El Logaritmo en los Números Complejos

Silvia Carmen Morelos Escobar & José David Zaldívar Rojas
silvia.morelos@gmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónomas de Coahuila
México

Resumen. En el presente manuscrito se discute un primer acercamiento al estudio del logaritmo de los números complejos. Para ello se inicia con el hecho de que la función logaritmo es la inversa de la función e^z en los números complejos. Se hace notar que esta última función es multivaluada y por tanto se requiere una rama específica para tener una función. Se define la función Arg en los números complejos conocida como la función que relaciona un número complejo con un número en el intervalo $[0, 2\pi)$ que corresponde al ángulo que forma el segmento que va del origen al número complejo con el eje positivo x, en el sentido positivo, en contra de las manecillas del reloj.

Palabras clave: logaritmo, números complejos, inversa, esquema geométrico.

Abstract. In the present manuscript a first approach to the study of logarithm of complex numbers is discussed. In order to do so, we start with the fact that the logarithm function is the inverse of e^z, in complex numbers. It is noted that this last function is not "one to one" and therefore a specific branch is required to have a function that has an inverse. The function Arg is defined in the complex numbers known as the function that relates a complex number with a number in [0,2π) that corresponds to the angle that forms the segment that goes from the origin to the complex number with the positive axis x, in the positive sense, counter-clockwise.

Keywords: logarithm, complex numbers, inverse function, geometrical approach.

1. Introducción

El logaritmo es una función muy especial. Para muchos estudiantes resulta también una función con características particulares que en ocasiones se usa como una manera de resolver ecuaciones con exponentes variables (Stewart, 2012), como una función con una gráfica con ciertas particularidades y como la función inversa de la función exponencial (Ferrari, Farfán, 2010). Este tipo de acercamientos, como bien menciona Ferrari y Farfán (2010) deja, sin embargo, a los estudiantes y profesores bajo un esquema muy operatorio con respecto a los logaritmos, sin explotar argumentos funcionales con respecto a dicha noción.

Por otro lado dentro del conjunto de los números reales, el logaritmo puede modelar el crecimiento de algunas comunidades o, para resolver ecuaciones trigonométricas; mientras que en el conjunto de los números complejos se usa para calcular potencias de números complejos. En síntesis, podríamos decir que cuando se habla de los logaritmos se podrían considerar dos principales usos relacionados: para *facilitar cálculos,* con el desarrollo de herramientas apropiadas para ello; y para *modelar,* donde se conjunta el uso de logaritmos con las nociones de función y curva, para explicar realidades donde surgen progresiones geométricas o aritméticas (Ferrari y Farfán, 2010).

Ahora bien, en un curso regular de Cálculo Diferencial en el nivel Superior, donde se discuta el tema de función logaritmo o los logaritmos junto con sus propiedades, es común comentar con los estudiantes sobre el dominio de la función y que ésta no está definida para números negativos, incluso no está definida en cero. De manera general, el estudiante podría quedarse con una reflexión de que, dado que la función logarítmica y la exponencial son inversas entre sí, el logaritmo de un número negativo implicaría la necesidad de la existencia de un valor que cuando la base del logaritmo sea elevada a un potencia negativa, el resultado sea dicho valor, lo cual, dentro del campo de los números reales lleva a una contradicción. Sin embargo, dentro de la historia de la Matemática, se puede observar que este tipo de preguntas, *¿cuál es el logaritmo de un número negativo?*, permitió una fecunda controversia entre matemáticos de renombre como Leibniz, Bernoulli y Euler; hasta la posterior emergencia de la Variable Compleja como un dominio autónomo en el campo de las matemáticas (Cantoral y Farfán, 2008), y esto ocurrió principalmente cuando se quisieron extender las definiciones clásicas de logaritmo de números positivos a la de logaritmos de números negativos, pero a su vez, también implicó explorar la extensión de los números reales al campo de los números complejos.

En Cantoral y Farfán (2008), claramente se pone en evidencia que las controversias con respecto al valor del logaritmo de un número negativo, desató, por ejemplo, entre Leibniz y Bernoulli, un incesante debate donde se refutaban ideas y se vislumbraba una extensión de las propiedades de los logaritmos para números negativos. Por ejemplo, Leibniz, en un debate epistolar con Bernoulli, exponía lo siguiente con respecto al logaritmo de un número negativo: “$log(-2)$ no existe, porque si existiera, su mitad sería igual a $log(\sqrt{-2})$, una imposibilidad” (p.248), y análogamente como mencionamos anteriormente, Leibniz le escribe a Bernoulli en 1713 lo siguiente: “Suponiendo $2^e = x$, si $x = 1$ entonces $e = 0$, si $x = 2$, entonces $e = 1$. Cuando $x = -1$, e no puede determinarse” (p.249).

Es importante señalar que ambos argumentos expuestos por Leibniz a Bernoulli pretendían que la extensión de los logaritmos a números negativos no precisara de los números complejos, imposibilitando así, exploraciones con respecto al campo de dichos números. Por otro lado, debates entre Euler y Bernoulli fructificaron e incluso permitieron repensar la idea de lo que significa el concepto de función, e incluso plantean rupturas de corte epistemológico en las matemáticas de la época, puesto que debate con la conservación de propiedades establecidas en las matemáticas aceptadas socialmente (Cantoral y Farfán, 2008).

Como puede percibirse, cuestionar la estructura matemática aceptada de una época permitió grandes avances en la disciplina, aunque dicha ruptura no fuera inmediata ni sencilla; sino más bien, lenta y llena de contradicciones y limitaciones. Es de esperar entonces, que la aceptación de un universo nuevo de números para nuestros estudiantes, tampoco resulte tan inmediato de entrada, lo cual plantea así, importantes problemas de comprensión y acercamientos.

Es por ello, que en las siguientes secciones se delinea un planteamiento a manera de introducción al estudio del logaritmo de los números complejos, dando un especial énfasis a elementos gráficos como una posible ruta para visualizar las propiedades de la construcción propuesta y que podría considerarse también como un acercamiento inicial a los aspectos de Variable Compleja en el nivel Superior.

2. Desarrollo de la propuesta

En los números complejos, la función logaritmo es la función inversa de la función, $f(z) = e^z$, donde z es un número complejo de la forma $x + yi$, donde x y y son números reales, con una restricción en su dominio; para que exista la inversa de $f(z) = e^z$. En este medio $f(z) = e^z$ no es una función exponencial, si no que $f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + isen\, y)$. Cabe mencionar que al restringir z a ser un número real, esta función coincide con la función exponencial $e^z = e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i\, sen\, 0) = e^x$, se puede decir que en los números complejos, esta función es una función exponencial, sólo si la parte imaginaria es cero. De manera que la aproximación al logaritmo de números negativos no se basa en la definición habitual de los logaritmos para los números positivos.

No obstante a lo anterior, nos gustaría definir la función logaritmo en los números complejos de tal manera que nuestra definición coincidiera con la de la función logaritmo para los números reales. En el caso de los números reales positivos mayores que cero, se define la función logaritmo como la inversa de la función exponencial, es decir: $y = \ln x$ si y solo si $e^y = x$.

2.1. Definición de Logaritmo en los Números Complejos

Para definir la función logaritmo en los números complejos como la inversa de la función $f(z) = e^z$, con z en los complejos, no es posible, ya que esta función es periódica, de periodo $2\pi ki$, con $k \in \mathbb{Z}$, $f(z) = f(z + 2\pi ki)$, donde $k \in \mathbb{Z}$, es decir:

$$e^z = e^x(\cos y + isen\, y) = e^x[\cos(y + 2\pi k) + isen\,(y + 2\pi k)] = f(z + 2\pi ki).$$

Además la función $f(z) = e^z$ nunca se hace cero, así que no se puede definir la función logaritmo en cero.

Para definir la función logaritmo como la inversa de la función $f(z) = e^z$, con z en los complejos, se requiere restringir el dominio de esta función para que esta tenga inversa. Si restringimos el dominio al conjunto:

$$A_{y_0} = \{x + yi | x \in R \ \wedge y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$$

entonces, $f(z) = e^z$ es una función biyectiva de este conjunto A_{y_0} al conjunto de los números complejos excepto el 0. Con estas condiciones la función f tiene inversa, la función logaritmo que se define a continuación.

La función logaritmo con dominio en los números complejos excepto el cero y codominio el conjunto A_{y_0}, se define como:

$$log(z) = ln|z| + iarg(z)$$

donde el $arg(z)$ toma valores en el intervalo $[\,y_0, y_0 + 2\pi\,)$.

Esta función se conoce como *la rama de la función logaritmo en el intervalo* $[\,y_0, y_0 + 2\pi\,)$, la cual está bien definida cuando se especifica un intervalo de longitud 2π en el que el $\arg(z)$ toma sus valores. Para obtener este valor, vamos a definir la función argumento en los números complejos, para cualquier número complejo $z = x + yi$, se le asocia un número real que representa la medida del ángulo que se forma con el eje positivo x, como su lado inicial y el segmento que une el origen con el punto (x, y), como su lado terminal, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj y en radianes. Es una función que va de los números complejos al intervalo $[0,2\pi)$, es decir, la función argumento es una función real de variable compleja, la denotaremos por:

$$f(z) = Arg(z).$$

De esta manera, el logaritmo se puede expresar como:

$$\log(z) = \ln|z| + iarg(z) = \ln|z| + i[Arg(z) + 2\pi n]$$

para algún n número entero que cumple $\arg(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi)$, la rama que se está usando para el logaritmo. El número entero n correspondiente se puede encontrar resolviendo la desigualdad:

$$y_0 \leq Arg(z) + 2\pi n$$

Usando la calculadora:

Si $z = x + yi$ está en el primer cuadrante I: $Arg\ z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Si $z = x + yi$ está en el segundo cuadrante II: $Arg\ z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.

Si $z = x + yi$ está en el tercer cuadrante III: $Arg\ z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.

Si $z = x + yi$ está en el cuarto cuadrante IV: $Arg\ z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$.

Ejemplos.

Si el intervalo que se escogió es $[\,0, 2\pi\,)$ el:

$$log(1 + i) = ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$$

Sin embargo, si el intervalo especifico es $[\pi, 3\pi)$, el:

$$log(1 + i) = ln\sqrt{2} + \frac{9\pi}{4}i$$

Así, para este segundo ejemplo:

$$Arg(1 + i) = arctan\left(\frac{1}{1}\right) = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Como la rama es el intervalo $[\pi, 3\pi)$, se resuelve la desigualdad:

$$\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \;\Rightarrow\; \pi - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi n \;\Rightarrow\; \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi} \leq n \;\Rightarrow\; \frac{3}{8} \leq n \;\Rightarrow\; n = 1$$

Así:

$$arg(1 + i) = Arg(1 + i) + 2\pi \cdot\ 1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}.$$

Por lo tanto:

$$log(1+i) = \ ln\sqrt{2} + \frac{9\pi}{4}i \quad \text{en la rama } [\pi, 3\pi).$$

También se puede encontrar el $\arg(1+i)$ utilizando un esquema geométrico, como se ve en la siguiente figura, en la recta numérica (ver figura 1). Primero se localiza el $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, después se marca la rama que se está utilizando, posteriormente se localiza $\frac{\pi}{4}$ a la derecha de 2π, 4π, etc., de tal manera que nos vamos a fijar cuál de estas marcas cae en la rama que se está utilizando. Como se ve en el dibujo, es $\frac{9\pi}{4}$ la marca que se requiere. Así, $arg(1+i) = \frac{9\pi}{4}$ en la rama $[\pi, 3\pi)$.

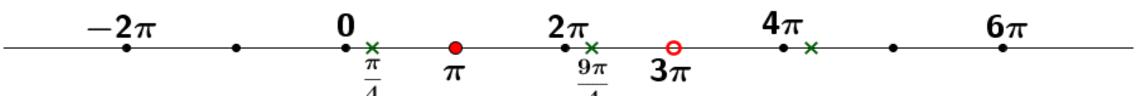

Figura 1. Hallando $\arg(1+i)$ en la recta numérica

Se puede decir que la función logaritmo en los complejos es una función multi-valuada. El logaritmo de un número complejo puede tomar tantos valores como números enteros hay.

Si se pide el $log(1+i)$ en la rama $[4\pi, 6\pi)$, en el dibujo se ve claramente que:

$$arg(1+i) = 4\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}.$$

Algebraicamente, se resuelve la desigualdad:

$$4\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \ \Rightarrow \ 4\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi n \ \Rightarrow \ \frac{\frac{15\pi}{4}}{2\pi} \leq n \ \Rightarrow \ \frac{15}{8} \leq n \ \Rightarrow \ n = 2.$$

Así:

$$arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi(2) = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}.$$

Por lo tanto:

$$log(1+i) = \ ln\sqrt{2} + \frac{17\pi}{4}i \quad \text{en la rama } [4\pi, 6\pi).$$

2.2. Definición de Potencia.

Se define la potencia de un número complejo en términos del logaritmo, así una potencia está definida en una rama especifica. Si $a \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$:

$$a^b = e^{b \cdot \log(a)}$$

Si b es un entero, a^b toma un único valor, no importa cual rama del logaritmo se esté usando.

Si b es un número racional de la forma $\frac{p}{q}$, tal que p y q no tienen factores en común, entonces a^b toma q diferentes valores, a saber las q-raíces de a^p.

Si b es un número irracional o si b es un número complejo cuya parte imaginaria es distinta de cero, entonces a^b toma infinidad de valores.

Ejemplos.

Para:

$$i^2 = e^{2\log i} = e^{2[ln|i|+i(Arg i+2\pi n)]} = e^{2\left[ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right]} = e^{2\cdot 0+i2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} = e^{i(\pi+4\pi n)} =$$

$$= \cos(\pi+4\pi n)+isen(\pi+4\pi n) = -1.$$

En este caso: n es cualquier número entero y, sin embargo, se obtiene un sólo valor, el que ya sabíamos.

$$i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(i)} = e^{\frac{1}{2}\left[ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right]} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)}$$

Si n es par, $i^{\frac{1}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ que es una de las raíces cuadradas de i .

Si n es impar, $i^{\frac{1}{2}} = e^{i\left[\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\,sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ que es la otra raíz cuadrada de i.

Dependiendo de la rama que se dé para el logaritmo el valor de $i^{\frac{1}{2}}$, será alguna de estas dos raíces.

Para:

$$i^i = e^{ilog\,i} = e^{i\left[ln\,1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right]} = e^{i\cdot 0+(-1)\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi n}.$$

Como n es cualquier entero, i^i puede tomar tantos valores como números enteros hay, según la rama que se dé para el logaritmo.

2.3. El logaritmo de los complejos para resolución de ecuaciones

Ahora, mostraremos una de las aplicaciones del logaritmo, resolución de ecuaciones trigonométricas. Por ejemplo:

Resolver la ecuación: $cos(z) = \frac{1}{2}$

Usando la definición de coseno, tenemos:

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 1$$

Multiplicando a esta ecuación por e^{iz}, tenemos:

$$e^{2iz}+1 = e^{iz} \Rightarrow e^{2iz}-e^{iz}+1 = 0$$

Haciendo un cambio de variable, $w = e^{iz}$ obtenemos una ecuación de segundo grado, que podemos resolver usando la fórmula general:

$$w^2-w+1 = 0 \Rightarrow w = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De donde:

$$e^{iz} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \Rightarrow \ iz = \log\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \ \Rightarrow \ z = -ilog\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

Resolviendo para el signo positivo:

$$\log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| + i\left[Arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 2\pi\, n\right] =$$
$$= ln\, 1 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$$

Donde n es un número entero.

Resolviendo para el signo negativo:

$$\log\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = ln\ \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| + i\left[Arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 2\pi\, n\right] =$$
$$= ln\, 1 + i\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right) = i\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$$

Por lo tanto:

$$z = -i\left(i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \ \ \text{ó} \ \ z = \ -i\left(i\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)\right) = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

Con n que pertenece a los enteros. Cabe observar que es la misma solución si z fuera real.

3. Conclusiones

En este manuscrito hemos querido mostrar una introducción a un tema que para muchos estudiantes de nivel Superior podría resultar contraintuitivo. Esperamos que la propuesta vertida resulte además significativa para los profesores de dicho nivel y que pueda considerarse como una ruta didáctica para acceder al tema del logaritmo de un número complejo. El planteamiento inicial de entender a los logaritmos de números negativos busca hacer reflexionar a los docentes sobre la necesidad de construir rupturas en el discurso matemático escolar con el fin de mostrar a los estudiantes cómo la contradicción pudiera resultar en una ampliación de ideas previas. Lo anterior pudiera motivar entonces a la reflexión compartida y permitir la exploración de rutas de acción y ampliaciones del campo de las matemáticas.

Cabe mencionar además que la propuesta presentada en este manuscrito se desprende de nuestra experiencia docente en el salón de clases y con la asignatura, aunada a las dificultades que hemos observado entre los estudiantes con el estudio de estos temas. Sin duda que lo anterior contribuyó a la elaboración de la presente propuesta y en particular a proponer argumentos gráficos y no solo la consideración de la resolución de las desigualdades, con la intención de promover la visualización de propiedades entre los estudiantes, generando así, un uso de más de un registro de representación.

4. Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje* *de las matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Pp. 241-284. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C y Ediciones Díaz de Santos: México.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2010). Una Socioepistemología de lo Logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4-I), 53-68.

Marsden, J. E. (1973). Basic Complex Analysis. U.S.A. Publicaciones Freeman.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. (7ª Edición). Cengage Learning Editores: México.