Homenaje póstumo a Humberto Madrid de la Vega, un visionario de la investigación en Matemática Educativa

Posthumous tribute to Humberto Madrid de la Vega, a visionary in research in Mathematics Education

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Carlos Armando Cuevas Vallejo

ccuevas@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

México

Recibido: 8 de diciembre de 2025

Aceptado: 11 de diciembre de 2025

Autor de Correspondencia:

Carlos Armando Cuevas Vallejo

De izquierda a derecha: F. Pluvinage, J,L. Díaz, H. Madrid. A. Cuevas, I. Hernández. M. Delgado, S. Paz.

Resumen: Es este artículo, producto de una conferencia impartida en La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones, A. C, en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, en honor al Dr. Humberto Madrid de la Vega, por esta razón expondré algunos trabajos de investigación llevados a cabo en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN con la colaboración del Dr. Madrid. Los trabajos versan sobre aplicaciones del álgebra lineal aplicada, cálculo diferencial e integral y computación y su incidencia en la matemática educativa. Desde sus inicios, como docente, en la Facultad de Ciencias de la UNAM el Dr. Madrid se destacó por proponer problemas de matemáticas con aplicaciones que inciden en el medio social, en este sentido investigaciones y teorías recientes en educación matemática, coinciden en que es la manera óptima de significar los conceptos matemáticos (Ausubel, 1980, 2002).

Abstract: This article is the product of a lecture delivered at the Mexican Society of Scientific Computing and Its Applications, A.C., at the Faculty of Exact Sciences of the Universidad Juárez del Estado de Durango, in honor of Dr. Humberto Madrid de la Vega. For this reason, I will present several research studies carried out at the Department of Mathematics Education of Cinvestav-IPN, in collaboration with Dr. Madrid. These studies address applications of applied linear algebra, differential and integral calculus, and computation, as well as their impact on mathematics education. From his early years as a faculty member at the Faculty of Sciences of UNAM, Dr. Madrid stood out for proposing mathematical problems with applications that have an impact on the social environment. In this regard, recent research and theories in mathematics education agree that this approach constitutes an optimal way to give meaning to mathematical concepts (Ausubel, 1980, 2002).

Antecedentes

Primer contacto. Hace años, durante un congreso memorable de la Sociedad Matemática Mexicana, por las personalidades que asistieron, entre las cuales se encontraba el eminente matemático francés René Thom, siendo estudiante novel de maestría y recién egresado de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, asistí con algunos maestros y compañeros. Sin conocer a las personalidades, me incorporé a un grupo grande de estudiantes que se agolpaban en un aula; ahí el conferencista, un joven cuyo nombre ignoraba, inició su plática, acompañado de gestos teatrales. Mencionó que el acostumbraba a ir al mercado popular de la Lagunilla, en la Ciudad de México, y que en esa ocasión vio tirada en el suelo una ¡transformación lineal! Todos nos volteamos a ver confundidos. Al notar nuestro desconcierto, agregó el conferencista: -Desconcertado le pregunté al marchante: ¿Cuánto cuesta? y respondió cinco pesos-, y el conferencista-profesor terminó diciendo: -la compré y aquí se las traigo-. A continuación, sacó de su gran maletín un aparato y nos mostró un ¡Pantógrafo!

Ese joven conferencista que, regocijado veía nuestros rostros sorprendidos se llamaba Humberto Madrid de la Vega. No podíamos creer que alguien se portara tan osado e irreverente ante conceptos matemáticos formales que, aunque los teníamos algo difusos, los considerábamos sumamente abstractos, formales, intocables y nada terrenales.

Segundo contacto. Muchas años después, orienté mi investigación hacía el diseño y construcción de sistemas tutoriales inteligentes y, en particular, el sistema Calcvisual (Cuevas y Mejía, 2003), un sistema para apoyo a la enseñanza del cálculo diferencial que, a través de la resolución de conceptos del cálculo diferencial, solicita al alumno construir la gráfica de un polinomio, que o bien propone el sistema o el mismo estudiante. Entre los muchos problemas que enfrentamos el Dr. Mejía y un servidor, fue la resolución o cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación polinómica mediante la computadora. Recordemos que tanto el estudiante puede libremente proponer el polinomio o ser aleatoriamente generado, de forma inteligente, por el sistema. Cuando acudí con el Dr. Madrid por ayuda, él y el grupo de investigadores en matemática aplicada de la facultad de ciencias de la UNAM respondieron que era un problema resuelto y que incluso existían programas en lenguaje C, en la red, que lo resolvían. Desconcertado, argumenté que habíamos programado varios métodos, pero que el mayor problema que teníamos era cuando las raíces eran múltiples. — ¡Múltiples! — respondieron al unísono —, entonces es un problema no resuelto.

Fue en ese momento que atrajimos la atención del Dr. Madrid y, como primer resultado, hubo una conferencia y un artículo (Madrid, 2013) en donde, a través de ejemplos, algunos dramáticos, nos mostró que los polinomios, y la mayoría de los objetos matemáticos, son objetos infinitos y continuos, y que las computadoras solo aceptan objetos finitos y discretos, y que por esta razón el control del error de aproximación era muy compleja.

> "El uso de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo plantea un problema singular: simular procesos continuos con herramientas finitas…A (casi) todo número real se le asocia un elemento de la aritmética de punto flotante $F.x \rightarrow fl(x)$…Aunque F trata de emular a ℝ, es claro que esto no es posible pues tratamos de reproducir el continuo con un conjunto finito. Sin embargo, la aritmética computacional es muy poderosa, aunque por supuesto tiene sus deficiencias. Para empezar las operaciones de suma y producto en F no son cerradas" (ibidem p. 41) y concluye "Por supuesto los detalles numéricos finos no se les ocurren a los profesionales promedio y no se trata de que los que generen este software sean especialistas en Análisis Numérico, pero es importante que se recurra a especialistas en esa área (ibidem p. 45).

En este sentido, algunos de nosotros nos enteramos con sorpresa que, cuando se introduce un polinomio o función matemática a una computadora, lo más probable es que se introduzca una aproximación del polinomio o función y no la función original. Además, que, debido a los procesos de aproximación, las raíces múltiples las puede considerar distintas y las diferentes, pero suficientemente cercanas, las puede considerar múltiples. Esto nos dio la pauta a proveer en el sistema CalcVisual (2003), subrutinas que minimizaran estos posibles errores. Indagando más el problema de raíces nos propusimos redactar un artículo que titulamos: "Software educativo y el cálculo de raíces reales para el desarrollo de un curso Conceptual del Cálculo: Una historia sin fin" (Cuevas y Madrid, 2013). En este artículo anotamos las importantes aplicaciones de las raíces reales en el cálculo diferencial e integral, e hicimos un breve recorrido histórico de las diferentes aportaciones al problema de resolución de ecuaciones que por cierto dieron origen al algebra (Rojano, 2004), dividiéndolo en cuatro etapas: *La primera*, inicia con Diofanto y el nacimiento de las ecuaciones y termina con la escuela italiana del siglo XVI, la cual, con Cardano (2007), proporcionó métodos para resolver ecuaciones por radicales hasta grado 4. *La segunda etapa*, continúa con el problema de encontrar soluciones a ecuaciones de grado mayor que 4 por radicales y con aportaciones de Lagrange, Ruffini, hasta que finalmente Abel y Galois, mostraron la imposibilidad de encontrar una fórmula, por radicales, para resolver una ecuación de grado mayor o igual que cinco. *La tercera etapa* muestra que este resultado orientó la búsqueda hacía encontrar métodos numéricos que aproximen el valor de una raíz; esta segunda parte termina con la aparición de la computadora, a mediados del siglo XX, máquina, que, en teoría, hacía factible la implementación de los métodos numéricos. Finalmente, *la cuarta etapa* inicia con la búsqueda de raíces con las restricciones de esta nueva herramienta y concluye con un impactante resultado publicado por Zeng en 2005 (Cuevas y Madrid, 2013).

Tercer contacto, el trabajo conjunto de la visión del análisis numérico del álgebra lineal numérica con las propuestas didácticas de un servidor, reunió un trabajo muy fructífero dentro del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN (DME) e iniciamos una serie de cursos de álgebra lineal conjuntando ambas visiones. Por ejemplo, el primer punto de coincidencia fue significar el concepto de vector, al inicio del curso, para ello rescatamos un documento (no publicado) de su trabajo en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en donde de manera sencilla inicia desde la representación de vector en la física hasta llegar a visualizarlo como un elemento de un espacio vectorial, mostrando en este trayecto, ejemplos como: notas de restaurante, informes de clima, y muchos más. La idea era mostrar, a los estudiantes. el abstracto concepto de vector, con ejemplos de la vida cotidiana. Este trabajo fue rescatado por los estudiantes y publicado como artículo (Madrid, 2019)

> "Los alumnos se ríen escépticos cuando prometo traer a la siguiente clase un vector en $\mathbb{R}^{43}$ y ¡de color negro!" (ibidem)

Lo anterior muestra de inmediato que la pregunta ¿qué es un vector? está mal planteada. No se puede hablar de un vector en sí mismo, sino de un conjunto de entes con determinadas reglas de combinación y cierta propiedad de dichas operaciones. Otro punto de coincidencia fue considerar que el significado y resolución de un sistema de ecuaciones lineales (SEL), podría constituir el corazón de un primer curso de álgebra lineal y del cual el Dr. Madrid, nos nutrió de múltiples ejemplos. Así mostramos que cualquier motor de búsqueda internet requería de resolver un SEL, o problemas de dieta, cocina o química, cuadrados mágicos y localizadores (GPS), entre otros. Para introducir el concepto de matriz y operaciones partimos del problema de reconocimiento y procesamiento de imágenes. En fin, la lista es larga y hasta aquí la dejamos, con un libro que quedo inconcluso.

Otra inquietud del Dr. Madrid fue un problema que detectó en sus cursos de la facultad de ciencias e ingeniería. Nos planteó una cuestión que resultó ser un problema detectado en educación matemática y heredado de la educación elemental, pero por alguna razón ignorado. Acostumbraba a plantear, al inicio del curso de álgebra lineal, el siguiente problema:

Resolver

(a). $2x = 5$;   (b). $0x\ = 7$;   (c). $0x = 0$

Retomamos este problema y lo pusimos en diversos años y grupos de diversas profesiones encontrando en promedio los siguientes resultados:

Para el ejercicio (a) solución correcta, 100% y ¿comprobó su resultado? El 13%

Para el ejercicio (b) solución correcta, 18%.

Para el ejercicio (c) solución correcta, 26.55% (Cuevas, Orozco y Madrid, en prensa)

¿Sorpresivo resultado? Dado el nivel escolar, sí sorprende, pero esto tiene una explicación, y proviene desde la educación elemental. La primera es que, en general, una ecuación como: $3x + 2 = 5x - 2$, en general lo asocian con una igualdad, lo cual confunde a los niños en primaria y secundaria, puesto que lo que observan a cada lado de la ecuación son términos matemáticos distintos, no iguales, aún más se ha encontrado que los estudiantes de estos niveles, consideran el signo = como una instrucción ejecutable, así en expresiones como: $3 \times 4 - 3 + 9 = 2 + 2 \times 5 + 6$, al llegar al igual ejecutan la operación y terminan (Kieran, 1981) y es que en realidad la expresión $3x + 2 = 5x - 2$ es una relación de equivalencia y cuando se resuelve una ecuación consiste en simplificar la ecuación, mediante operaciones algebraicas permisibles, deben ser equivalentes entre sí, cuestión que frecuentemente se olvida al efectuar operaciones de resolución en forma maquinal. Aún más, Filloy y Rojano (1989) nos advierten del complicado paso de la aritmética al álgebra.

Los ejemplos, son mucho más abundantes de la enorme contribución del Dr. Madrid a nuestra disciplina de matemática educativa, aunque debo recordar que su trabajo fue más dirigido a la matemática aplicada, de la cual estoy seguro podrán exponer con más propiedad otros colegas.

Referencias

Ausubel, D. P. (1980). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas.

Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: Una perspectiva cognitiva*. Paidós.

Cardano, G. (2007). *The rules of algebra (Ars Magna)* (T. R. Witmer, Trans.). Dover Publications. (Trabajo original publicado en 1545)

Cuevas-Vallejo, C. A., Orozco-Santiago, J., & Madrid de la Vega, H. (en prensa). Concepciones erróneas en el proceso de resolución y solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Cuevas, C. A., & Mejía, H. R. (2003). *CalcVisual: Sistema tutorial inteligente para la enseñanza del cálculo diferencial*. Oxford University Press.

Cuevas Vallejo, C. A., & Madrid de la Vega, H. (2013). Software educativo y el cálculo de raíces reales para el desarrollo de un curso conceptual del cálculo: Una historia sin fin. En C. A. Cuevas Vallejo & F. Pluvinage (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 1–16). Pearson.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326.

Madrid de la Vega, H. (2013). ¡Ojos que no ven, computadoras que mienten! *El Cálculo y su Enseñanza, 4*(1), 35–46. https://doi.org/10.61174/recacym.v4i1.159

Madrid de la Vega, H. (2019). Quisicosas vectoriales. *El Cálculo y su Enseñanza, 12*(1), 60–80. https://doi.org/10.61174/recacym.v12i1.34

Puig, L., Rojano, T. (2004). The History of Algebra in Mathematics Education. In: Stacey, K., Chick, H., Kendal, M. (eds) The Future of the Teaching and Learning of Algebra *The 12th ICMI Study*. New ICMI Study Series, vol 8. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_8