cambio y la construcción de significado, la modelización de fenómenos reales y el análisis de las relaciones de variación entre cantidades.

## **2.1. Precisiones terminológicas**

El término *cognición corporeizada* ha sido utilizado con significados diferentes dentro de la literatura especializada, por lo que resulta necesario precisar el sentido que adopta en esta investigación. Una primera corriente corresponde a la ciencia cognitiva corporeizada propuesta por Varela, Thompson y Rosch (1991), la cual plantea que los procesos cognitivos emergen de la interacción constante entre el organismo y su entorno. Una segunda perspectiva es la teoría de las metáforas conceptuales desarrollada por Lakoff y Núñez (2000), centrada en el papel de la experiencia corporal y el lenguaje en la construcción de conceptos matemáticos. Finalmente, la Teoría de la Objetivación de Radford (2006, 2013) interpreta el aprendizaje como un proceso social y cultural mediado por sistemas semióticos.

En este trabajo adoptamos la Teoría de la Objetivación como referente principal para analizar la dimensión fenomenológica del aprendizaje, debido a que ofrece herramientas específicas para estudiar cómo los estudiantes construyen significado a través de la interacción con gestos, artefactos, representaciones y formas de comunicación. Las aportaciones de Lakoff y Núñez se incorporan como un complemento que ayuda a interpretar ciertos procesos de conceptualización vinculados con la experiencia del movimiento y la variación.

## **2.2. Teoría de la Objetivación**

Desde la perspectiva de Radford (2006, 2013), aprender matemáticas implica participar en prácticas sociales mediante las cuales los estudiantes toman conciencia de conocimientos históricamente construidos. En este proceso intervienen simultáneamente palabras, gestos, símbolos, representaciones y herramientas materiales. A esta convergencia de recursos semióticos Radford la denomina *nudo semiótico*.

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

Aplicado al estudio de las funciones, este enfoque permite considerar que acciones como trazar una curva, interpretar una gráfica o percibir cambios en el ritmo cardíaco no constituyen únicamente apoyos didácticos, sino elementos que participan activamente en la construcción del significado matemático.

Asimismo, retomamos la noción de *movimiento ficticio* propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Según estos autores, una gráfica puede interpretarse como la trayectoria imaginaria de un punto que se desplaza en el plano. Esta idea facilita que los estudiantes atribuyan dinamismo a una representación estática y comiencen a relacionarla con procesos de cambio antes de introducir formalizaciones algebraicas más complejas.

### **2.3. Perspectiva de Modelización**

Para vincular el concepto de función con fenómenos significativos para los estudiantes, utilizamos el Ciclo de Modelización de Blum y Leiß (2007). Este marco concibe la modelización como un proceso de ida y vuelta entre una situación real y su representación matemática, alejándose de la visión de la matemática como un conjunto de procedimientos previamente terminados.

Dentro de este ciclo, resultan especialmente relevantes tres momentos. El primero corresponde a la matematización, mediante la cual los elementos esenciales de una situación real se expresan en términos matemáticos. El segundo consiste en el trabajo matemático sobre el modelo construido, utilizando representaciones, cálculos e interpretaciones propias de la disciplina. Finalmente, la interpretación y validación permiten contrastar los resultados obtenidos con el fenómeno estudiado para valorar su pertinencia y alcance.

En el contexto de esta investigación, la utilidad del modelo depende de que las predicciones obtenidas mantengan coherencia con el comportamiento fisiológico observado durante la recuperación cardíaca.

### **2.4. Razonamiento covariacional**

Para analizar cómo los estudiantes coordinan los cambios entre cantidades relacionadas, adoptamos el marco de razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2002). Este modelo describe una progresión de niveles de comprensión que permite caracterizar el

desarrollo del pensamiento funcional y la capacidad de interpretar fenómenos en los que dos o más cantidades varían simultáneamente.

**Tabla 1.** *Niveles del Marco de Razonamiento Covariacional.*

Nivel	Descripción
1	Coordinación de un valor de $x$ con un valor de $y$ .
2	Reconocimiento de la dirección del cambio (por ejemplo, cuando $x$ aumenta, $y$ disminuye).
3	Comprensión de patrones de cambio no uniformes, asociados a la concavidad de la función.
4	Coordinación de razones de cambio en diferentes intervalos.
5	Comprensión de la razón de cambio como una cantidad que también varía continuamente.

Este marco resulta especialmente relevante para el estudio de la recuperación cardíaca, ya que dicho fenómeno no solo implica observar que la frecuencia cardíaca disminuye con el tiempo, sino también comprender que la rapidez de esa disminución cambia continuamente. En los primeros minutos posteriores al esfuerzo físico, la frecuencia cardíaca suele descender con mayor rapidez; posteriormente, la disminución se vuelve más lenta a medida que el organismo se aproxima a su estado de reposo.

Por esta razón, la secuencia didáctica fue diseñada para promover progresivamente formas más sofisticadas de razonamiento covariacional. En particular, se busca que los estudiantes trasciendan la simple identificación de tendencias y lleguen a interpretar la variación de la propia razón de cambio. Alcanzar este tipo de comprensión les permite explicar por qué la recuperación cardíaca es más eficiente durante los primeros minutos y cómo dicho comportamiento puede representarse mediante una función exponencial decreciente.

### **2.5. Génesis instrumental**

Además de los enfoques anteriores, incorporamos la noción de génesis instrumental, desarrollada por Rabardel (1995) y posteriormente incorporada a la investigación en educación matemática por Artigue (2002). Este marco resulta especialmente útil para analizar el papel que

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

desempeñan los artefactos tecnológicos en la construcción del conocimiento matemático dentro de la secuencia propuesta.

Desde esta perspectiva, es necesario distinguir entre *artefacto* e *instrumento*. El primero hace referencia al objeto material o tecnológico disponible para la actividad, mientras que el segundo surge cuando dicho artefacto es apropiado por el sujeto y se integra en sus formas de pensar y actuar.

La génesis instrumental describe precisamente este proceso de apropiación. A través de la interacción con un artefacto, los estudiantes desarrollan esquemas de uso que les permiten interpretar situaciones, explorar relaciones y construir significados matemáticos. En consecuencia, el aprendizaje no depende únicamente de la disponibilidad de recursos tecnológicos, sino de las actividades que favorecen su integración en la actividad matemática de los estudiantes.

En la propuesta que presentamos, tanto el oxímetro de pulso como GeoGebra constituyen inicialmente artefactos. Nuestro interés didáctico radica en generar condiciones para que estos recursos se transformen progresivamente en instrumentos de modelización y análisis de la variación. Así, el oxímetro deja de ser únicamente un dispositivo de medición para convertirse en una fuente de información sobre un fenómeno fisiológico, mientras que GeoGebra pasa de ser un software de representación gráfica a un medio para explorar relaciones funcionales y formular interpretaciones acerca del proceso de recuperación cardíaca.

### **3. Marco de diseño didáctico y articulación de la propuesta**

La revisión teórica desarrollada en las secciones anteriores no tuvo como propósito presentar perspectivas independientes, sino identificar criterios que orientaran el diseño de las actividades. A partir de la articulación entre la Teoría de la Objetivación, la Perspectiva de Modelización y el Razonamiento Covariacional, formulamos tres Principios de Diseño Didáctico (PDD). Estos principios funcionan como orientaciones heurísticas que permiten traducir los constructos teóricos en decisiones concretas de diseño. De manera complementaria, la Génesis Instrumental proporciona elementos para analizar el papel que desempeñan el oxímetro de pulso y GeoGebra como mediadores de la actividad matemática a lo largo de la secuencia.

### **PDD 1. Principio de tangibilidad somática**

Este principio se fundamenta en los aportes de la Teoría de la Objetivación y en la noción de cognición corporeizada. En este sentido, las ideas matemáticas adquieren significado cuando los estudiantes pueden vincularlas con experiencias perceptivas y acciones corporales.

Por ello, las actividades se diseñan de modo que las cantidades involucradas sean experimentadas inicialmente como fenómenos observables y medibles antes de introducir representaciones simbólicas. En nuestro caso, la frecuencia cardíaca se presenta como una magnitud que los estudiantes pueden percibir, registrar e interpretar a partir de su propia experiencia corporal.

### **PDD 2. Principio de necesidad pragmática**

Este principio recupera aportes de la Perspectiva de Modelización y de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997). La idea central es que los conceptos matemáticos adquieren sentido cuando emergen como herramientas para resolver problemas que los estudiantes reconocen como significativos.

En consecuencia, la función exponencial no se introduce como un contenido previamente definido. Por el contrario, las actividades buscan generar situaciones en las que los estudiantes necesiten construir un modelo capaz de explicar y predecir el comportamiento observado durante la recuperación cardíaca.

### **PDD 3. Principio de dinamismo instrumental**

Este principio se fundamenta principalmente en el Razonamiento Covariacional y se apoya en los aportes de la Génesis Instrumental para comprender el papel de las herramientas tecnológicas en la actividad matemática. Su propósito es promover que la tecnología se utilice para explorar procesos de cambio y variación, y no únicamente para producir representaciones gráficas.

En este sentido, GeoGebra se emplea como un entorno de experimentación en el que los estudiantes pueden modificar parámetros, analizar comportamientos y observar cómo las variaciones en una cantidad se relacionan con las de otra. De esta manera, la tecnología favorece la construcción de interpretaciones dinámicas de la relación funcional y contribuye al desarrollo de formas más sofisticadas de razonamiento covariacional.

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

### 3.1. Articulación teórico-práctica

Con el propósito de explicitar la relación entre los fundamentos teóricos y las decisiones de diseño, presentamos una matriz que vincula los principales referentes conceptuales con los principios didácticos y los episodios que estructuran la secuencia.

**Tabla 2.** Matriz de articulación entre teoría, diseño y actividad.

<b>Marco teórico predominante</b>	<b>Principio de Diseño</b>	<b>Episodio de la secuencia</b>
Teoría de la Objetivación	PDD 1: Tangibilidad Somática	Episodio 1: Percusión del ritmo cardíaco
Perspectiva de Modelización	PDD 2: Necesidad Pragmática	Episodio 2: Análisis del Exceso
Razonamiento Covariacional	PDD 3: Dinamismo Instrumental	Episodio 3: Rastreo de la tangente en GeoGebra

La Génesis Instrumental no se asocia a un episodio particular, sino que opera de manera transversal mediante el uso del oxímetro y de GeoGebra como artefactos que median la actividad matemática de los estudiantes.

Aunque cada episodio se asocia principalmente con un marco teórico y un principio de diseño, esta clasificación tiene únicamente un propósito analítico. En la práctica, las tres perspectivas intervienen de manera conjunta a lo largo de toda la secuencia. La diferencia radica en que cada episodio enfatiza una dimensión particular del aprendizaje.

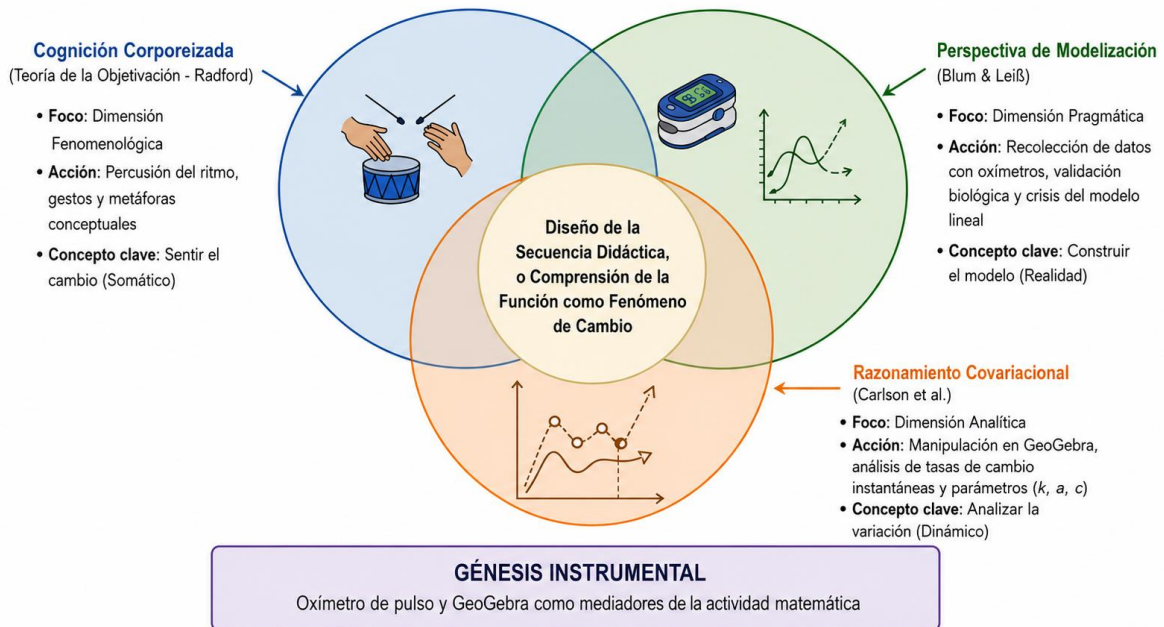
La organización propuesta responde a una progresión didáctica que va desde la experiencia corporal del fenómeno hasta su análisis matemático. En el primer episodio, los estudiantes experimentan y registran la variación de su frecuencia cardíaca, favoreciendo la construcción de significados a partir de la percepción y la acción. En el segundo, esos registros se convierten en objeto de modelización, generando la necesidad de construir una representación matemática que permita explicar el comportamiento observado. Finalmente, en el tercer episodio, las herramientas digitales posibilitan analizar con mayor detalle las variaciones del modelo y explorar dinámicamente la relación entre las cantidades involucradas.

Desde esta perspectiva, la génesis instrumental no es una etapa adicional del proceso, sino el resultado de la interacción entre estas experiencias. A medida que los estudiantes utilizan el oxímetro para interpretar un fenómeno fisiológico y GeoGebra para analizar sus representaciones matemáticas, ambos artefactos adquieren progresivamente funciones instrumentales vinculadas con la construcción de conocimiento.

La Figura 1 muestra la relación entre la Teoría de la Objetivación, la Perspectiva de Modelización y el Razonamiento Covariacional dentro de la propuesta. Cada uno de estos enfoques contribuye a un aspecto diferente del diseño: la experiencia corporal del fenómeno y la construcción de significado, la elaboración de modelos matemáticos y el análisis de las relaciones de variación entre cantidades. Considerados en conjunto, estos enfoques orientan el diseño de la secuencia didáctica.

La génesis instrumental se incorpora para comprender el papel que desempeñan el oxímetro de pulso y GeoGebra durante el desarrollo de las actividades. En nuestra propuesta, ambos comienzan como artefactos disponibles para los estudiantes, pero su uso continuado puede convertirlos en herramientas para explorar datos, construir modelos e interpretar el proceso de recuperación cardíaca.

Figura 1. Articulación de los marcos teóricos que sustentan la secuencia didáctica.



#### 4. Secuencia didáctica: *Fisiología del cambio*

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

#### **4.1. Planteamiento del problema**

La secuencia se organiza alrededor de una pregunta central: ¿cómo describir matemáticamente la forma en que la frecuencia cardíaca regresa progresivamente a valores cercanos al reposo después de una actividad física intensa?

Desde una perspectiva didáctica, este problema resulta especialmente relevante porque muchos estudiantes interpretan inicialmente los procesos de disminución mediante esquemas aditivos. Bajo esta forma de razonamiento, una cantidad que disminuye debería continuar haciéndolo hasta alcanzar el valor cero. Sin embargo, la recuperación cardíaca presenta un comportamiento diferente: la frecuencia cardíaca desciende rápidamente durante los primeros minutos y luego se aproxima gradualmente a un valor estable sin llegar a desaparecer. Comprender esta dinámica exige construir formas de razonamiento que trasciendan la disminución lineal y permitan interpretar procesos de cambio no uniforme.

La elección de este fenómeno responde también a su relevancia para los estudiantes de Ciencias de la Salud. Además de constituir un contexto cercano a su futura práctica profesional, la recuperación cardíaca ofrece una oportunidad para analizar un proceso biológico cuya evolución puede representarse mediante modelos funcionales de carácter exponencial.

Desde el punto de vista fisiológico, diversos estudios han descrito la recuperación cardíaca como un proceso asociado a la reactivación parasimpática y a la disminución progresiva de la activación simpática (Imai et al., 1994, Pierpont et al., 2000). Aunque el comportamiento observado suele modelarse mediante funciones exponenciales decrecientes, dicho modelo no se presenta inicialmente a los estudiantes; por el contrario, representa una construcción que emerge gradualmente a partir del análisis de los datos obtenidos durante la actividad.

**Población objetivo:** estudiantes de primer año de carreras en Ciencias de la Salud (Medicina, Enfermería y áreas Químico-Biológicas).

**Artefactos:** oxímetros de pulso, cronómetros y software GeoGebra instalado en computadoras o tabletas.

#### **4.2. Consideraciones éticas**

El primer episodio incluye una actividad física de intensidad moderada que tiene como propósito generar un aumento temporal de la frecuencia cardíaca y producir datos fisiológicos auténticos para el proceso de modelización. Por esta razón, antes de la implementación es necesario identificar posibles contraindicaciones médicas, tales como antecedentes cardiovasculares, hipertensión no controlada, asma u otras condiciones que puedan comprometer la seguridad de los participantes.

Los estudiantes que no puedan realizar la actividad física pueden asumir funciones de observación, medición y registro de datos, participando plenamente en las fases posteriores de análisis y modelización. Asimismo, cuando la normativa institucional lo requiera, debe obtenerse el consentimiento informado correspondiente. Todas las actividades deben desarrollarse bajo supervisión docente.

En contextos donde la realización del ejercicio no sea viable, la secuencia puede implementarse utilizando conjuntos de datos fisiológicos obtenidos de la literatura especializada o generados a partir de registros previamente recopilados.

#### **4.3. Episodio 1: la vivencia somática y la recolección de datos**

**Objetivo.** Contribuir a que los estudiantes experimenten corporalmente la variación de la frecuencia cardíaca y perciban la disminución progresiva de su ritmo antes de representarla mediante tablas, gráficas o expresiones algebraicas.

La actividad comienza con una breve rutina de ejercicio físico destinada a elevar la frecuencia cardíaca por encima de los valores habituales de reposo. En nuestra implementación se utilizó una secuencia de burpees durante aproximadamente 90 segundos, aunque esta puede adaptarse a las características del grupo y a las condiciones institucionales.

Una vez concluido el ejercicio, se inicia la fase fenomenológica de la actividad. Los estudiantes permanecen en reposo y, con los ojos cerrados, reproducen mediante golpeteos sobre el pupitre el ritmo de los latidos que perciben. Esta acción busca trasladar una experiencia fisiológica interna a una forma de expresión corporal observable y compartida.

La consigna propuesta es la siguiente:

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

*"Mantén el ritmo de los golpeteos mientras tu frecuencia cardíaca disminuye. ¿Qué cambios percibes con el paso del tiempo? ¿El ritmo se reduce siempre de la misma manera o la forma en que disminuye también cambia?"*

Desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación, esta actividad busca que la experiencia del cambio sea percibida antes de ser formalizada. Los estudiantes no observan inicialmente una gráfica ni una ecuación; experimentan directamente un fenómeno cuya dinámica deberán interpretar posteriormente mediante herramientas matemáticas.

Paralelamente, se registra la frecuencia cardíaca cada treinta segundos durante un intervalo de cinco minutos utilizando oxímetros de pulso. Este procedimiento genera una tabla de datos compuesta por once mediciones correspondientes a los tiempos ( $t = 0, 0.5, 1.0, \dots, 5.0$ ), que servirá como punto de partida para las actividades de modelización y análisis posteriores.

#### **4.4. Episodio 2: génesis del modelo multiplicativo**

**Objetivo.** Apoyar la construcción de un modelo exponencial a partir del análisis de regularidades presentes en los datos de recuperación cardíaca y cuestionar la suficiencia de interpretaciones lineales del fenómeno.

##### **4.4.1. Visualización de los datos y conflicto de validación**

Una vez recopilados los registros de Frecuencia Cardíaca ( $FC$ ), los estudiantes representan los pares  $(t, FC)$  ( $t$ =tiempo) en GeoGebra y exploran posibles modelos para describir el comportamiento observado. Como primera aproximación, se les propone ajustar una recta a los datos y utilizarla para realizar predicciones.

A continuación, se plantea una pregunta deliberadamente provocadora: *¿en qué instante la frecuencia cardíaca alcanzaría el valor cero si continuara disminuyendo según el modelo lineal obtenido?*

La respuesta conduce a una contradicción evidente desde el punto de vista fisiológico. Una frecuencia cardíaca igual a cero no representa un estado de recuperación, sino una situación incompatible con la vida. En términos de Brousseau (1997), esta situación puede interpretarse como un conflicto de validación: el modelo lineal resulta útil para describir una tendencia local,

pero sus predicciones dejan de ser plausibles cuando se extrapolan más allá de los datos observados.

Más que producir automáticamente una nueva respuesta, este conflicto crea condiciones para que los estudiantes reconsideren la estructura matemática utilizada y busquen alternativas capaces de representar mejor el fenómeno.

#### 4.4.2. Introducción de la variable exceso

Para avanzar en esta búsqueda, el análisis se desplaza desde los valores absolutos de frecuencia cardíaca hacia los latidos adicionales generados por el esfuerzo físico. Se introduce así la variable *Exceso*:

$$Exceso(t) = FC(t) - FC_{basal}$$

En este trabajo denominamos didácticamente *Exceso* a la variable auxiliar obtenida al restar de la Frecuencia Cardíaca observada en el tiempo  $t$ , ( $FC(t)$ ), la frecuencia cardíaca basal ( $FC_{basal}$ , es la frecuencia cardíaca en absoluto reposo). Desde el punto de vista matemático, esta transformación corresponde al procedimiento habitual de eliminación del desplazamiento vertical en modelos de decaimiento exponencial con asíntota horizontal (Stewart, 2016; Imai et al., 1994).

Esta reformulación permite reinterpretar los datos desde una nueva perspectiva. En lugar de estudiar la frecuencia cardíaca total, los estudiantes analizan la parte del fenómeno asociada al proceso de recuperación.

Esta transformación elimina el efecto del desplazamiento vertical producido por la frecuencia cardíaca basal y hace más visibles ciertas regularidades presentes en los datos. De esta manera, la atención se desplaza hacia los patrones de variación del exceso, favoreciendo la identificación de relaciones multiplicativas que permanecían ocultas en la representación original. Este uso didáctico de una variable auxiliar resulta consistente con los hallazgos de Confrey y Smith (1994) y Ellis et al. (2015) sobre la transición desde razonamientos aditivos hacia razonamientos multiplicativos en la comprensión de funciones exponenciales.

#### 4.4.3. Análisis de razones y reconocimiento de patrones

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

Los estudiantes comienzan calculando las diferencias entre valores consecutivos de la variable exceso. Rápidamente observan que dichas diferencias no permanecen constantes, lo que debilita la interpretación lineal inicial.

Posteriormente calculan los cocientes sucesivos:

$$\frac{E(t + \Delta t)}{E(t)}$$

Al comparar estos valores, identifican que las razones permanecen aproximadamente constantes a lo largo del proceso. Esta regularidad supone un indicio importante de comportamiento exponencial y permite interpretar la recuperación cardíaca como un fenómeno en el que la disminución ocurre de manera proporcional a la cantidad existente en cada instante.

#### 4.4.4. Construcción progresiva del modelo

A partir de la regularidad observada, los estudiantes expresan la relación entre mediciones consecutivas mediante la ecuación recursiva:

$$E(t + \Delta t) = E(t) \cdot r$$

Esta representación resulta especialmente relevante desde el punto de vista didáctico. Como señala Radford (2010), los estudiantes suelen comprender con mayor facilidad procesos iterativos discretos que relaciones funcionales expresadas directamente mediante fórmulas generales. En este sentido, la recursión funciona como un puente conceptual entre la aritmética de las razones y la expresión algebraica de la función.

Gradualmente, la relación recursiva se reorganiza hasta obtener una representación explícita:

$$f(t) = FC_{\text{basal}} + \text{Exceso}_{\text{inicial}} \cdot r^t$$

Durante la fase de institucionalización, el docente retoma las producciones de los estudiantes y establece la conexión entre esta expresión y la forma utilizada habitualmente en fisiología:

$$f(t) = A + B \cdot e^{-kt}$$

De este modo, el modelo no aparece como una fórmula impuesta desde el inicio, sino como una formalización de regularidades previamente identificadas en los datos.

#### 4.5. Episodio 3: exploración dinámica de la tasa de cambio

**Objetivo.** Analizar la variación de la tasa de cambio de la función exponencial y relacionarla con la experiencia corporal vivida durante el proceso de recuperación cardíaca.

Una vez construido el modelo, los estudiantes lo incorporan a GeoGebra y utilizan deslizadores para ajustar sus parámetros a los datos obtenidos experimentalmente. Esta actividad concreta un momento clave de la génesis instrumental: el software deja de ser una herramienta de representación y comienza a funcionar como un instrumento para explorar propiedades matemáticas del fenómeno.

Posteriormente se activa la herramienta de tangente sobre un punto móvil de la curva. A medida que el punto se desplaza, los estudiantes observan simultáneamente la gráfica, la recta tangente y el valor numérico de su pendiente.

La tarea consiste en analizar cómo cambia dicha pendiente cuando el tiempo avanza desde los primeros instantes de recuperación hasta los momentos cercanos al reposo. En lugar de centrarse únicamente en si la pendiente es positiva o negativa, se les invita a examinar su evolución:

*"La pendiente es negativa porque la frecuencia cardíaca disminuye. Sin embargo, ¿qué ocurre con su valor a medida que transcurre el tiempo? ¿Se acerca a cero o se aleja de él? ¿Cómo se relaciona este comportamiento con la sensación que experimentaste al percibir la desaceleración de tus latidos durante el Episodio 1?"*

Esta pregunta busca articular tres niveles de experiencia que suelen aparecer desconectados en la enseñanza tradicional: la percepción corporal del cambio, la modelización matemática del fenómeno y la interpretación de la derivada como una magnitud que también varía. En este contexto, la pendiente deja de ser un objeto puramente simbólico y se convierte en una herramienta para explicar una experiencia previamente vivida por los estudiantes.

### **5. Análisis a priori: hipótesis de aprendizaje**

Dado que este trabajo presenta una propuesta de diseño didáctico aún no implementada, resulta necesario explicitar las hipótesis que orientan su construcción. Estas hipótesis no constituyen predicciones deterministas sobre el comportamiento de los estudiantes, sino anticipaciones fundamentadas en la literatura y en los marcos teóricos adoptados. Su función es orientar futuras observaciones y proporcionar criterios para el análisis de la implementación.

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

### **Hipótesis H1**

Se espera que la experiencia corporal de la recuperación cardíaca contribuya a que los estudiantes distingan entre una disminución rápida en los primeros momentos y una desaceleración progresiva en etapas posteriores. Esta percepción podría dificultar la aceptación de modelos lineales simples, ya que la experiencia vivida no se corresponde con una disminución uniforme a lo largo del tiempo.

### **Hipótesis H2**

Diversos estudios han mostrado la fuerte tendencia de los estudiantes a interpretar situaciones de cambio mediante esquemas lineales (Van Dooren et al., 2003). En consecuencia, anticipamos que muchos estudiantes recurrirán inicialmente a este tipo de modelos para describir la recuperación cardíaca. El análisis de las limitaciones de dichas representaciones y el trabajo con la variable *exceso* podrían generar condiciones favorables para identificar regularidades multiplicativas y construir interpretaciones más próximas a un comportamiento exponencial.

### **Hipótesis H3**

Se espera que el uso de GeoGebra favorezca la diferenciación entre la altura de la función y la variación de su pendiente. En particular, anticipamos que algunos estudiantes podrán interpretar el acercamiento progresivo de la pendiente a cero como una representación matemática de la estabilización fisiológica experimentada durante el proceso de recuperación.

## **6. Caso ilustrativo: análisis de una implementación simulada**

Con el propósito de mostrar la coherencia interna de la propuesta y ejemplificar las hipótesis anteriores, presentamos un caso ilustrativo construido a partir de comportamientos documentados en investigaciones previas sobre pensamiento funcional y razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002; Van Dooren et al., 2003). Este análisis no formaliza evidencia empírica ni pretende describir el comportamiento real de un estudiante específico. Su función es ilustrar trayectorias de aprendizaje plausibles que podrían emerger durante una futura implementación.

El estudiante ficticio, a quien denominaremos *Alex*, representa un perfil típico de estudiante de primer año de Medicina enfrentado por primera vez a una situación de modelización funcional basada en datos fisiológicos.

### 6.1. Episodio 1: la vivencia somática

Alex concluye la actividad física con una frecuencia cardíaca de 160 latidos por minuto. Su frecuencia basal de referencia es de 70 lpm. Durante los cinco minutos posteriores registra una disminución progresiva de la frecuencia cardíaca, caracterizada por descensos más pronunciados al inicio y cambios gradualmente menores hacia el final del periodo de observación.

**Tabla 3. Datos representativos y verbalizaciones de Alex durante el Episodio 1**

Tiempo (min)	FC (lpm)	Verbalización
0.0	160	"Iba como loco, ta-ta-ta"
1.0	124	"Sigue rápido pero ya empieza a calmarse"
2.0	102	"El bajón fuerte ya fue, ahora baja menos"
3.5	84	"Se puso lento, casi no cambia"
5.0	73	"Ya casi en reposo, pero nunca se paró"

*Nota.* La tabla presenta únicamente cinco registros representativos del conjunto completo de once mediciones obtenidas durante la actividad.

### Interpretación a priori

Las verbalizaciones de Alex sugieren que el estudiante no solo percibe una disminución en la frecuencia cardíaca, sino también diferencias en la rapidez con la que dicha disminución ocurre a lo largo del tiempo. Expresiones como “el bajón fuerte ya fue” o “ahora baja menos” indican una posible atención a la variación de la tasa de cambio, aspecto que posteriormente resultará relevante para el análisis covariacional.

Es importante señalar que estas expresiones no implican que el estudiante posea una comprensión formal de conceptos como concavidad o derivada. Más bien, constituyen experiencias fenomenológicas que podrían funcionar como recursos para futuras construcciones matemáticas.

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

De manera similar, la afirmación “nunca se paró” no debe interpretarse como una comprensión explícita de la noción de asíntota. Sin embargo, muestra que el estudiante reconoce una característica importante del fenómeno: la frecuencia cardíaca se aproxima progresivamente a un valor de equilibrio sin alcanzar el cero. Desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación, este tipo de experiencias constituye un punto de apoyo potencial para la construcción posterior de significados matemáticos más elaborados.

En conjunto, estas observaciones resultan coherentes con la Hipótesis H1 y sugieren que la experiencia corporal puede desempeñar un papel relevante en la construcción inicial de interpretaciones sobre el comportamiento funcional del fenómeno.

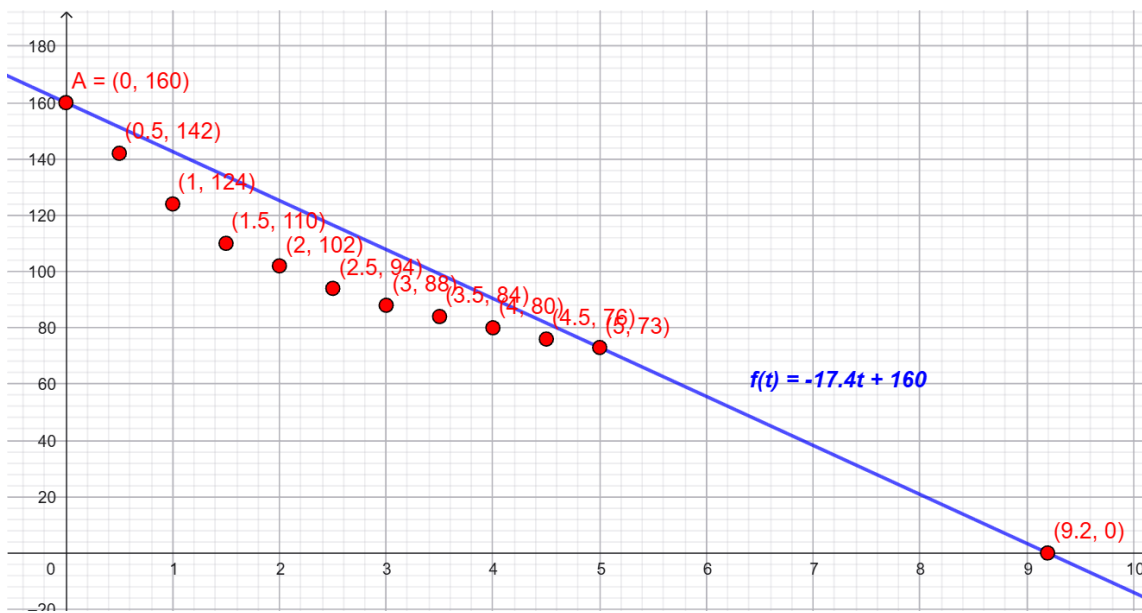
## **6.2. Análisis del Episodio 2: la génesis del modelo multiplicativo**

### **El conflicto lineal**

Alex representa sus datos de frecuencia cardíaca en GeoGebra y ajusta una recta de regresión. El software devuelve el modelo aproximado:

$$FC_{lineal}(t) = 160 - 17.2t$$

Para analizar la pertinencia fisiológica del modelo, se le pide calcular el instante en que la frecuencia cardíaca alcanzaría el valor cero. Al resolver la ecuación  $0 = 160 - 17.2t$ , Alex obtiene  $t = 9.2$ .



**Figura 2.** Ajuste lineal de los datos de Alex en GeoGebra.

Como se observa en la Figura 2, (ver la Figura 2: <https://www.geogebra.org/calculator/e5gv5hrs>) la recta ajustada predice que la frecuencia cardíaca llegaría a cero alrededor del minuto 9.2. Ante este resultado, Alex comenta: “*Profe, esto dice que en el minuto 9.2 mi corazón llega a cero latidos. Eso no puede ser; biológicamente estaría muerto*”.

Esta contradicción no implica por sí misma que el estudiante abandone de manera inmediata el modelo lineal, pero sí pone en evidencia una limitación relevante: la recta puede describir parcialmente la tendencia inicial de los datos, pero produce una predicción fisiológicamente inadmisibles cuando se extrapola. En este sentido, el episodio puede interpretarse como un conflicto de validación que abre la necesidad de buscar una estructura matemática más adecuada.

### La heurística del Exceso

Para avanzar en el análisis, el docente orienta a Alex a estudiar no la frecuencia cardíaca total, sino los latidos adicionales producidos por el esfuerzo físico. Para ello se define la variable:

$$E(t) = FC(t) - FC_{basal}$$

Dado que la frecuencia cardíaca basal de Alex es (70) lpm, se obtienen los siguientes valores de exceso: E = (90, 72, 54, 40, 32, 24, 18, 14, 10, 6, 3).

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

El estudiante calcula primero las diferencias entre excesos consecutivos: -18, -18, -14, -8, -8, -6, -4, -4, -4, -3. Estas diferencias no son constantes, por lo que el comportamiento no se ajusta adecuadamente a una estructura aditiva. Posteriormente calcula los cocientes consecutivos: 0.80, 0.75, 0.74, 0.80, 0.75, 0.75, 0.77, 0.71, 0.60, 0.50.

Aunque los últimos valores se alejan más debido a que el exceso es ya muy pequeño y las mediciones son más sensibles al error, durante buena parte del intervalo los cocientes se agrupan alrededor de (0.75). Alex interpreta esta regularidad del siguiente modo:

*“Cada 30 segundos pierdo aproximadamente una parte del exceso que tenía. Me queda cerca del 75% del exceso anterior. Es una multiplicación, no una resta”.*

Esta verbalización sugiere un desplazamiento desde un razonamiento aditivo hacia una interpretación multiplicativa del cambio.

### **De la recursividad a la función exponencial**

A partir de la regularidad observada, Alex expresa el comportamiento del exceso mediante la relación recursiva:  $E(t + \Delta t) = E(t) \cdot r$

Como cada paso temporal es de medio minuto ( $\Delta t = 0.5$ ), y  $r = 0.75$ , Alex aplica la regla iterativamente:

$$\text{En } t = 0.5: E = 90 \times 0.75 = 67.5$$

$$\text{En } t = 1.0: E = (90 \times 0.75) \times 0.75 = 90 \times (0.75)^2 = 50.6$$

$$\text{En } t = 1.5: E = 90 \times (0.75)^3 = 37.9$$

Como hay dos intervalos de medio minuto por cada minuto, el número de pasos transcurridos después de (t) minutos es (2t). Por tanto, el exceso puede expresarse como:

$$E(t) = 90 \times (0.75)^{2t}$$

Al sumar la frecuencia cardíaca basal, Alex obtiene el modelo:

$$f(t) = 70 + 90 \cdot (0.75)^{2t}$$

Durante la institucionalización, el docente muestra que esta expresión puede escribirse en la forma exponencial usual, usando la identidad  $r = e^{\ln(r)}$ , por tanto

$$(0.75)^{2t} = e^{2t \ln(0.75)} = e^{-0.575t}$$

El modelo de Alex se reescribe en la forma:

$$f(t) = 70 + 90 \cdot e^{-0.575 t}$$

Esta expresión corresponde a la forma canónica:  $f(t) = A + B e^{-kt}$ , donde ( $A=70$ ), ( $B=90$ ) y ( $k = 0.575$ ). De este modo, el modelo fisiológico estándar no aparece como una fórmula impuesta, sino como una reformulación del modelo construido a partir de los datos.

### **Análisis**

El episodio muestra cómo el conflicto generado por la extrapolación lineal puede ayudar a la búsqueda de una estructura matemática distinta. La variable *Exceso* cumple un papel didáctico central, pues permite desplazar la atención desde los valores absolutos de frecuencia cardíaca hacia la magnitud que efectivamente se disipa durante la recuperación.

La comparación entre diferencias y cocientes permite distinguir entre una estructura aditiva y una estructura multiplicativa. A su vez, la relación recursiva funciona como un puente entre el cálculo aritmético de razones y la formulación explícita de una función exponencial. En este sentido, el caso ilustrativo es coherente con la Hipótesis H2, aunque no establece por sí mismo una confirmación empírica.

### **6.3. Análisis del Episodio 3: la covariación**

Alex introduce en GeoGebra el modelo construido en el episodio anterior:

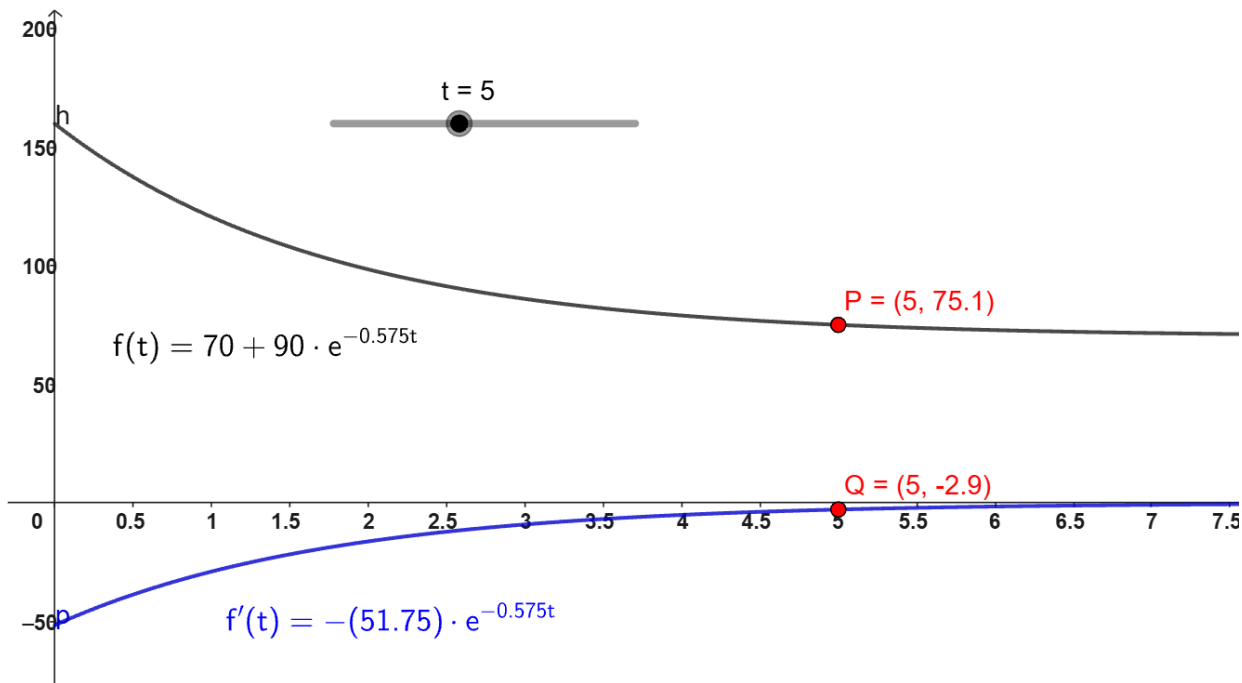
$$f(t) = 70 + 90 \cdot e^{-0.575 t}$$

A partir de esta función, el software permite visualizar simultáneamente la curva de recuperación cardíaca y su derivada:

$$f'(t) = -90(0.575)e^{-0.575t} = -51.75e^{-0.575t}$$

Mediante un deslizador asociado al tiempo  $t$ , Alex mueve dos puntos sincronizados: el punto P sobre la curva  $f(t)$  y el punto Q sobre la curva  $f'(t)$ . Ambos puntos comparten la misma abscisa, lo que permite observar al mismo tiempo el valor de la frecuencia cardíaca y el valor de la pendiente instantánea.

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional



**Figura 3.** Visualización dinámica simultánea de  $f(t)$  y  $f'(t)$  en GeoGebra. Al mover el deslizador  $t$ , los puntos P y Q se desplazan de manera sincronizada. Ver la Figura 3 en: <https://www.geogebra.org/calculator/fd6qwq2f>

Al desplazar el deslizador de  $t = 0$  a  $t = 5$ , Alex observa los siguientes valores aproximados:

En  $t = 0$ :  $f(0) = 160$ , y  $f'(0) = -51.7$ . El corazón está en su pico y la velocidad de descenso es máxima.

En  $t = 2$ :  $f(2) = 98.5$ , y  $f'(2) = -16.4$ . El corazón ya bajó mucho y la velocidad ha disminuido.

En  $t = 5$ :  $f(5) = 75.1$ , y  $f'(5) = -2.9$ . El corazón está cerca del basal y la velocidad casi se ha "apagado".

Estos valores permiten discutir que la frecuencia cardíaca disminuye durante todo el intervalo, pero que la rapidez de esa disminución también cambia. La pendiente es negativa, lo que indica descenso; sin embargo, su magnitud se reduce progresivamente y se aproxima a cero.

Ante la pregunta del docente, Alex comenta:

*“El (-51) corresponde al bajón fuerte que sentí al principio. Después la pendiente vale cerca de (-2.9), porque ya estoy casi en reposo y la velocidad de descenso se está apagando”.*

Esta verbalización articula la experiencia corporal del Episodio 1 con la representación dinámica del Episodio 3. La derivada deja de ser únicamente un procedimiento formal y se convierte en una herramienta para interpretar por qué la recuperación fue más rápida al inicio y más lenta al final.

### **Análisis**

La producción atribuida a Alex es compatible con algunas características asociadas al Nivel 5 de razonamiento covariacional descrito por Carlson et al. (2002), en tanto coordina la variación de la función con la variación de su razón de cambio. No obstante, al tratarse de un caso simulado, esta interpretación debe entenderse como una posibilidad analítica y no como evidencia empírica.

La representación construida en GeoGebra permite coordinar tres registros: el somático, asociado a la sensación inicial de desaceleración del pulso; el gráfico, asociado a la curva de recuperación y a la curva de la derivada; y el analítico, expresado en los valores de  $f(t)$  y  $f'(t)$ . Esta coordinación muestra el potencial de la tecnología para promover una génesis instrumental: GeoGebra no solo representa una función, sino que permite explorar dinámicamente la relación entre el fenómeno fisiológico y su modelo matemático.

En este sentido, el caso ilustra el tipo de comportamiento previsto en la Hipótesis H3, sin pretender confirmarla empíricamente.

### **7. Validación interna del diseño**

Antes de una implementación en aula, resulta pertinente examinar la coherencia interna de la propuesta, en una primera etapa, a partir de la coherencia entre sus fundamentos teóricos, los principios de diseño formulados y las actividades que integran la secuencia. Bajo este enfoque, la propuesta presentada muestra una articulación explícita entre los constructos teóricos seleccionados y las decisiones de diseño que orientan la actividad de los estudiantes.

El **Principio de Tangibilidad Somática** se materializa principalmente en el Episodio 1, donde la recuperación cardíaca es experimentada corporalmente antes de ser representada mediante tablas, gráficas o expresiones algebraicas. La actividad de percusión del ritmo cardíaco busca que la variación sea percibida como una experiencia vivida y no únicamente como una propiedad abstracta de una función. En este sentido, la propuesta se alinea con la Teoría de la

La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

Objetivación al reconocer el papel de los gestos, la percepción y la actividad corporal en la construcción de significado matemático.

El **Principio de Necesidad Pragmática** se refleja en el Episodio 2. El modelo exponencial no se introduce como un conocimiento previamente establecido, sino como una posible respuesta a las limitaciones encontradas al utilizar una representación lineal para describir la recuperación cardíaca. El conflicto de validación generado por la extrapolación de la recta y la posterior introducción de la variable *Exceso* buscan crear condiciones para que los estudiantes exploren nuevas formas de organización matemática de los datos.

Por su parte, el **Principio de Dinamismo Instrumental** se desarrolla en el Episodio 3 mediante el uso de GeoGebra como entorno de exploración. La visualización simultánea de la función y su derivada permite analizar la variación de manera dinámica y favorece la coordinación entre representaciones gráficas, numéricas y fenomenológicas. Desde la perspectiva de la génesis instrumental, el software deja de actuar únicamente como una herramienta de representación y comienza a desempeñar una función cognitiva vinculada con la interpretación del fenómeno.

No obstante, esta validación debe entenderse como una validación interna del diseño y no como una evaluación de su eficacia educativa. Las relaciones propuestas entre actividades, principios y marcos teóricos representan hipótesis de diseño cuya pertinencia deberá contrastarse mediante implementaciones reales. En consecuencia, una fase posterior de investigación deberá analizar en qué medida los estudiantes movilizan efectivamente las formas de razonamiento previstas y qué dificultades emergen durante la puesta en práctica de la secuencia.

La coherencia observada entre los principios de diseño, los episodios de la secuencia y los marcos teóricos constituye una primera evidencia de validez interna. Sin embargo, la pertinencia del diseño dependerá finalmente de cómo los estudiantes interpreten las tareas propuestas y de las formas de razonamiento que efectivamente movilicen durante la implementación

## **8. Conclusiones**

En este trabajo presentamos una secuencia didáctica para la enseñanza de la función exponencial en estudiantes de Ciencias de la Salud, articulando la Teoría de la Objetivación, la Perspectiva de Modelización y el Razonamiento Covariacional. La Génesis Instrumental

proporcionó un marco complementario para interpretar el papel de los artefactos tecnológicos empleados en la secuencia. La propuesta toma como contexto la recuperación cardíaca, un fenómeno fisiológico que permite vincular la experiencia corporal de los estudiantes con la construcción progresiva de modelos matemáticos.

Uno de los aportes centrales del diseño consiste en la introducción de la variable *Exceso*, que permite reorganizar los datos fisiológicos y hacer visibles las relaciones multiplicativas asociadas al comportamiento exponencial. Asimismo, la secuencia busca conectar la experiencia somática inicial con el análisis dinámico de la función y su derivada mediante el uso de herramientas digitales.

El análisis a priori y el caso ilustrativo sugieren que la propuesta posee coherencia interna y que los principios de diseño formulados ofrecen una vía plausible para promover formas de razonamiento relacionadas con la comprensión del cambio y la variación. Sin embargo, estos resultados deben interpretarse como parte del proceso de diseño y no como evidencia empírica de aprendizaje.

La principal limitación del trabajo es su carácter teórico y preempírico. En consecuencia, la validación de las hipótesis planteadas requerirá futuras implementaciones con estudiantes reales que permitan analizar las producciones, interacciones y formas de razonamiento emergentes durante la secuencia didáctica.

## 9. Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1992). Didactical engineering. En R. Douady y A. Mercier (Eds.), *Research in didactique of mathematics: Selected papers* (pp. 41–70). La Pensée Sauvage.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247–285. <https://doi.org/10.1007/BF02309532>

## La recuperación cardíaca como contexto para la enseñanza de la función exponencial: un diseño didáctico basado en objetivación, modelización y razonamiento covariacional

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378. <https://doi.org/10.2307/4149958>

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 135–164. <https://doi.org/10.1007/BF01273661>

Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 135–155. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004>

Imai, K., Sato, H., Hori, M., Kusuoka, H., Ozaki, H., Yokoyama, H., Takeda, H., Inoue, M., & Kamada, T. (1994). Vagally mediated heart rate recovery after exercise is accelerated in athletes but blunted in patients with chronic heart failure. *Journal of the American College of Cardiology*, 24(6), 1529–1535. [https://doi.org/10.1016/0735-1097\(94\)90150-3](https://doi.org/10.1016/0735-1097(94)90150-3)

Kuhn, J., Vogt, P., & Müller, A. (2022). Analyzing elevator oscillation with the smartphone acceleration sensors. En J. Kuhn & P. Vogt (Eds.), *Smartphones as mobile minilabs in physics*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-94044-7\\_35](https://doi.org/10.1007/978-3-030-94044-7_35)

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Pierpont, G. L., Stolpman, D. R., & Gornick, C. C. (2000). Heart rate recovery post-exercise as an index of parasympathetic activity. *Journal of the Autonomic Nervous System*, 80(3), 169–174. [https://doi.org/10.1016/S0165-1838\(00\)00090-4](https://doi.org/10.1016/S0165-1838(00)00090-4)

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(Especial), 103–129.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1–19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.19>

- Sierpiska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25–58). Mathematical Association of America.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (8.<sup>a</sup> ed.). Cengage Learning.
- Tocto Maldonado, J. S., Vivanco-Román, J., & Quizhpe Uchuari, I. A. (2023). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de pedagogía de las matemáticas y la física. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(2), 7225–7244. [https://doi.org/10.37811/cl\\_rcm.v7i2.5864](https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.5864)
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113–138. <https://doi.org/10.1023/A:1025516816886>
- Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press.