# La irracionalidad de Pi y la prueba de Lambert

**François Pluvinage**
fpluvinage@cinvestav.mx
**Cinvestav-IPN e IREM Strasbourg**
**México y Francia**

**Resumen.** Este texto presenta un intento de lograr que un público posiblemente sin formación científica especializada tenga una idea bastante precisa de la prueba del carácter irracional del número π. La prueba de esta propiedad la obtuvo en el siglo XVIII el sabio Johann Heinrich Lambert, también conocido por muchas otras invenciones y contribuciones, como la introducción en matemáticas de las funciones hiperbólicas o la definición y el uso de proyecciones en cartografía. La demostración completa de la irracionalidad de π es de nivel de licenciatura en matemáticas, pero creemos que la presentación de las herramientas matemáticas usadas por Lambert para su prueba no es solo para especialistas, sino provechosa para todo público. El uso de la tecnología puede introducir en la presentación un acercamiento sensible para tal propósito. Se enuncian condiciones para la factibilidad de un texto de divulgación científica accesible a todo público.

**Palabras clave**: Divulgación, Todo Público, Número Pi, Fracción continua, Irracionalidad.

**Abstract.** This text presents an attempt to ensure that a public possibly without specialized scientific training has a fairly accurate idea of the proof of the irrational character of the number π. The proof of this property was obtained in the eighteenth century by the sage Johann Heinrich Lambert, also known for many other inventions and contributions, such as the introduction in mathematics of hyperbolic functions or the definition and use of projections in cartography. The complete demonstration of the irrationality of π is of a bachelor's degree in mathematics, but we believe that the presentation of the mathematical tools used by Lambert for his test is not only for specialists, but also beneficial for all audiences. The use of technology can introduce into the presentation a sensitive approach for that purpose. Conditions for the feasibility of a scientific dissemination text accessible to all public are stated.

**Keywords:** Disclosure, All Public, Pi Number, Continuous Fraction, Irrationality.

 Fecha de recepción 19/02/18 Fecha de aceptación 08/05/18

## Introducción: Preguntas acerca de la presentación de un texto científico para convertirlo en un texto de divulgación.

Es importante en nuestra sociedad que los especialistas de educación matemática, además de dedicarnos a la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, llevemos una contribución a la difusión de la cultura matemática. Presentamos en el presente texto cómo se puede considerar que un público posiblemente sin formación científica especializada tenga una idea bastante precisa de la prueba del carácter irracional del número π. Este resultado matemático, descubierto en el siglo XVII, es relativamente poco conocido hoy, porque se encuentra algo escondido por la sombra de otro resultado del siglo XIX, el teorema de Hermite-Lindemann, que establece una propiedad más fuerte de π y su trascendencia. Sin embargo, las herramientas que permitieron al sabio Jean-Henri Lambert de probar la irracionalidad de π se pueden presentar a todo público y enriquecer su cultura matemática.

En una presentación de divulgación, las condiciones que se tienen que tomar en cuenta no son las mismas de las situaciones de enseñanza. En efecto, los objetivos son diferentes.

- En una presentación de divulgación, ¿cómo actuar para *que el público se sienta más inteligente* después de escuchar al conferenciante?
- Una reflexión que se pude recomendar a un conferenciante, en vez de cuidar en los prerrequisitos como se hace en situación de enseñanza, es plantearse el cuestionamiento: *¿Es posible que algunos oyentes no lo sepan?* En el presente caso, este cuestionamiento puede surgir por ejemplo a propósito del número π. ¿Es un objeto matemático conocido de todos? y si no es el caso, ¿cómo dar una aprehensión sensible de π a los asistentes que lo ignoran?
- Es recomendable *ampliar el panorama* de los elementos presentados durante una conferencia de divulgación. Si el tema lo permite, enseñar otros aspectos, que los meramente matemáticos, puede llamar la atención de una parte del público. Estos pueden ser, artísticos, como lo demuestra el amplio éxito de figuras de fractales, en particular el famoso conjunto de Mandelbrot. También pueden ser vinculados con estudios técnicos o con ramas científicas otras que las matemáticas.
- Para no perder la atención del público, hace falta *evitar el exceso*. Eso implica limitarse a un nivel matemático conveniente (no especializado en nuestro caso) y sólo dar al público una descripción esquemática de contenidos más avanzados. ¿En qué nivel matemático se sitúa el contenido en juego? En el caso de la irracionalidad de π, el nivel de la prueba es el de la licenciatura en matemática, mientras casi todas las herramientas usadas en esta prueba se pueden presentar al nivel matemático de la escolaridad obligatoria. Pretendemos que este constituirá el nivel de presentación en el caso considerado.

## 1. Un sabio del siglo XVIII: Johann-Heinrich Lambert

Una consulta interesante de Wikipedia en varios idiomas es la del artículo Johann Heinrich Lambert (o: Jean Henri Lambert, como se escribe en francés). Su trayectoria de sabio autodidacta genial a través de la Europa de la época, que no tenía sus fronteras actuales, genera algunas dudas o confusiones en los artículos de Wikipedia publicados sobre él. En inglés, se acierta que fue un “*Swiss polymath*”, en alemán, aparece como “*schweizerisch-elsässischer Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung*” (matématico, logista, físico y filósofo de la clarificación alsaciano-suizo), en francés no hay declaración de nacionalidad, y el inicio del texto del artículo de Wikipedia en español es el siguiente:

> *Johann Heinrich Lambert, o Jean-Henri Lambert (26 de agosto de 1728 - 25 de septiembre de 1777), fue un matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán de origen francés. Nació en Mülhausen (ahora Mulhouse, Alsacia, Francia) y murió en Berlín. Demostró que el número π es irracional, usando el desarrollo en fracción continua de tanx.* (Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert.)

Este texto por supuesto es algo incorrecto sobre la cuestión de nacionalidad, dado que no existía Alemania como país en la época, sino había diversas entidades nacionales como el reino de Prusia y el Sacro Imperio. Otra aserción incorrecta se refiere a la prueba de irracionalidad de $\pi$, que es el principal objeto del presente texto: Esta prueba se apoya sobre un desarrollo de $\tan(x)$ que no es exactamente una fracción continua, sino una escritura en forma de apilamiento infinito de tipo fraccional. Más adelante en el presente artículo reproducimos una página del documento original del propio Lambert, donde se ve el edificio fraccional que él construyó para la prueba.

En matemáticas puras hay también un aporte notable de Lambert con las funciones hiperbólicas, pero quizá la razón por la que se conoce el nombre de Lambert se relaciona con su herencia en cartografía: la proyección Lambert, todavía actual. Por ejemplo, la cartografía de Francia tiene el título *Lambert-93*, y el mapa de Francia metropolitana se actualizó a nueve zonas del sur al norte que aparecen en la Figura 1, tomada del sitio Internet del Institut Géographique National (IGN) francés. En Wikipedia en español, el lector puede consultar el artículo *Proyección conforme de Lambert.*

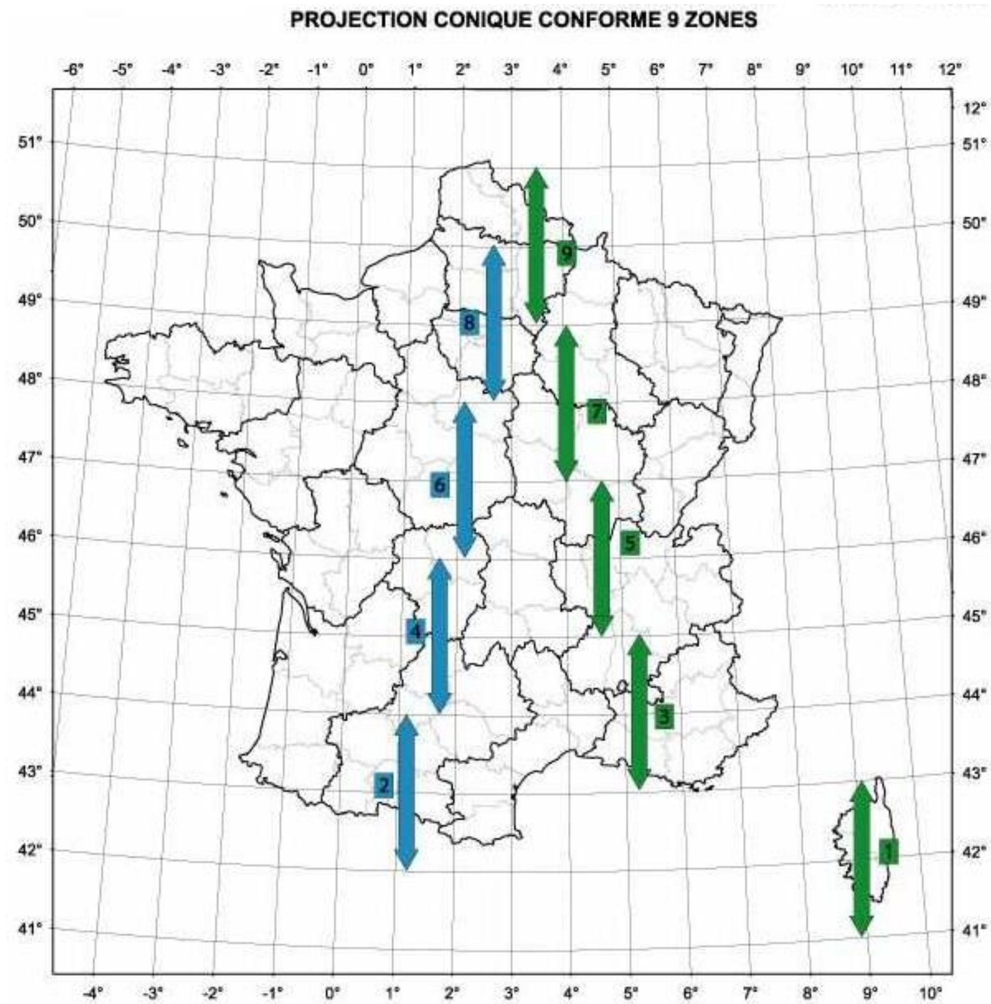



Figura 1: Proyección conforme de Lambert en 9 zonas del sistema geodésico francés

En la Figura 2 que sigue, se ven dos ilustraciones relacionadas con geografía:

- el cono sobre dos paralelos usado por el IGN francés, mismo cono que ha dado lugar a la proyección *Lambert-93* de la Figura 1,

Nota: Al contrario de la esfera, el cono es una superficie desarrollable: Después de un corte a lo largo de una generatriz, un cono se aplasta sobre un plano sin que se produzcan pliegos ni grietas. En el artículo citado de Wikipedia en español se encuentra otra ilustración de esto.

- la *columna Lambert* con su meridiana, inaugurada en 1828 en Mulhouse (Francia), la hora local de las 12:00 siendo determinada con precisión por la sombra de la aguja sobre la columna.

La litografía de la Figura 2 enseña el monumento en homenaje a Johann Heinrich Lambert edificado el año del centésimo aniversario de su nacimiento en Mulhouse. El mismo año, otro homenaje tomó la forma de la elaboración en Basilea (Suiza) de una biografía del sabio en tres tomos editada por Daniel Huber, él mismo siendo el autor del tomo 3, dedicado a las contribuciones de Lambert en matemáticas y física. El autor del primer volumen, en el que se narra la vida del sabio, fue un pastor protestante, Matthias Graff (Graff, 1829). Tenemos hoy la suerte de que los tres volúmenes reunidos en un único libro se pueden consultar como libro digitalizado gratuito (*ebook)*. De su portada, copiamos en la Figura 2 el grabado de la *columna Lambert*, con las firmas del dibujador Chapuy y del litógrafo Engelmann.

Figura 2: Un cono para proyección conforme de Lambert y la *columna Lambert* con meridiana.

Antes de encontrar el *ebook* citado, habíamos conseguido consultar un libro del conocido geógrafo Waldo Tobler (1972), fallecido en febrero del año 2018. El libro de Tobler contiene una traducción al inglés de la obra fundamental sobre los mapas terrestres y celestes (Lambert, 1772) y una biografía de Lambert adaptada del libro de Huber, volumen 1, citado en un artículo de Hans Maurer, publicado en la revista *The Hydrographic Review*, volumen VIII de 1931. Nos ha parecido preferible, en vez de usar un material que había pasado por tres autores sucesivos, respetar un principio de la indagación en la historia, que es referirse a obras originales. Algo que merece la atención, por enseñar un aspecto típico de la personalidad de Lambert, es la descripción de su entrevista con el rey Federico II de Prusia el año 1764. Lo que sigue es la traducción del alemán al español (hecha por el autor del presente artículo) del texto de Matthias Graff (Graff, 1829, p. 15).

> El año 1764, Lambert había venido a Berlín. (...) El rey quiso platicar con Lambert. Su amigo Sulzer tuvo que encargarse de su venida a Potsdam el día siguiente, para ser presentado al rey en la tarde. Esto molestaba mucho a los amigos de Lambert. Se temían de un comportamiento que no sea adecuado en la corte. Sin embargo, se tenía la necesidad de atender la petición del rey. Por eso, Lambert se fue de Berlin a Potsdam. (...) De la audiencia resultó el siguiente dialogo.
>
> Rey: "Buenas noches, señor. Haga el favor de decirme qué ciencias estudió usted en particular.
>
> Lambert: "Todas."
>
> Rey: "¿Es usted entonces también un matemático perito?
>
> Lambert: "Si."
>
> Rey: "Y, ¿qué profesor le enseño las matemáticas?"
>
> Lambert: "Yo mismo."
>
> Rey: "¿Pues, será usted un segundo Pascal?"
>
> Lambert: "Si, su Majestad."
>
> Ahora le dio el rey la espalda, por apenas impedirse la risa, y se fue a su gabinete. En la mesa, el rey declaró que le habían propuesto para su Academia el más loco hombre que jamás vio. (...)

Afortunadamente, el rey reconoció un año más tarde el genio de Lambert, al ser informado de sus publicaciones en varios dominios, y le nombró en 1765 miembro regular de su Academia en la sección de física. Sin embargo, es un tema matemático que nos interesa en los apartados que siguen.

## 2. Una herramienta potente: la antiféresis

La demostración completa de irracionalidad de π por Lambert se puede entender al nivel de la licenciatura de matemática. En las referencias del presente artículo aparece un sitio Internet (en francés y en inglés) dirigido por Boris Gourévitch, que presenta la demostración de Lambert completa (en español, el autor del presente artículo no la encontró escrita, sólo algunos documentos incompletos y otros con demostración diferente de la prueba de Lambert). Esta demostración sobrepasa el nivel de la pretendida divulgación, y veremos más adelante donde tendremos que admitir resultados sin dar detalles. Nuestro análisis de las herramientas puestas en marcha por Lambert nos convenció que es factible diseñar una presentación dirigida a todo público, suscitando su interés y enriqueciendo su cultura. En los apartados que siguen, tratamos de justificar de manera convincente esta aserción.

La primera tarea que le toca al expositor es trazar una ruta cognitiva accesible a todos, en nuestro caso para entender qué son fracciones continuas y cómo ellas permiten pruebas de irracionalidad. La condición es que esta ruta sólo debe necesitar las cuatro operaciones aritméticas y el conocimiento de los más usuales elementos de geometría, figuras (recta, círculo, triángulo) y configuraciones (paralelismo, perpendicularidad). Vale la pena que la presentación de este contenido se haga detalladamente.

El primer proceso que se presenta sobre nuestra ruta es el *antiféresis*. La palabra *antiféresis* es de escaso uso (no está en todos los diccionarios) y fácilmente su escritura, que inicia por “anti” como antinomia o antiséptico, induce una idea de oposición que no es relevante en el caso. En realidad, viene de la palabra griega “ανθυφαίρεση”, que corresponde a una iteración de suma, en relación con la división euclidiana con cociente y residuo.

El caso general con variables podría incomodar al público, pero vale la pena estudiar una situación particular, bajo la condición que sea *ejemplar* en el sentido de Wagenschein (1977), es decir representativa del caso general. Un buen candidato es la fracción de numerador 96 y denominador 28. En GeoGebra con deslizadores, se puede programar una “película” de la antiféresis. La Figura 2 enseña las tres etapas del proceso (véanse los números 2, 3 y 4 encerrados en la figura), que se acaba en la tercera por nulidad de residuo.

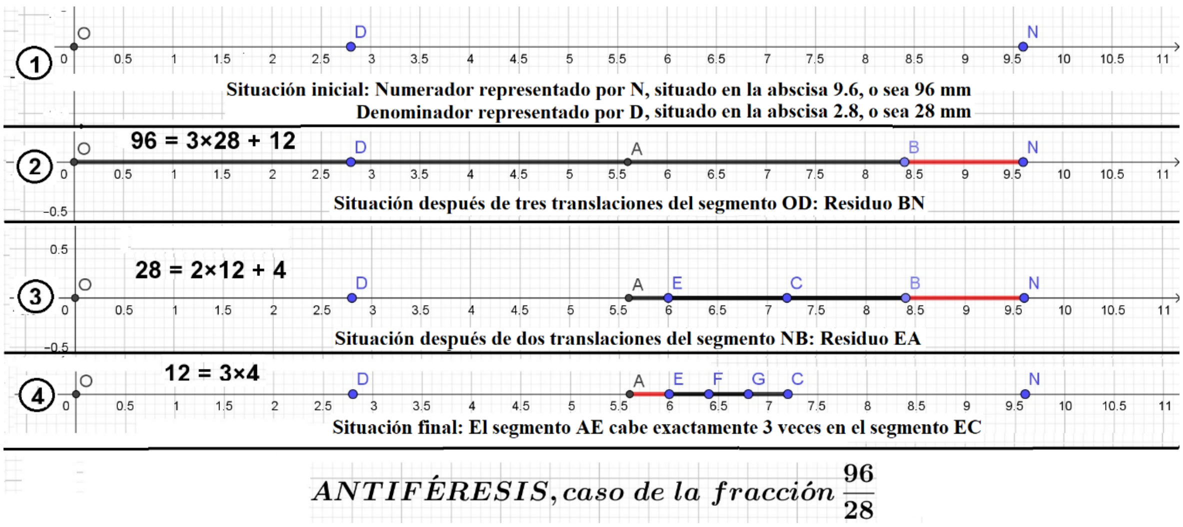



Figura 2: Un proceso de antiféresis que finaliza en la tercera etapa

Una vez terminado el proceso, los cálculos efectuados al subir desde la última igualdad generan una pila de fracciones igual à la fracción inicial (96/28).

$$4=\frac{12}{3};$$

$$28=2\times 12+\frac{1}{3}\times 12=\left(2+\frac{1}{3}\right)\times 12;\ 12=\frac{1}{2+\frac{1}{3}}\times 28;$$

$$96=3\times 28+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}\times 28;\ 96=\left(3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}\right)\times 28;\ \frac{96}{28}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$$

El cálculo numérico de esta pila conduce a: $3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=3+\frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)}=3+\frac{3}{7}=\frac{24}{7}$. No es la fracción inicial, sino el mismo número racional simplificado. En efecto, $\frac{96}{28}=\frac{24}{7}$. Entonces

$$\frac{96}{28}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}.$$



Dos conclusiones: 1) La antiféresis simplifica las fracciones. 2) A partir de una fracción cualquiera, el proceso de antiféresis se acabará después de un número finito de etapas.

## 3. Un ejemplo sencillo de irracionalidad

**Definición.** Se llama *fracción continua* una pila de la forma siguiente, donde el término $a_0$ es un entero (posiblemente negativo) y los demás términos $a_i$ son números naturales:

$$\mathbf{a_0}+\cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_1}+\cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_2}+\cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_3}+\cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_4}+\ldots}}}}$$

***Situaciones posibles***: Si la pila es finita, vimos en el apartado 3 arriba que representa un número racional, es decir un número que se puede escribir como una fracción. Si la pila sigue sin jamás pararse, el número que ella define es irracional.

Al igual de los desarrollos decimales que permiten representar todos los números reales, las fracciones continuas también permiten de representar todos los números reales. Ahora vamos a aplicar el proceso de antiféresis al número (1 + √2). La escritura √2 representa la raíz cuadrada de 2, o sea el número real positivo de cuadrado 2: √2×√2 = 2. De esta igualdad resulta que (√2 + 1)×(√2 – 1) = 2 – 1 = 1.

La última igualdad se puede también reescribir $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, que a su vez sirve para comparar a la unidad 1 el número (1 + √2):

$$1+\sqrt{2}=2+\left(\sqrt{2}-1\right),\ \text{entonces}\ 1+\sqrt{2}=2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

El último denominador repite el número inicial (1 + √2). Entonces se puede reemplazar a su vez por la misma expresión $2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, y se obtiene $1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$.

De repetir eso resulta una pila con repetición ilimitada del dígito 2

$$1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}$$



El carácter de pila ilimitada, con la repetición indefinida de 2, prueba que el número considerado <u>no es racional</u>. Se puede hacer observar que este resultado es muy análogo al hecho de que en la división de 1 por 3, el cociente 3 se repite de manera indefinida, y entonces que 1/3 = 0.3333…. (desarrollo decimal con sucesión ilimitada de 3) no es un número decimal.

## 4. El número Pi

Así como lo recomienda David Tall (2012), es provechoso, para la comprensión de un objeto matemático, introducirlo por un acercamiento sensible. En nuestro caso, se trata del número π. El movimiento de una rueda que se desplaza sin resbalar sobre el suelo permite este acercamiento: Una vuelta completa de rueda sobre el suelo genera un recorrido, cuya razón al diámetro de la rueda es π (Figura 3).

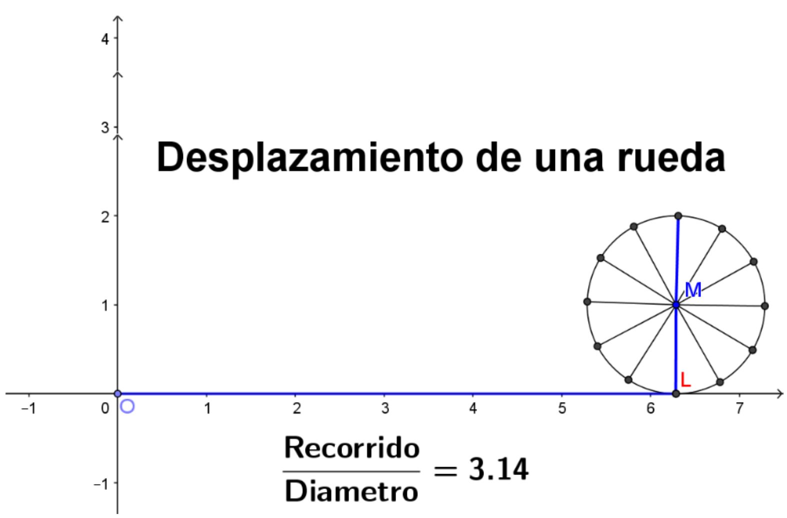



Figura 3: Una vuelta completa de rueda sobre el suelo

## 5. Herramientas de la prueba de irracionalidad del número Pi por Lambert

### Geometría en triángulos rectángulos: Trigonometría

El significado etimológico de la palabra *trigonometría* es la medición de magnitudes (longitudes, ángulos) observadas en triángulos. En la figura 4 se indican las razones trigonométricas de un ángulo.

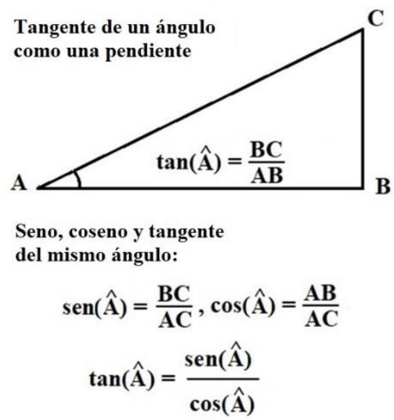



Figura 4: Un triángulo rectángulo con seno, coseno y tangente de su ángulo en A.

### Extensión al cálculo (estudio de las funciones reales de variable real): función tangente

Las razones trigonométricas se extienden al considerarse como funciones reales de una variable real.

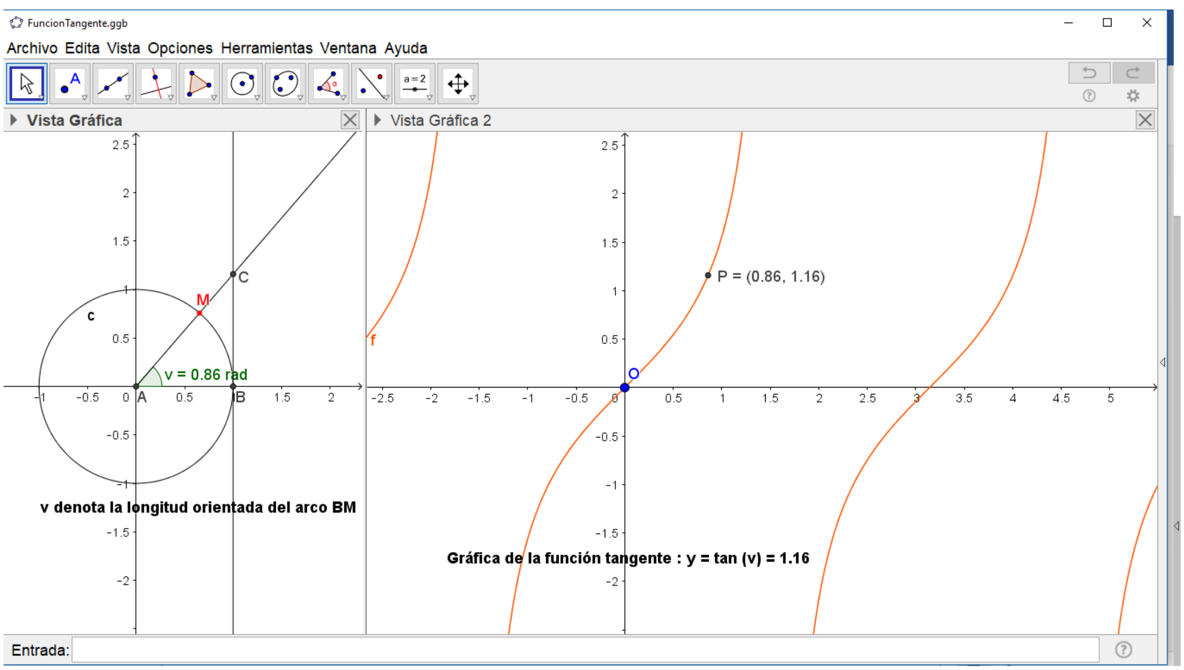
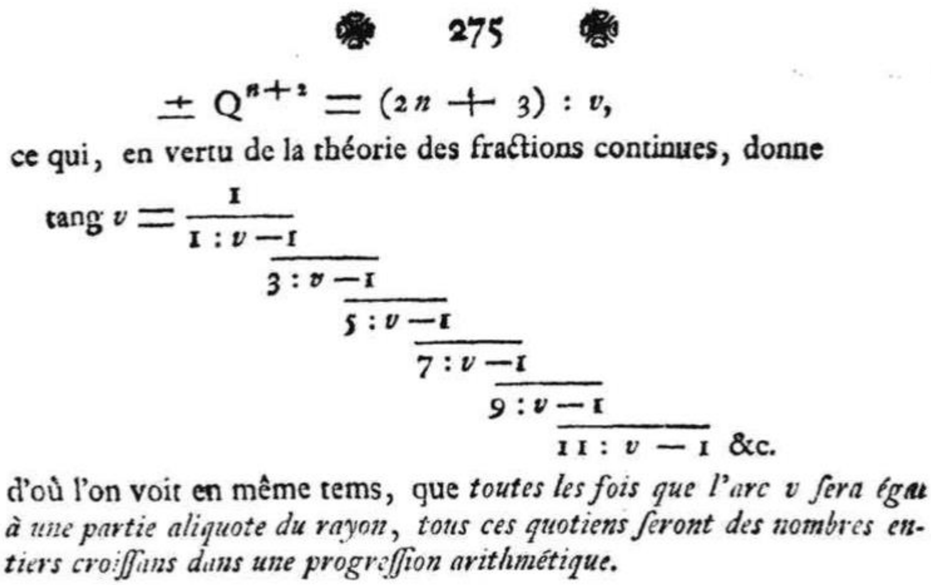



Figura 5: Construcción (izq.) y gráfica (der.) de la función tangente

En la figura 5, se ve como la consideración de un ángulo asociado a un arco de círculo permite esta extensión. La [gráfica de la función tangente] obtenida de esta manera aparece en la vista de derecha en la figura 5.



En estas consideraciones se puede (hasta *se debe*, en situación de divulgación dirigida a todo público) parar la presentación detallada de la prueba de Lambert. En efecto, el *andamio* que permitió a Lambert (1761) de construir un apilamiento de tan($v$) se obtiene al dividir desarrollos de las funciones seno y coseno: sen($v$) y cos($v$). En la Figura 6, copiada del documento (Lambert, 1761), se ve el resultado que proviene de esta división.


275

$$\pm Q^{n+2} = (2n + 3) : v,$$

ce qui, en vertu de la théorie des fractions continues, donne

$$\text{tang}\, v = \cfrac{1}{1 : v - \cfrac{1}{3 : v - \cfrac{1}{5 : v - \cfrac{1}{7 : v - \cfrac{1}{9 : v - \cfrac{1}{11 : v - 1 \;\&c.}}}}}}$$

d'où l'on voit en même tems, que *toutes les fois que l'arc v fera égal à une partie aliquote du rayon, tous ces quotiens feront des nombres entiers croiſſans dans une progreſſion arithmétique.*

Figura 6: Reproducción de la página 275 de las Actas de la Real Academia de Berlin (1761)

Más adelante en su texto, Lambert presenta la escritura que se obtiene al reemplazar $1/v$ por $w$. De este cambio de variable resulta en efecto una pila de apariencia más sencilla:

$$\tan\left(\frac{1}{w}\right) = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w - \cfrac{1}{7w - \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

Lo que Lambert deduce a partir de esta pila, semejante a una fracción continua, es que, si w es racional, es decir se expresa en forma de fracción, entonces tan($v$) = tan(1/w) es irracional. Pero un resultado trigonométrico conocido es por ejemplo que tan($\pi$/4) = 1, como se puede ver en la figura 4 si la imaginamos representando. un triángulo rectángulo isósceles (AB = BC). Dado que 1 es evidentemente racional, $\pi$/4 no puede ser racional, y tampoco $\pi$ es racional.

De la divulgación que es el objeto del presente texto, se espera que ella tenga las calidades necesarias para dar a todo público una buena idea del equipo intelectual que usó Lambert para subir a este Himalaya matemático que ha sido la demostración de irracionalidad de π.

## Referencias

Gourévitch, B. *L'univers de Pi – Lambert* http://www.pi314.net/fr/lambert.php

Graf, M. (1829). Johann Heinrich Lambert's Leben, en Huber, D. (Ed.) *Johann Heinrich Lambert nach seinem Leben und Wirken aus Anlass der zu seinem Andenken begangenen Secularfeier in drei Abhandlungen dargestellt*. (Volumen 1, pp. 1-87). Schweighauser, Basel. https://books.google.fr/books?id=a8QEAAAAYAAJ

Institut Géographique National (N. D.). Plaquette "Conique Conforme 9 zones" https://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/rgf93/cc9zones.pdf

Lambert, J. H. (1761) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, tome XVI, Berlin.
http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/LAMBERT_PROPRIETES.pdf

Lambert, J. (1772). *Notes and Comments on the Construction of Terrestrial and Celestial Maps*. Introduced and Translated by Tobler, W. (1972). Geography Department, University of Michigan, Ann Arbor. 125 pp.

Tall, D. (2012). A Sensible Approach to the Calculus. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*,Volúmen III. Año 2011 – 2012. pp. 43-70
http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=3&index_web=9&index_mgzne

Wagenschein, M. (1977), *Verstehen lernen, genetisch-sokratisch-exemplarisch*, Beltz Verlag: Basel; Weinheim.

Consultas de Wikipedia en español recomendadas:
https://es.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert
https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci%C3%B3n_conforme_de_Lambert