Diseño de actividades para la comprensión del diferencial mediante visualizaciones dinámicas

Designing activities for understanding the differential through dynamic visualizations

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Luis Carlos Rojas Flórez

lcrojasfl@ut.edu.co
Universidad del Tolima

Freddy Yesid Villamizar Araque
freddy.villamizar@unad.edu.com

Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD
Colombia

Recibido: 1 de junio 2025

Aceptado: 25 de junio de 2025

Autor de Correspondencia:

Freddy Yesid Villamizar Araque

Resumen. Este artículo presenta una propuesta didáctica para introducir el concepto de diferencial en funciones reales de una variable, centrándose en su significado geométrico y su visualización mediante objetos dinámicos diseñados en el software GeoGebra. A partir del estudio de las funciones lineales como modelo ideal, se introduce paulatinamente la idea de aproximación local, junto con la exploración del error de aproximación y el cociente del error relativo en el caso de funciones no lineales, con el propósito de formalizar la condición de diferenciabilidad para este tipo de funciones. A través de la integración de diversas formas de representación, esta propuesta busca propiciar una comprensión sólida del concepto de diferencial como un modelo lineal de carácter local, haciendo énfasis tanto en su visualización como en los fundamentos analíticos que lo sustentan.

Palabras clave: enseñanza del Cálculo, función real, diferencial, software de geometría dinámica, visualización.

Abstract. This article presents a didactic proposal for introducing the concept of differential in real functions of one variable, focusing on its geometric meaning and its visualization through dynamic objects designed in GeoGebra software. Starting from the study of linear functions as an ideal model, the idea of local approximation is gradually introduced, along with the exploration of approximation error and the relative error quotient in the case of nonlinear functions, with the purpose of formalizing the differentiability condition for this type of functions. Through the integration of diverse forms of representation, this proposal seeks to foster a solid understanding of the concept of differential as a linear model of a local nature, emphasizing both its visualization and the analytical foundations that support it.

Keywords: teaching of Calculus, real function, differential, dynamic geometry software, visualization.

1. Introducción

El concepto de diferencial representa la base del análisis matemático y, en particular, del cálculo diferencial. No obstante, a pesar de su relevancia teórica y aplicativa, este concepto es con frecuencia abordado de manera superficial en los cursos universitarios, donde suele diluirse entre técnicas de derivación y aplicaciones mecánicas, sin un análisis riguroso de su interpretación geométrica. Esta desconexión entre el contenido formal y la construcción de significado limita la conceptualización del concepto por parte del estudiante. En este sentido, Tall (2013) enfatiza que las dificultades en el aprendizaje matemático suelen surgir cuando los conceptos se presentan de manera exclusivamente formal, sin considerar cómo los estudiantes construyen significado desde sus experiencias previas. En consecuencia, conceptos como el diferencial podrían terminar siendo procesos puramente algorítmicos desprovistos de sentido.

Esta problemática ha sido ampliamente documentada en la literatura en educación matemática, la cual resalta la necesidad de articular diversos registros de representación para construir comprensiones significativas en matemáticas (Duval, 2006; Arcavi, 2003). Esta articulación resulta especialmente relevante al abordar conceptos fundamentales del cálculo diferencial, cuya comprensión exige transitar de manera coherente entre registros simbólicos, gráficos, numéricos y geométricos. En esta misma línea, Borji et al. (2023) y Hähkiöniemi (2006) destacan que la apropiación del concepto de derivada requiere movilizar múltiples representaciones interrelacionadas y significados coordinados. En el caso de funciones reales de una variable, es conocido que la existencia de la derivada en un punto implica la diferenciabilidad, y viceversa. Esta equivalencia puede entenderse formalmente como la posibilidad de aproximar la función, en un entorno del punto mediante ajuste lineal cuya diferencia con la función original, es decir, el error de aproximación se vuelve muy pequeño en comparación con el desplazamiento horizontal. En otras palabras, la razón entre el error vertical y la distancia horizontal tiende a cero cuando los puntos se acercan. Esta propiedad, que sustenta el concepto de diferencial, permite interpretar la recta tangente no solo como una expresión algebraica, sino como una herramienta de aproximación con un significado geométrico bien definido (Arcavi, 2003; Duval, 2006; Schoenherr y Schukajlow, 2023; Finesilver, 2022, Spivak, 2006).

Sin embargo, cuando esta equivalencia no se asimila con claridad desde el caso univariable, se generan vacíos conceptuales que pueden repercutir en el estudio del cálculo multivariable.

A diferencia del caso de una variable, en funciones de dos o más variables la existencia de derivadas parciales no garantiza la diferenciabilidad (Rojas, 2019b), lo cual puede confundir a los estudiantes que han interpretado la diferenciabilidad como una simple extensión del proceso de derivación (Borji et al., 2023; Martínez-Planell et al., 2015, Trigueros et al., 2024, Zandieh, 2000). Esta situación es especialmente crítica al abordar la linealización de funciones en múltiples direcciones, el uso del plano tangente o la aplicación del gradiente, donde la noción de aproximación lineal adquiere una complejidad mayor.

Como lo ha planteado la literatura especializada, estas dificultades pueden prevenirse si se introduce cuidadosamente el concepto de diferencial desde el caso de una variable, resaltando tanto su formulación analítica como su visualización geométrica y dinámica (Arcavi, 2003; Trigueros et al., 2024; Zandieh, 2000). Tal enfoque puede favorecer la construcción de un puente conceptual que prepare al estudiante para enfrentar el análisis multivariable con mayor madurez matemática.

En este artículo se propone una secuencia conceptual con intención didáctica centrada en el tratamiento gradual del concepto de diferencial para funciones reales de una variable, integrando representaciones gráficas, simbólicas y analíticas mediante el uso de herramientas dinámicas como GeoGebra. Diversos estudios han demostrado que la incorporación de tecnología como GeoGebra potencia la comprensión de conceptos de cálculo, al promover la representación interactiva de las variaciones (Hohenwarter y Preiner, 2007; Diković, 2009; Rojas, 2019a; Trigueros et. al. 2024). A partir del estudio de funciones lineales, cuyo carácter de aproximación exacta permite introducir la noción de diferencial en un entorno conceptual simple, se avanza progresivamente hacia el análisis de funciones no lineales diferenciables, donde se aborda el significado geométrico de la aproximación local y se introduce el error relativo como indicador de la validez del ajuste lineal.

2. Marco teórico y fundamentos de diseño

Esta propuesta se fundamenta en dos referentes teóricos principales que orientan tanto la estructuración de las actividades como el uso de recursos tecnológicos para la construcción del concepto de diferencial.

En primer lugar, se adopta la teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2006), la cual sugiere que la comprensión de un concepto matemático implica coordinar diversos registros de representación: simbólico, gráfico, geométrico y numérico. Esta teoría es especialmente adecuada para abordar el diferencial, cuya comprensión exige la articulación entre la expresión algebraica, la visualización de la pendiente, la recta tangente y el comportamiento del cociente de error relativo. Tal coordinación ha sido señalada como clave para superar los obstáculos epistemológicos asociados a la enseñanza de la derivada (Zandieh, 2000; Trigueros et al., 2024).

En segundo lugar, se considera el papel de la visualización dinámica como mediadora del aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Arcavi (2003), las representaciones visuales no solo acompañan al pensamiento matemático, sino que lo sustentan de manera profunda, incluso más de lo que muchos especialistas estarían dispuestos a admitir. Como afirma el autor, “las matemáticas dependen en gran medida, posiblemente mucho más de lo que los propios matemáticos estarían dispuestos a reconocer de la visualización en sus distintas formas y niveles” (p. 217). En este contexto, herramientas como GeoGebra emergen como recursos pedagógicos y didácticos valiosos: Facilitan una exploración dinámica y visual de conceptos como el error de aproximación, manipular parámetros como la pendiente o puntos de referencia, y construir así significados Matemáticas integrados y sustantivos Esta perspectiva se alinea con el planteamiento de Borba et al., (2005), para quienes la incorporación tecnológica trasciende lo funcional; implica una reconfiguración de las relaciones cognitivas que los estudiantes establecen con los objetos matemáticos, propiciando comprensiones de mayor alcance estructural.

Ambos enfoques convergen en esta propuesta al reconocer que la comprensión del diferencial no puede simplificarse a una definición simbólica ni a una interpretación geométrica aislada, sino que requiere una articulación intencional entre registros de representación y procesos de visualización. La teoría de Duval proporciona el marco para estructurar esta articulación semiótica, mientras que la perspectiva de Arcavi respalda el uso de visualizaciones dinámicas como recursos didácticos que favorecen la exploración, la anticipación y la validación de ideas matemáticas

3. Metodología

La propuesta se inscribe desde un enfoque cualitativo con carácter propositivo. Su objetivo principal es el diseño, tanto teórico como visual de actividades donde se potencie el uso de un software de Geometría Dinámica para la comprensión del diferencial a través de la manifestación de los diferentes Registros de Representación Semiótica y la visualización, sin incluir resultados de su aplicación en el aula. Se adopta una lógica de diseño didáctico analítico que integra referentes teóricos, principios de visualización y herramientas tecnológicas, específicamente objetos dinámicos elaborados con GeoGebra para el desarrollo conceptual.

Las actividades propuestas fueron estructuradas con base en tres criterios fundamentales: en primer lugar la coherencia teórica con los enfoques seleccionados, particularmente en lo que respecta a la coordinación de registros semióticos y la representación visual del comportamiento local de una función; en segundo lugar, la cual propone una progresión desde el análisis de un caso lineal sin error hacia situaciones que involucran funciones no lineales, donde se problematiza la validez de las aproximaciones; y, en tercer lugar, la integración tecnológica, mediante el empleo de objetos dinámicos en GeoGebra.

Los objetos dinámicos fueron diseñados para proporcionar al estudiante oportunidades de exploración visual, manipulación intuitiva y análisis del conceptos y subconceptos del diferencial de una función de una variable, en función de una comprensión progresiva que articula representaciones gráficas, numéricas y simbólicas.

4. El concepto de diferencial en funciones reales de una variable

Esta sección se centra en presentar una secuencia conceptual que parte de las funciones lineales caso ideal donde no existe error de aproximación y avanza hacia funciones no lineales, donde se introduce progresivamente la noción de error, el cociente de error relativo y, finalmente, la condición límite que da lugar a la definición formal de diferenciabilidad.

La progresión temática presentada en este artículo estará mediada por representaciones gráficas y objetos dinámicos diseñados en GeoGebra, que permiten visualizar el comportamiento local de una función y explorar la eficacia de las aproximaciones lineales. De esta manera, se construye una base visual, algebraica y conceptual que busca clarificar el papel del diferencial como herramienta de aproximación. Tal enfoque se alinea con lo propuesto por Tall (2004), quien resalta la importancia de construir significados mediante procesos conceptuales previos, de modo que las estructuras formales se apoyen en una comprensión intuitiva y visual. En esta misma dirección, (Borba et al., 2005; Cullen et al., 2020; Trouche et al., 2020) establecen que la integración de tecnologías digitales no solo modifica los modos de representación en matemática, sino que reorganiza profundamente las formas en que los estudiantes piensan y construyen significados, haciendo posible una comprensión tangible de nociones abstractas como la derivada o el diferencial.

4.1.La función lineal como caso ideal de aproximación

Las funciones lineales representan el caso más simple y, a la vez, más esclarecedor del comportamiento de una función diferenciable. Dado que su tasa de cambio es constante en todo su dominio, el proceso de aproximación local no implica pérdida de información ni introducción de error. En otras palabras, una función lineal se aproxima a sí misma en todo punto, lo cual la convierte en el modelo perfecto para introducir el concepto de diferencial.

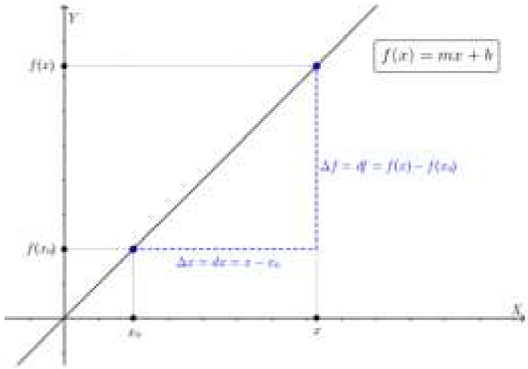

Figura 1. Función lineal como referencia para el estudio del diferencial (acceso mediante código QR)

Consideremos una función $f(x) = mx + b$, cuya gráfica es una recta con pendiente constante m (ver Figura 1, acceso a través de https://www.geogebra.org/m/vhgfhwht, o escaneado del código QR) Para cualquier par de puntos x_o y x, la diferencia de los valores de la función está dada por:

$$\Delta f = f(x) - f\left(x_0\right) = mx + b - \left(mx_0 + b\right) = m\left(x - x_0\right) = m \cdot \Delta x$$

De esta forma, se concluye que la razón de cambio promedio es constante:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = m$$

Esta expresión puede reescribirse como:

$$f(x) = f\left(x_0\right) + m\left(x - x_0\right)$$

la cual es útil porque expresa el valor de la función como una variación respecto a un punto base x_0, y su pendiente m.

Esta ecuación, representa la forma canónica del desarrollo local de una función lineal. La función se "reconstruye" a partir del valor en x_0 y la pendiente. Esta es la forma que tomará la aproximación lineal para funciones diferenciables en un punto, lo cual se explorará en la siguiente sección.

Además, Δf se puede expresar como:

$$\Delta f = m \cdot \Delta x$$

Cuando el valor de Δx es muy pequeño, se suele utilizar la notación diferencial para expresar la relación entre la variación de la función y la variación de la variable independiente.

$$df = m \cdot dx$$

Aquí, $dx = x - x_0$ representa un cambio extremadamente pequeño (infinitesimal) en la variable x, mientras que df es el cambio correspondiente en el valor de la función. Esta notación permite analizar el comportamiento local de la función en un entorno muy cercano a un punto dado. En el caso de funciones lineales, esta transición de la notación finita a la notación diferencial no genera ambigüedad, ya que la pendiente m permanece constante. Por ello, es válido afirmar que $df = \Delta f$ y $dx = \Delta x$ en este contexto.

El uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra permite dinamizar esta transición entre las representaciones finitas y diferenciales, al ofrecer visualizaciones manipulativas que refuerzan la comprensión local de la función. Numerosos estudios han resaltado cómo GeoGebra favorece la exploración de conceptos de cálculo, especialmente en relación con la pendiente y la linealidad local (Hohenwarter y Preiner, 2007; Diković, 2009; Rojas, 2019b).

Con el fin de facilitar la transición conceptual desde la notación finita (Δ) hacia la notación diferencial (d), a continuación, se presentan las diferencias entre ambas notaciones y su coincidencia en este caso particular:

- Δx y Δf representan variaciones finitas entre dos puntos.

- dx y df representan variaciones infinitesimales, en un entorno local.
- En funciones lineales, ambas notaciones coinciden $\Delta f = df$.
- En funciones no lineales df solo aproxima a Δf.

Con el propósito de visualizar lo antes dicho, se diseñó un objeto dinámico en GeoGebra (ver Figura 2, acceso a través de https://www.geogebra.org/m/amw5ebt8, o escaneado del código QR) que permite observar, de manera manipulativa, cómo se comportan Δx y Δf, y el vector diferencial $\vec{v}_{dif}$ sobre la gráfica de una función lineal.

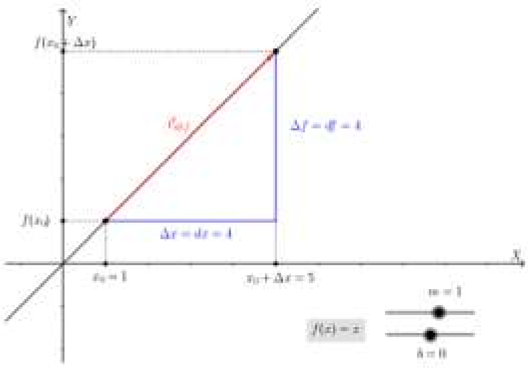

Figura 2. Representación del diferencial en funciones lineales: caso ideal (acceso mediante código QR)

Este objeto dinámico permite movilizar dos puntos $A = \left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$ y $B = \left(x_0 + \Delta x, f\left(x_0 + \Delta x\right)\right)$ sobre la gráfica de una función lineal. A medida que se modifican los puntos, se muestran los valores de Δx, Δf y la razón $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, que permanece constante.

Además, el objeto presenta un vector diferencial representado gráficamente como un vector que inicia en el punto A y finaliza en B este vector tiene por componentes Δx y Δf, esto es:

$$\vec{v}_{dif} = (dx, df) = (\Delta x, \Delta \mathrm{f})$$

Al ser de tipo lineal, la relación entre df y dx no varía, la pendiente es constante y el cambio real coincide con el valor del diferencial. Por ello, el vector diferencial no representa una estimación, sino el cambio exacto entre los puntos A y B.

Este comportamiento se explica por el hecho de que la pendiente de la función es constante. Por ello, el vector diferencial coincide exactamente con el cambio real de la función entre dos puntos. Para muchos, este resultado podría parecer evidente “casi innecesario de analizar” dado que el comportamiento de una función lineal es completamente predecible. Sin embargo, justamente por su simplicidad, este caso se convierte en el punto de partida ideal para introducir la notación diferencial y las ideas clave de aproximación. La función lineal proporciona un escenario libre de errores, donde el lenguaje diferencial adquiere sentido exacto.

No obstante, esta coincidencia entre diferencial y variación real, no se mantiene en funciones no lineales, donde la pendiente ya no es constante. En ese nuevo escenario, el vector diferencial deja de coincidir con el segmento vertical que une dos puntos de la gráfica, y comienza a surgir una diferencia entre el valor real de la función y el valor predicho por la recta de aproximación. Esa diferencia, conocida como error de aproximación, es clave para comprender con profundidad qué significa que una función sea diferenciable.

En la siguiente sección, exploraremos este fenómeno con mayor detalle, analizando funciones no lineales y planteando la necesidad de una condición que garantice que la recta tangente representa una buena aproximación local: la condición de diferenciabilidad.

5. Funciones no lineales y aproximación local

A diferencia de las funciones lineales, en las funciones no lineales la pendiente varía de punto a punto, lo que implica que no existe una relación constante entre el cambio en la variable independiente y el cambio en el valor de la función. Esta característica obliga a replantear el sentido de la aproximación local, ya no es posible afirmar que la función coincide con una recta en su entorno; sin embargo, surge la pregunta de si es posible aproximarla mediante una recta en torno a un punto dado. En este tipo de análisis, el pensamiento covariacional resulta fundamental, pues permite vincular variaciones simultáneas de dos cantidades como el valor real de la función y el estimado por la recta, lo cual ha sido ampliamente analizado por Thompson (1994).

Para ello, se introduce el concepto de aproximación lineal local. Dada una función real $f(x)$, se considera una recta que pasa por un punto fijo de la curva $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ y que tiene pendiente m. Dicha recta tiene la forma:

$$L(x) = f\left(x_0\right) + m\left(x - x_0\right)$$

Al comparar el valor real de la función en un punto cercano x con el valor que predice esta recta, se genera una diferencia vertical denominada *error de aproximación*, definida como (véase Figura 3, acceso a través de https://www.geogebra.org/m/qst2avwn, o escaneado del código QR):

$$\varepsilon(x) = f(x) - L(x) = f(x) - \left[f\left(x_0\right) + m\left(x - x_0\right)\right]$$

Este error mide la diferencia entre la función y su ajuste lineal. Visualmente, se representa mediante un vector vertical desde la recta hasta la curva. Al variar el valor de x y la pendiente m, es posible observar cómo cambia esta diferencia. Un error grande indica que la recta no ajusta adecuadamente la función en ese entorno; un error pequeño sugiere una mejor aproximación.

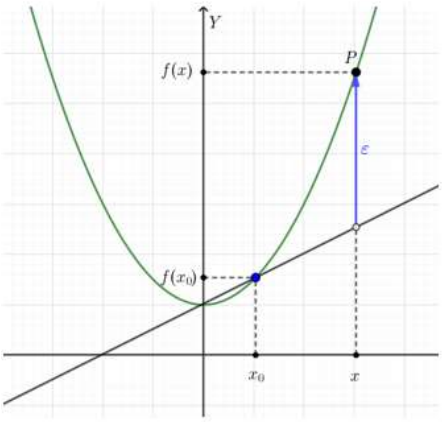

Figura 3. Representación gráfica del error de aproximación $\varepsilon(x)$ respecto a una recta. (acceso mediante código QR)

Para representar este escenario, se diseñó un objeto dinámico (ver Figura 4, acceso a través de https://www.geogebra.org/m/z5zxctb2, o escaneado del código QR) que permite controlar simultáneamente la pendiente de la recta m, el punto de evaluación x, y visualizar tanto la recta de aproximación como el punto real sobre la función. El punto base de aproximación se marca con un punto azul $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, mientras que el punto móvil $P = \left(x, f(x)\right)$ se desplaza controlado por un deslizador t. El vector azul vertical que une la recta con la curva representa el error ε, cuyo valor se actualiza dinámicamente. Además de esta visualización del error, se incluye en el objeto el vector diferencial, definido como $\vec{v}_{dif} = (dx, df) = (dx, m \cdot dx)$.

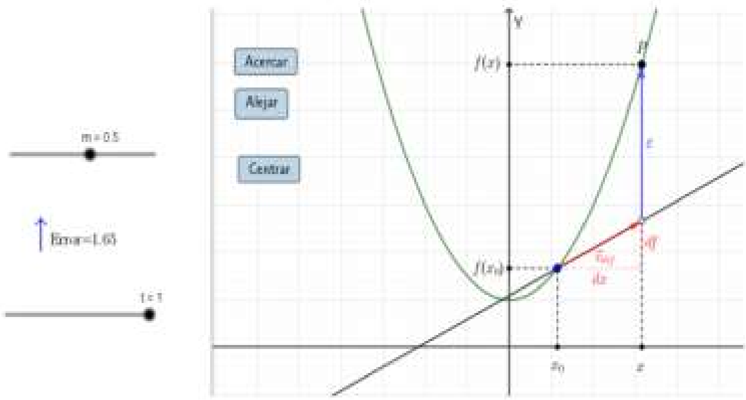

Figura 4. Aproximación lineal y análisis del error en funciones no lineales (acceso mediante código QR)

Este vector parte del punto base $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ y apunta hacia el punto que la recta con pendiente m estima para una variación horizontal dx. A diferencia del cambio real en la función, dado por $f\left(x_0 + dx\right) - f\left(x_0\right)$, esta construcción permite visualizar el error de aproximación como la diferencia entre el valor predicho por la recta y el valor real sobre la curva. Al modificar la pendiente m, la longitud del vector de error varía; sin embargo, solo cuando m coincide con la derivada de la función en x_0, dicho error tiende a cero en el límite cuando $dx \rightarrow 0$. Esta condición caracteriza a la recta tangente como la mejor aproximación lineal local.

Este enfoque visual permite comprender que el vector diferencial no representa el cambio real, sino el comportamiento de la función si esta se ajustara a un modelo lineal. Su utilidad radica en que, cuando la función es diferenciable, ese ajuste lineal es localmente válido, y el error tiende a cero en términos relativos.

En este contexto, la visualización dinámica, en el sentido propuesto por Arcavi (2003), y la manipulación exploratoria de los objetos constituyen herramientas clave para favorecer la construcción progresiva del concepto formal de diferenciabilidad. No se trata únicamente de observar el valor del error, sino de analizar cómo varía en función de la distancia horizontal entre los puntos, lo que permite introducir el cociente del error relativo. La exploración de este cociente mediante representaciones dinámicas ofrece un marco propicio para transitar desde la intuición visual hacia una formalización del concepto de diferenciabilidad. Esta conceptualización será desarrollada en profundidad en la siguiente sección.

6. Análisis del cociente del error relativo y condición de diferenciabilidad

La exploración visual realizada muestra cómo una función no lineal puede ser aproximada localmente mediante una recta que pasa por un punto base $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, con pendiente variable m. Sin embargo, esta aproximación genera un error, cuya magnitud depende directamente de la pendiente seleccionada. Al ajustar m, dicho error podría reducirse progresivamente, hasta alcanzar su valor mínimo cuando la recta logra reproducir con mayor precisión el comportamiento local de la función alrededor de x_0.A diferencia del caso lineal, donde cualquier par de puntos produce una recta que coincide exactamente con la función, en funciones no lineales esa coincidencia no se da, y el valor real de la función difiere del valor proyectado por la recta.

Esto origina la necesidad de estudiar con mayor profundidad la relación entre el ajuste lineal propuesto y el comportamiento real de la función. Dado un punto base x_0 y una recta de pendiente m que pasa por $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, es posible escribir la función como:

$$f(x) = f\left(x_0\right) + m\left(x - x_0\right) + \varepsilon(x)$$

donde el término $\varepsilon(x)$ representa el error de ajuste, esto es, el cambio de f que no es explicada por la aproximación lineal. Si bien es esperable que este error tienda a cero cuando $x \to x_0$, lo que verdaderamente interesa es su comportamiento relativo frente a la distancia horizontal. Para que el ajuste lineal sea válido, no basta con que el error desaparezca, debe hacerlo más rápidamente que el desplazamiento generado entre $x - x_0$, en otras palabras, se requiere que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = 0$$

Esta expresión no sólo da cuenta de la desaparición del error, sino que refleja la eficacia de la recta como aproximación local. El límite anterior permite definir con precisión el llamado cociente del error de aproximación:

$$E_m(x) = \frac{f(x) - f\left(x_0\right) - m\left(x - x_0\right)}{x - x_0}$$

Este cociente mide cuánto "queda" del error vertical por cada unidad de desplazamiento horizontal, en relación con la pendiente m considerada. Es decir, para cada pendiente m, el cociente $E_m(x)$ permite evaluar que tan precisa es la recta $L(x) = f\left(x_0\right) + m\left(x - x_0\right)$ como ajuste lineal de la función f alrededor de x_0. Esto es, la función f será diferenciable en x_0 si existe una recta con pendiente m tal que:

$$\lim_{x \to x_0} E_m(x) = 0$$

Y dicha pendiente es precisamente la derivada de f en x_0. Este planteamiento pone en evidencia que la diferenciabilidad no depende únicamente de la existencia del límite del cociente incremental, sino de la posibilidad de expresar el comportamiento de la función como una combinación de una parte lineal y un término de error mínimo, como lo propone Apostol (1972), Courant y Fritz (1974) y Spivak (2006).

$$f(x) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \varepsilon(x) \quad con \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = 0$$

Esta condición es más robusta que la simple existencia de la derivada, ya que especifica que el término lineal no solo captura el cambio instantáneo, sino que lo hace con un error infinitesimal. La pendiente dada por $f'\left(x_0\right)$ no es únicamente el valor hacia el cual tiende el cociente incremental, sino de la única pendiente que hace que el cociente del error relativo sea igual a cero en el límite. Como establece Courant y Fritz (1974), Stewart (2016) y Larson et al. (2011), la diferenciabilidad no solo implica derivabilidad, sino la posibilidad de expresar localmente la función mediante un ajuste lineal con error despreciable.

Desde una perspectiva geométrica, esto implica que la recta tangente no solo toca a la función en un punto, sino que la ajusta localmente con el mayor nivel de precisión posible. Visualmente, si se representa el cociente $E_m(x)$ como la ordenada de un punto $\left(x, E_m(x)\right)$, se puede observar que dicho punto tiende al eje horizontal únicamente cuando $m = f'\left(x_0\right)$. Para cualquier otro valor de m, el cociente no tiende a cero, y la recta deja de ser una buena aproximación en el entorno de x_0.

Esta interpretación se puede explorar de manera interactiva utilizando el objeto dinámico construido (véase Figura 5 a través de https://www.geogebra.org/m/aa4xbez7 o escaneado del código QR). Aquí el usuario puede ajustar libremente el valor de la pendiente m, desplazar el punto x, y observar el comportamiento límite del cociente $E_m(x)$. El punto rojo que representa este cociente se aproxima al eje horizontal únicamente cuando la pendiente coincide con la derivada. En todos los demás casos, se aleja o permanece separado, lo que indica que la recta propuesta no se ajusta al comportamiento local de la función.

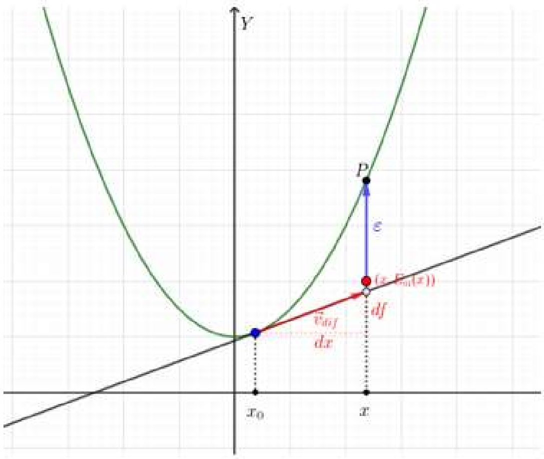

Figura 5. Exploración del error de aproximación y la diferenciabilidad (acceso mediante código QR)

Es precisamente aquí, donde el diferencial adquiere su verdadero significado. La expresión

$$\Delta f = f\left(x_0 + dx\right) - f\left(x_0\right)$$

representa el cambio real en la función, mientras que

$$df = f'\left(x_0\right) \cdot dx$$

hace referencia a la aproximación lineal que la recta tangente aporta para tal variación. En este contexto, dx no debe interpretarse como una variable libre, sino como un desplazamiento desde el punto x_0. Aunque algebraicamente $f\left(x_0 + dx\right) = f(x)$ cuando $dx = x - x_0$, la notación centrada en x_0 tiene un valor conceptual, puesto que señala de manera explícita la naturaleza local del análisis. En lugar de considerar a $f(x)$ como un valor independiente, se considera el comportamiento de la función frente a pequeños cambios alrededor de un punto fijo.

Así el comportamiento local de la función puede expresarse como:

$$f\left(x_0 + dx\right) = f\left(x_0\right) + df + \varepsilon(x)$$

Donde el error $\varepsilon(x)$ satisface:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\varepsilon(x)}{dx} = 0$$

Esto implica que el error disminuye más rápido con relación al desplazamiento y, por tanto, que el ajuste lineal proporcionado por la derivada ajusta el comportamiento local de la función. Por lo tanto, la derivabilidad no solo asegura la existencia de una razón de cambio, sino que también garantiza que la función puede ser representada localmente a través de un ajuste lineal. Como se aborda en diversos textos del cálculo (Apostol, 1972; Courant y Fritz 1974; Larson et al. 2011; Piskunov, 1984; Spivak, 2006; Stewart, 2016) la diferenciabilidad de una función en un punto no solo implica la existencia de la derivada, sino la posibilidad de aproximar el valor de la función a través de un ajuste lineal. Es decir, la función se comporta localmente como su recta tangente, con un error que se torna insignificante en términos relativos.

7. Estructura del ajuste local del diferencial: síntesis formal y visual

En las secciones anteriores se exploraron desde diferentes perspectivas, cómo el comportamiento local de una función diferenciable en un punto x_0 puede ser ajustado por una recta tangente cuya pendiente corresponde con su derivada en ese punto. A lo largo de este desarrollo, se ha demostrado que dicha recta no solo toca a la función, sino que aproxima su comportamiento en un entorno cercano. Esta idea, que es clave en el cálculo diferencial, se definirá formalmente.

7.1.Representación local de una función diferenciable

Dada una función $f: I \subseteq R \to R$, se dice que f es diferenciable en un punto $x_0 \in I$ si existe un número real $f'\left(x_0\right)$ tal que, para todo x suficientemente cercano a x_0, se cumple:

$$f(x) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \varepsilon(x)$$

con la condición de que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = 0$$

En esta expresión, $f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$ refiere a la parte lineal que ajusta el cambio de la función, mientas que $\varepsilon(x)$ es el error de ajuste que disminuye de manera más rápida en comparación con la variación horizontal $x - x_0$. Desde este punto de vista, el diferencial no representa el cambio exacto de la función, sino una estimación lineal que describe de una manera muy aproximada el cambio ocurrido. El término $\varepsilon(x)$, que representa el error de aproximación, se hace despreciable, en comparación con dx cuando este se vuelve muy pequeño. Esto garantiza que la recta tangente no solo ofrece una buena aproximación, sino que también se convierte en un ajuste válido y fiable del comportamiento de la función cuando $dx = x - x_0$ tiende a cero.

Ejemplo: aproximación de $f(x) = 1 + sen(x)$ mediante su recta tangente

El estudio de la diferenciabilidad de una función de una variable real, demanda más que comprobar la existencia de su derivada. Implica validar que la función puede ser representada localmente mediante un ajuste lineal, cuya aproximación en un entorno del punto considerado resulta válida.

$$f(x) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \varepsilon(x)$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = 0$$

Para validar esta condición desde un enfoque geométrico, analítico y visual, consideramos la función:

$$f(x) = 1 + sen(x)$$

Explorando su comportamiento entorno del punto $x_0 = 2.6$. El análisis se realiza a través de un objeto dinámico (ver Figura 6, acceso a través de https://www.geogebra.org/m/wgqva8by, o escaneado del código QR) que permite representar, manipular y validar la aproximación lineal mediante la recta tangente.

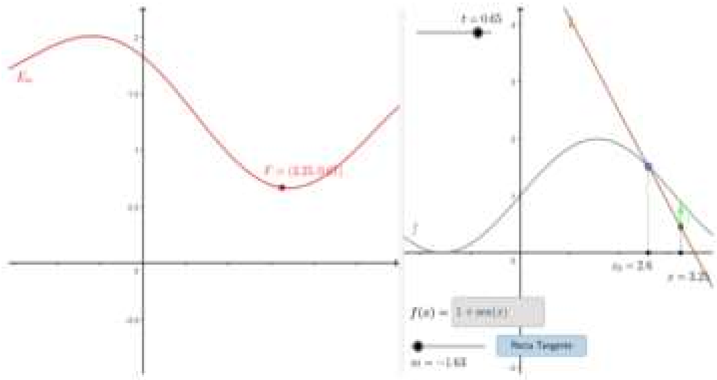

Figura 6. Visualización dinámica del diferencial y el error relativo (acceso mediante código QR)

La manipulación del objeto dinámico permite explorar detalladamente el comportamiento del diferencial y del cociente del error para la función $f(x) = 1 + sen(x)$, tomando como punto base $x_0 = 2.6$. Esta exploración se realiza mediante la coordinación y visualización de los elementos presentes en las dos vistas gráficas del objeto. Es importante destacar que tanto la función como el punto x_0 pueden modificarse, permitiendo al usuario explorar otras funciones y escenarios distintos.

Al ajustar manualmente la pendiente m de la recta $L(x)$, y desplazar x utilizando el deslizador t, se observa que cuando la pendiente difiere de la derivada de $f(x)$ en x_0, el ajuste lineal no proporciona una buena aproximación. En este caso, el vector error mantiene una longitud "considerable", alternando entre los colores rojo y verde a medida que varía x, indicando sobrestimación y subestimación respectivamente. Este comportamiento geométrico se resalta en la vista gráfica izquierda, donde el punto F, cuya ordenada representa el valor del cociente del error relativo, no converge al eje horizontal al aproximarse x a x_0.

Por el contrario, cuando la pendiente se ajusta exactamente al valor de la derivada $f'(2.6) = cos(2.6)$, activando el botón "Recta Tangente"; en la vista derecha el vector error reduce su longitud más rápido que el desplazamiento horizontal $x - x_0$, lo que significa que la razón entre el error y la distancia horizontal decrece al acercarse x a x_0. Este comportamiento muestra que el ajuste lineal es bueno en el entorno de x_0, dado que el vector tiende a desaparecer en el límite, cuando el desplazamiento horizontal se reduce a cero, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} E_m(x) = 0$$

Este resultado confirma que la recta tangente establece un ajuste lineal local de primer orden, y confirma la diferenciabilidad de la función en el punto considerado. De este modo, el objeto dinámico permite mostrar que la diferenciabilidad no solo implica la existencia de una derivada, sino que requiere que el ajuste lineal proporcionado por la recta tangente sea estructuralmente válido, es decir, que el error relativo decrezca más rápido que el desplazamiento horizontal. El uso coordinado de las dos vistas facilita una comprensión reflexiva del concepto, articulando visualización geométrica, representación analítica y retroalimentación visual, elementos clave para una comprensión profunda del diferencial.

8. Discusión

A lo largo del presente trabajo se ha desarrollado una secuencia conceptual centrada en el diferencial para funciones reales de una variable, destacando aspectos visuales, analíticos y dinámicos que buscan enriquecer la comprensión del concepto más allá de los métodos tradicionales. Es importante señalar que limitarse únicamente al cálculo mecánico de la derivada puede resultar insuficiente para una comprensión profunda del concepto de diferenciabilidad, especialmente si se omite el análisis riguroso del error y la estructura local que da soporte al ajuste lineal.

El recorrido que parte desde el caso más simple, las funciones lineales, hasta el análisis más detallado del límite relacionado con el cociente del error, proporciona una estrategia progresiva que facilita una comprensión sólida del diferencial visto como una aproximación lineal local. Sin embargo, es importante enfatizar la distinción entre una recta cuya proximidad visual a la función es aparente y aquella que representa formalmente el diferencial. Aunque pueden existir rectas con pendientes diferentes que proporcionan aproximaciones visuales cercanas, únicamente la recta cuya pendiente es exactamente $f'\left(x_0\right)$ garantiza que la razón entre el error cometido y la distancia al punto se haga despreciablemente pequeña conforme esta distancia se reduce.

Desde un enfoque pedagógico, la propuesta presentada en este artículo sugiere que la introducción del concepto de diferencial, apoyada en la visualización explícita del error, el vector diferencial y el análisis del cociente relativo, tiene el potencial de facilitar una comprensión estructural profunda del concepto. Esta manera de abordar la enseñanza del diferencial encaja adecuadamente en enfoques educativos que recomiendan el uso coordinado de diferentes representaciones semióticas, particularmente cuando se integran tecnologías dinámicas que permiten a los estudiantes construir activamente significados matemáticos.

Además, esta estructura conceptual prepara de manera efectiva al estudiante para abordar posteriormente la diferenciabilidad en funciones de dos variables. Como es bien conocido, en contextos multivariables la presencia de derivadas parciales no implica automáticamente que la función sea diferenciable. Por esta razón, haber construido previamente una comprensión sólida basada en aspectos visuales, formales y analíticos en el contexto unidimensional, proporciona una base esencial para enfrentar estos desafíos conceptuales más complejos. Muchas intuiciones generadas a partir de la visualización bidimensional, especialmente la noción de aproximación local mediante una recta tangente, encuentran su natural extensión en el estudio de funciones de dos variables (Rojas, 2019b), donde la recta se convierte en un plano tangente que mantiene coherencia visual y conceptual con la idea original.

9. Referencias

Apostol, T. M. (1972). *Calculus, Volume I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra* (2nd ed.). John Wiley y Sons.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241.

Borba, M. C., y Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Springer.

Borji, V., Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2023). University students' understanding of directional derivative: An APOS analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Courant, R. y Fritz, J. (1974). *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. I* (2.ª ed., trad. E. García de la Vega). Limusa

Cullen, C. J., Hertel, J. T. y Nickels, M. (2020). The roles of Technology in Mathematics Education. *The Educational Forum*, 84(2), 166–178.

Diković, L. (2009). *Applications of GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level*. Obnovljeni Život, 64(1), 73–78.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Finesilver, C. (2022). Beyond categories: Dynamic qualitative analysis of visuospatial representation in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 271–290.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative* (No. 104). University of Jyväskylä.

Hohenwarter, M., y Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7, Article ID 1448.

Larson, R., Edwards, B., Young, H., y Freedman, R. (2011). *Cálculo. De 1 y de 2 variables.* McGraw Hill.

Martínez-Planell, R., Trigueros, M., y McGee, D. (2015). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. En T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield y H. Domínguez (Eds.), *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 355–362). Michigan State University.

Piskunov, N. (1984). *Differential and integral calculus (Vol. 1).* MIR Publishers.

Rojas, L. C., Mejía, H. R., y Esteban, P. V. (2019a). Conceptualización de la derivada direccional a partir de la pendiente de una recta en el espacio. *El cálculo y su enseñanza*, 12, 13-26.

Rojas, L. C. (2019b). *Enseñanza y aprendizaje de la derivada direccional a través de la interacción con objetos dinámicos [Tesis doctoral]*. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV).

Schoenherr, J., y Schukajlow, S. (2023). Characterizing external visualization in mathematics education research: A scoping review. *ZDM – Mathematics Education*, 56(1), 73–85.

Spivak, M. (2006). *Calculus (4th ed.)*. Cambridge University Press.

Stewart, J. (2016). *Cálculo de una variable (7.ª ed.).* Cengage Learning.

Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 29–32.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education I* (pp. 21–44). AMS/MAA.

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., y Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM*, 56(6), 1093–1108.

Trouche, L., Rocha, K., Gueudet, G., y Pepin, B. (2020). Transition to digital resources as a critical process in teachers’ trajectories: the case of Anna’s documentation work. *ZDM*, 52(7), 1243–1257.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 103–127.