Diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la derivada

Design of a teaching sequence for learning the derivate

El Cálculo y su Enseñanza
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Paulina Danae López
paulina.lopez@unison.mx
https://orcid.org/0009-0003-5019-9660
Angélica Moreno Durazo
angelica.morenodurazo@unison.mx
https://orcid.org/0000-0002-7494-7091
Universidad de Sonora, México
Ana Bressan
anamariabressan@gmail.com
Ministerio de Educación de la Provincia de Río Negro, Argentina

Recibido: 13 de junio 2025
Aceptado: 10 de octubre 2025

Autor de Correspondencia:
Paulina Danae López

Resumen. Una demanda actual dirigida a docentes universitarios es modificar sus metodologías de enseñanza hacia aprendizajes más prácticos, que desarrollen en los estudiantes habilidades para resolver problemas del ámbito laboral. Sin embargo, realizar estos cambios no es una tarea sencilla, ya que implica que los docentes favorezcan en el estudiantado la revisión y reconstrucción de sus propios aprendizajes. Este artículo presenta el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre la función derivada, basada en el enfoque constructivista de la Educación Matemática Realista (EMR). La secuencia didáctica se contextualiza en el estudio de la densidad mineral ósea y fue implementada con 32 estudiantes universitarios. Los resultados evidencian avances significativos en la comprensión de la derivada y su aplicación en problemas de optimización, lo cual ofrece una alternativa metodológica para docentes que buscan fomentar aprendizajes más aplicados.

Palabras clave: aprendizaje activo, matemáticas aplicadas, derivada, ciencias de la salud.

Abstract. A current demand in higher education is for university instructors to shift their teaching methodologies toward more practice-oriented learning, aimed at developing students' abilities to solve real-world problems relevant to their future professional fields. However, implementing such changes is not a simple task, as it requires instructors to encourage students to critically review and reconstruct their existing knowledge. This article presents the design of a Hypothetical Learning Trajectory on the concept of the derivative, grounded in the constructivist principles of Realistic Mathematics Education (RME). The instructional sequence is contextualized within the study of bone mineral density and was implemented with a group of 32 university students. The results reveal significant progress in students' understanding of the derivative and its application to optimization problems, thereby offering a methodological alternative for educators seeking to promote more applied and meaningful learning experiences.

Keywords: active learning, applied mathematics, derivative, health sciences.

1. Introducción

A principios del siglo XX, surge en el ámbito educativo un llamado a la transformación de las formas de enseñanza a través de la corriente educativa conocida como Educación Nueva o Escuela Nueva, cuyo objetivo es modificar la educación tradicional, centrada en el protagonismo del docente, por un aprendizaje activo donde el estudiante sea el constructor de su propio conocimiento (Daher et al., 2022). Un ejemplo de esto es el proyecto Tuning-América Latina (2004 – 2007), que buscó establecer puntos de referencia comunes en los programas educativos de los diversos países europeos y latinoamericanos. Dicho proyecto define los perfiles profesionales para los egresados universitarios en términos de competencias. En el caso de los programas de ingeniería, estas competencias incluyen el desarrollo de habilidades y prácticas transversales útiles para resolver, con éxito, problemas, situaciones o tareas que pueden surgir del campo profesional (González y Granillo, 2020).

Esta transformación plantea un desafío en la educación matemática universitaria, ya que requiere modificaciones en la práctica docente, que implican no solo un gran desafío, sino también, un mayor esfuerzo para el diseño de experiencias de aprendizaje que sean significativas, que promuevan un aprendizaje activo, que favorezcan la autoconstrucción del conocimiento y que fortalezcan una formación integral (Silva y Maturana, 2017; Morales y Rodríguez, 2022 y Daher et al., 2022), posibilitando la vinculación entre los aprendizajes matemáticos y la vida real.

1.1 Una transformación necesaria en la enseñanza del Cálculo

Particularmente, esta transformación resulta problemática en los cursos de Cálculo universitarios, cuya enseñanza se caracteriza por una dinámica centrada en el profesor (Zuñiga, 2007), quien suele presentar los objetos matemáticos como conocimientos acabados y justificados dentro de la propia matemática, careciendo de sentido o utilidad para el estudiantado. Según Jiménez et al. (2022), tanto su enseñanza como su aprendizaje no promueve el desarrollo de habilidades para identificar y resolver problemas prácticos. Por el contrario, se enfocan en la demostración de teoremas, la memorización de fórmulas y la mecanización de procedimientos que conducen a resultados carentes de significado fuera del contexto matemático. Esta situación resulta contradictoria con “su papel central como herramienta para el estudio de la realidad circundante” (p. 11), según los mismos autores.

En el caso particular de los estudiantes de ingeniería, el estudio de la derivada debería proporcionarles herramientas que les permitan eficientizar, optimizar y/o resolver procesos, situaciones o problemas que pueden surgir en su entono laboral o social (Alsina, 2023). Sin embargo, diversos autores (Baker et al., 2000; Zuñiga, 2007; Dávila, 2010; Tall, 2012; Gonçalves y Da Silva, 2013) coinciden en que su enseñanza se enfoca principalmente en la resolución mecánica de ejercicios, donde el estudiantado aplica reglas sin comprender su sentido ni significado. Esto genera buenos resultados en ejercicios rutinarios, pero sin una comprensión profunda del concepto de razón de cambio, ni de su utilidad para identificar si una función es creciente o decreciente, su rapidez de cambio, sus valores extremos o sus aplicaciones en distintas disciplinas.

Por ello, un cambio de paradigma en la enseñanza del Cálculo, particularmente en el concepto de derivada, no es una tarea sencilla para los docentes, quienes deben integrar conceptos y procedimientos abstractos con situaciones prácticas del campo profesional o social, mediante actividades diseñadas para un aprendizaje activo y significativo. De acuerdo con Zuñiga (2007) y Camarena (2009), cuando el aprendizaje de la derivada se desarrolla en contextos significativos, se obtienen mejores resultados; en esta línea, investigaciones como las de Ariza y Llinares (2009), Jácome et al. (2022) y Sulasmi et al. (2020) abordan el aprendizaje de la derivada mediante situaciones extra matemáticas. Por su parte, Dávila (2010) y Pineda (2013) integran, además de contextos significativos, el uso de tecnología, ya que, según los autores, esta facilita la comprensión del concepto de derivada.

Estas investigaciones brindan información importante, sin embargo, se omiten aspectos fundamentales para la replicación de sus propuestas, por ejemplo, no se presenta el diseño instruccional completo, ni se ahonda en la relación entre la secuencia didáctica y los elementos teóricos. Así, este artículo presenta a detalle el diseño de una secuencia didáctica orientada al aprendizaje de la derivada en programas de las ciencias biológicas y de la salud a nivel universitario; esto enmarcado en un proyecto de intervención didáctica que tiene como objetivo el estudio de la derivada desde la perspectiva de la razón de cambio, apoyado con recursos tecnológicos para favorecer un aprendizaje integral e interdisciplinario de la derivada.

Esta propuesta se fundamenta en el enfoque didáctico de la Educación Matemática Realista (Gravemeijer y Terwel, 2000 y Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020), que proporciona el marco para el aprendizaje y, en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Simon, 1995), como herramienta metodológica, que particulariza expectativas para la comprensión de la derivada; bajo la cual se estructura la secuencia didáctica, incluyendo la organización de tareas y el uso de recursos tecnológicos.

2. Fundamento teórico – metodológico

La Educación Matemática Realista (EMR) constituye el fundamento del diseño instruccional de una secuencia didáctica orientada al aprendizaje del concepto de derivada. Este diseño se basa en los planteamientos de Gravemeijer (2004), quien propone articular dentro del diseño instruccional una trayectoria de aprendizaje propuesta, a través de la Teoría de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) de Simon (1995). En este sentido, la THA se construye como una herramienta clave para estructurar y analizar los procesos de aprendizaje del estudiantado, partiendo de sus conocimientos informales hacia formas de razonamiento cada vez más formales y abstractas. Esta relación se manifiesta en los *niveles de matematización* propuestos por la EMR, los cuales definen el grado de complejidad cognitiva esperada y guían tanto el diseño como la organización de las tareas que conforman la THA.

2.1 La Teoría de la Educación Matemática Realista

La fundamentación en la EMR radica en considerar a la matemática como una actividad (*principio de actividad*); es decir, la matemática no es un sistema de saberes preconstituidos, sino una actividad que consiste en organizar o estructurar (matematizar) dominios de la realidad que se presentan como problemáticos, incluso dentro de la matemática misma (Zolkower y Bressan, 2012).

La teoría de la EMR ha demostrado su potencial para involucrar activamente al estudiantado en la construcción de significados matemáticos a través de su participación directa en tareas que demandan análisis, reflexión y toma de decisiones, de modo que el aprendizaje de la matemática no se reduzca a la mecanización de procesos algebraicos, sino que emerja de su propia actividad intelectual durante la resolución de problemas contextualizados. En la EMR el aprendizaje se entiende como un proceso discontinuo que involucra niveles crecientes de estructuración, abstracción, generalización y formalización (Figura 1).

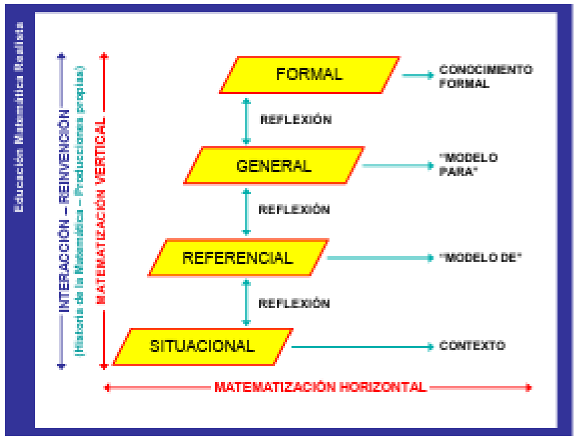


Figura 1. Niveles de Matematización (imagen obtenida de Zolkower y Bressan, 2012, p. 180)

De acuerdo con Treffers (1987), el primer paso de este proceso es la *matematización horizontal*, que se lleva a cabo en el primer nivel que se denomina *Nivel Situacional*. Este nivel consiste en interpretar una situación contextualizada, —"real" en el sentido de razonable e imaginable para el estudiante— mediante sus ideas intuitivas e informales, sus experiencias previas y su sentido común.

En busca de mayor rigurosidad conceptual y lingüística, el estudiantado inicia su *matematización vertical*. Durante este proceso, es esencial considerar las características propias de la matemática: la generalidad (buscar analogías, clasificar, estructurar), la certeza (reflexionar, justificar, demostrar), la exactitud (modelar, simbolizar, definir) y la brevedad (simbolizar y esquematizar) (Gravemeijer y Terwel, 2000, p. 781). Así, en el *Nivel Referencial*, los estudiantes proponen *modelos de* esquematización, notaciones, simbolización, expresiones lingüísticas o algebraicas, entre otras, fuertemente ligadas a la situación contextual dada, de ahí su nombre. Con la intensión que este "*modelo de* actividad matemática informal puede convertirse en un *modelo para* el razonamiento matemático más formal" (Gravemeijer, 2020, p. 2).

En el *Nivel General* se pretende la evolución hacia otros modelos de mayor generalidad (*modelos para*), es decir, que vayan más allá del fenómeno inicial y permitan generalizar relaciones, notaciones, estructuras y conceptos matemáticos hacia otros fenómenos similares, de ahí que se le conozca *como modelos* para- otros fenómenos equivalentes. Finalmente, en el *Nivel Formal*, se espera que mediante el trabajo del estudiantado se comprenda el rigor matemático, las definiciones y pruebas formales, así como las notaciones convencionales.

Lo descrito anteriormente se conoce en la EMR como el *principio de niveles*[1], al que se suman los *principios de realidad*, *de interacción*, de *reinvención*, *de interconexión*, el ya citado *de actividad*, que fundamentan las relaciones entre los partícipes de los procesos de enseñanza y aprendizaje, permitiendo no solo la adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos abstractos, sino también la comprensión de su aplicación en situaciones concretas y contextualizadas (Bressan et al., 2016).

El *principio de realidad* sostiene que el fenómeno, contexto o situación problema inicial debe ser realista para el estudiantado, es decir, que esté dentro de su alcance cognitivo para que pueda imaginarlo y razonar sobre él, dando lugar al surgimiento de los *modelos emergentes*, los cuales pueden ser informales e incluso erróneos. Lo esencial en esta teoría (Gravemeijer y Terwel, 2000), es que la realidad se toma como punto de partida y no como un campo de aplicación de lo ya enseñado.

Los *modelos* (“*emergentes*”, “*de*” y “*para*”) van evolucionando a partir de la *actividad* que realiza el propio estudiantado, la comparación, contrastación y discusión de sus producciones con las de sus compañeros mediante la *interacción* entre pares y la *guía* del docente, permiten *reinventar* los modelos en otros de nivel superior a partir de la actividad matemática desarrollada en el nivel anterior. La *interacción* lleva a la reflexión para alcanzar niveles de comprensión más elevados.

El *principio de interconexión* sostiene que la resolución de situaciones problema realistas a menudo exige establecer conexiones con un amplio rango de comprensiones y herramientas, tanto matemáticas como no matemáticas. Algunas de estas herramientas ya forman parte del conocimiento del estudiantado, mientras que otras surgen durante el proceso de matematización. Además, estos distintos *niveles de matematización* no son rígidos, un alumno puede moverse entre diferentes niveles de comprensión de acuerdo con los distintos aspectos de un mismo concepto (Bressan et al., 2016).

2.2 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre la derivada

De acuerdo con Gravemeijer (2004), la implementación de la Educación Matemática Realista (EMR) en el aula representa un desafío, ya que exige que el docente tome en cuenta los conocimientos previos del estudiantado y sea capaz de anticipar su razonamiento. En este sentido, resulta fundamental el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), que permita

[1] La teoría de niveles es un modelo didáctico de valor práctico que ayuda a planificar interpretando la experiencia y complejidad del aprendizaje matemático de los estudiantes (no es evolutivo como el de Piaget pues no está relacionado con la transformación de estructuras psicológicas, sino más bien ligado con el uso del lenguaje y otros medios de simbolización externos).

anticipar las actividades mentales que podrían desarrollar los estudiantes al enfrentarse con las tareas propuestas. Según Simon (1995), no solo se debe identificar el nivel inicial de razonamiento de los estudiantes, sino realizar un análisis histórico de la evolución del concepto y revisar los obstáculos que se presentan en su aprendizaje para diseñar actividades que permitan a los *modelos* ir evolucionando, de acuerdo con los objetivos de aprendizaje.

Para la construcción de la THA, de acuerdo con Simon (1995), se deben considerar, los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas (que incluyen varias actividades) que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. En este caso, los objetivos del diseño propuesto se establecen considerando el desarrollo histórico de derivada, donde la razón de cambio promedio deriva en razón de cambio instantánea, para posteriormente formalizarse mediante la definición de límite (Dolores, 1999; Azcárate et al.,1996; Sánchez et al., 2008; Vrancken et al., 2009; Vrancken y Engler, 2014; Tall, 2012 y Gonçalves y da Silva, 2013); esto organizado en los niveles de matematización de la EMR (Figura 2).

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Objetivo: Apropiarse del contexto identificando un problema de optimización en un fenómeno de variación.	Objetivo: Construcción de la razón de cambio instantánea a partir de la razón de cambio promedio.	Objetivo: Usar la razón de cambio instantánea para resolver cualquier problema de optimización.	Objetivo: Identificar a la función derivada en sus distintas representaciones.
Tareas del Nivel situacional	**Tareas del Nivel referencial**	**Tareas del Nivel general**	**Tareas del Nivel formal**
1. Interpretar el contexto presente en una situación problema de optimización. 2. Plantear ideas intuitivas e informales de la relación entre las magnitudes involucradas en la situación problema de optimización. 3. Reconocer en la situación problema planteada la necesidad de resolver un problema de optimización.	4. Vincular las representaciones algebraica, gráfica y tabular para describir un fenómeno de variación con valor óptimo. 5. Reconocer en la pendiente de la recta secante al valor de la razón de cambio promedio y utilizarla para interpretar la covariación de las magnitudes variables en distintos momentos. 6. Construir la razón de cambio instantánea al tomar valores de Δx cada vez más pequeños de la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 7. Reconocer en la pendiente de la recta tangente en el valor de la razón de cambio instantánea y utilizarla para interpretar la variación puntual en distintos momentos (***modelo de***).	8. Reconocer una situación de optimización en un fenómeno de cambio dado. 9. Identificar y usar a la razón de cambio instantánea como la herramienta matemática para solucionar cualquier situación problema de optimización (***modelo para***). 10. Reconocer, describir e interpretar cada uno de los elementos que intervienen en la expresión formal (límite) que define la derivada. 11. Significar el procedimiento de igualar a cero la razón de cambio instantánea para obtener un valor máximo o mínimo.	12. Interpretar verbalmente a la función derivada, indicando cómo ayuda a describir el comportamiento de cualquier situación problema con valor óptimo y distingue si ese óptimo es un mínimo o un máximo. 13. Verbalizar la diferencia entre $f'(a)$ de $f'(x)$. 14. Describe el criterio de la primera derivada. 15. Identifica la herramienta matemática para resolver problemas de optimización.

Figura 2. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Dado que el diseño de las tareas matemáticas para promover el aprendizaje y el establecimiento de las hipótesis acerca de este proceso de aprendizaje son interdependientes (Simon y Tzur, 2004), y estos a su vez responden a los objetivos planteados en cada nivel de matematización, se mencionan algunos aspectos considerados en el diseño:

- Se debe identificar un contexto de variación adecuado, que sea realista para el estudiantado y que permita promover la abstracción reflexiva, reconociendo la existencia de un valor óptimo cuya determinación resulta relevante. Para lograr este objetivo, se establecieron tres tareas en el *Nivel Situacional*, como interpretar el contexto de variación identificando dos magnitudes relacionadas que generan un valor óptimo. Para cada tarea se diseñaron varias actividades.
- A partir del conocimiento previo de pendiente de una recta y su expresión algebraica, se elaboran tareas, dentro del *Nivel Referencial*, que vinculan ese conocimiento con el concepto de razón de cambio promedio, tanto en su representación algebraica, como gráfica y tabular, todas relacionadas con las magnitudes covariantes del fenómeno de variación inicial. Para construir el concepto de razón de cambio instantánea a partir de la razón de cambio promedio, las tareas involucran el uso de tecnología para observar qué ocurre con la pendiente de la recta secante cuando los intervalos Δx se hacen cada vez más pequeños en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Para identificar la ventaja de utilizar la pendiente de la recta tangente sobre la recta secante, para describir cómo cambia el fenómeno de variación e identificar el óptimo, las tareas proponen vincular las representaciones gráfica, algebraica, tabular y verbal de la razón de cambio instantánea. De esta manera, se puede deducir la definición formal de límite y utilizar este concepto para obtener el valor óptimo en el fenómeno de variación inicial (*modelo de*).
- Para que el *modelo de* evolucione en *modelo para*, las tareas del N*ivel General* se enfocan a resolver otros fenómenos de variación con al menos un valor óptimo, utilizando la definición formal de límite del cociente incremental.
- En el *Nivel Formal*, se diseñaron actividades que permitieran construir una definición integral de la función derivada, con el propósito de interpretarla en sus distintas representaciones y reconocerla como una herramienta útil para la resolución de problemas de optimización. Por lo que, las actividades diseñadas incluyen la interpretación verbal de $f'(a)$ y $f'(x)$.

Así, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) construida para el aprendizaje de la derivada considera el análisis histórico del concepto, la revisión bibliográfica sobre los obstáculos y dificultades asociados a su aprendizaje, así como las expectativas respecto a los posibles *modelos* que pueden surgir en cada nivel de matematización. También contempla las estrategias para alcanzar los objetivos de aprendizaje, a través de las actividades diseñadas para cada tarea (algunas de las cuales integran el uso de tecnología), así como las formas de interacción del estudiantado y la guía del docente.

3. Diseño de la secuencia didáctica: La densidad mineral ósea y edad

La enseñanza del Cálculo suele enmarcar sus problemas en situaciones de mecánica y cinemática, ya que estos contextos se consideran apropiados para comprender los conceptos de variación y acumulación. Sin embargo, la invarianza de estos enfoques dentro de la física motivó la búsqueda de situaciones de variación en áreas distintas, como la biología y la salud, con la finalidad de atender al estudiantado universitario que cursa programas como la licenciatura en Nutrición, licenciatura e ingeniería en Química y la ingeniería Biomédica, entre otros.

Para asegurar el *principio de realidad*, se realizó una revisión documental en revistas de medicina como Endocrinology and Metabolism, New England Journal of Medicine, American Journal Of Preventative Medicine, Gaceta Médica de México, Revista Mexicana de Medicina Familiar, entre otras, utilizando como criterio de selección aquellos artículos que incluyeran datos o gráficos.

Como resultado de esta revisión, se identificó el fenómeno de variación que relaciona la densidad mineral ósea a lo largo de la vida como un contexto pertinente para estas áreas. Su discusión, además de ser clave para comprender el desarrollo óseo de las personas, requiere establecer conexiones con herramientas matemáticas como la covariación de magnitudes variables, la determinación de su razón de cambio, su representación gráfica, la relación entre el valor de la razón de cambio instantánea en un punto y el aumento o disminución en la densidad mineral ósea, entre otros, asegurando el *principio de interconexión*. Si bien algunos de estos conceptos forman parte del conocimiento previo del estudiantado, otros deben surgir durante el proceso de matematización.

El *principio de niveles*, propio del proceso de matematización, se refleja en el diseño de las tareas y en los objetivos establecidos conforme a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Figura 2). Por su parte, los *principios de interacción* y de *reinvención guiada* se consideran en la implementación.

3.1 *Nivel Situacional*

En las tablas 1 y 2 se presentan algunas de las preguntas incluidas en las actividades diseñadas para las tareas del *Nivel Situacional*, motivo por el cual hay saltos en la numeración. Estas preguntas fueron seleccionadas con el propósito de alcanzar el objetivo planteado en este nivel de acuerdo con la Trayectoria Hipotética propuesta. Los datos iniciales fueron retomados del artículo de Lee et al. (2013), quienes documentaron valores de la densidad mineral ósea de 17,205 coreanos entre los 10 y los 90 años. En el documento, los datos se presentan en intervalos de 10 años del cuello femoral, la cadera total y la columna lumbar, tanto en hombres como en mujeres.

Tabla 1

Actividad 1 diseñada para el Nivel Situacional

ACTIVIDAD 1

La densidad mineral ósea

La densidad ósea, también conocida como densidad mineral ósea (DMO), se refiere a la cantidad de tejido óseo presente en la estructura esquelética y se determina con la cantidad de minerales presentes, por lo general, calcio y fósforo (mg) que contiene cierto segmento de hueso (cm^2).

Según el sitio KidsHealth (https://kidshealth.org/), los huesos están compuestos por un armazón de colágeno y un mineral llamado fosfato cálcico, los cuales proporcionan resistencia y dureza. Desde el nacimiento hasta la edad adulta, el cuerpo acumula estos minerales fortaleciendo la densidad ósea, pero después de los 35 años, comienza la disminución de la densidad mineral ósea. La DMO desempeña un papel crucial en el control de la salud ósea del esqueleto, ya que se usa para diagnosticar osteoporosis (medida como puntuación T) y determinar si los tratamientos para aumentar el volumen del hueso funcionan o no.

La prueba de densidad mineral ósea conocida como DEX o DEXA (o como BMDT, por sus siglas en inglés) mide el contenido de calcio y otros minerales (como fósforo) en los huesos (miligramo por centímetro cuadrado: mg/cm^2).

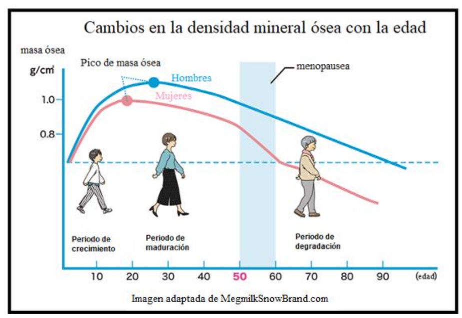


Imagen adaptada de MegmilkSnowBrand.com

Responde las siguientes preguntas:

P1. ¿Cómo evoluciona la densidad mineral ósea (DMO) a lo largo de la vida/edad de las personas?

P3. ¿Consideras que, la DMO y la edad están relacionadas de manera que el valor de una magnitud depende del valor de la otra?, ¿cuál sería la variable dependiente y cuál la independiente?

P4. ¿Consideras que, dado un valor normal de la DMO, se puede saber la edad aproximada de una persona? ¿Y viceversa? Explica.

Tabla 2

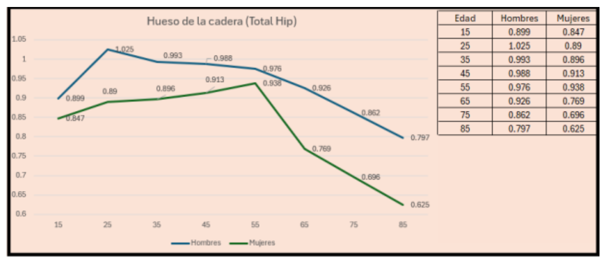
Actividad 2 diseñada para el Nivel Situacional

ACTIVIDAD 2

El siguiente gráfico comparativo se elaboró a partir de los datos del artículo de investigación de Lee y colaboradores (2013, p. 184). El gráfico muestra los valores de la cadera (Total hip) tanto de hombres como de mujeres.

P3. ¿En qué etapa de la vida disminuye más la densidad mineral ósea en las mujeres? ¿Y de los hombres? ¿A qué se debe esto? Justifica tu respuesta.

P4. ¿Habrá una edad donde la densidad mineral ósea tenga un valor máximo? Si es así, ese valor, ¿se puede ubicar en la gráfica? Justifica tu respuesta.



Edad	Hombres	Mujeres
15	0.899	0.847
25	1.025	0.89
35	0.993	0.896
45	0.988	0.913
55	0.976	0.938
65	0.926	0.769
75	0.862	0.696
85	0.797	0.625

3.2 *Nivel Referencial*

Las tablas 3 y 4 muestran algunas preguntas de las actividades diseñadas para las tareas del *Nivel Referencial*.

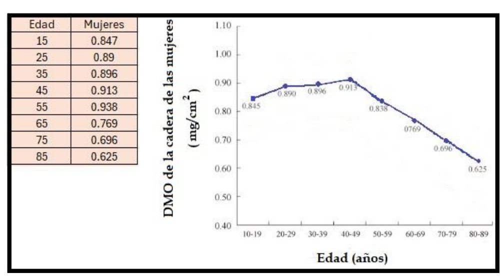
Tabla 3

Actividades 3 y 4 diseñadas para el Nivel Referencial

ACTIVIDAD 3

Utilizando los datos del artículo de investigación de Lee y colaboradores (2013, p. 184), se eligieron los datos de la densidad mineral ósea de la cadera (Total hip) del grupo de mujeres. La elección de la cadera se debe a que es un hueso que se fractura con mayor frecuencia en edades mayores.

P2. Calcula, con base en los datos de la tabla, cuánto cambia la DMO si la edad cambia de 15 a 25 años.



Edad	Mujeres
15	0.847
25	0.89
35	0.896
45	0.913
55	0.938
65	0.769
75	0.696
85	0.625

P3. En promedio por año, ¿cuánto cambia la DMO entre los 15 y 25 años?

P4. Ubica los valores anteriores en la gráfica y traza una línea que una esos puntos, describe su pendiente en cada intervalo.

P5. Calcula la pendiente de la recta secante que une los dos puntos (15, 0.847) y (25, 0.890). ¿Encuentras una relación entre este valor y la razón de cambio promedio? Describe.

P6. Para analizar el comportamiento de la gráfica que describe cómo cambia la DMO conforme avanza la edad, completa la siguiente tabla.

Intervalo de edad	RPC	Comportamiento de la gráfica	¿Qué pasa con la DMO en ese intervalo de edad?
[15, 25)			
[25,35)			
[35,45)			
[45,55)			
[55,65)			
[65,75)			
[75,85]			

ACTIVIDAD 4

Dada la siguiente tabla de la DMO de la cadera de las mujeres y la edad.

P1. Utiliza la hoja de cálculo de Google Drive para generar la función que mejor aproxime los puntos y por lo tanto puede modelar este fenómeno. Obtén su expresión algebraica

Edad	DMO cadera hombres
15	0.899
25	1.025
35	0.993
45	0.988
55	0.976
65	0.926
75	0.862
85	0.797

Entre los recursos tecnológicos que apoyan el desarrollo de este nivel se encuentra la hoja de cálculo, con la cual se espera que el estudiantado obtenga la expresión algebraica que modela la relación entre la densidad mineral ósea y la edad, así como su gráfica. De esta manera, la tecnología se utiliza para facilitar la realización de cálculos, pero, sobre todo, para establecer relaciones entre los registros tabular, algebraico y gráfico (Jácome et al., 2022).

Tabla 4

Actividades 3 y 4 diseñadas para el Nivel Referencial

ACTIVIDAD 5

P1. Utilizando la siguiente tabla, que relaciona la edad y la densidad mineral ósea (DMO) en intervalos de un año, obtén la razón de cambio promedio (RPC) para puntos consecutivos, observa

Edad	DMO	RCP
1	0.7727	
2	0.7800	
3	0.7871	
4	0.7940	

que la DMO se obtuvo con la expresión algebraica obtenida en la actividad anterior.

P6. Argumenta, utilizando rectas secantes, la siguiente afirmación:

La razón de cambio promedio (RPC) puede describir el comportamiento de una función, por ejemplo, aquella que es siempre creciente o aquella que crece cada vez menos o una que sea constante, es decir que no crece ni decrece, o una función que decrece cada vez más.

5	0.8007	
6	0.8072	
7	0.8135	
8	0.8196	
9	0.8255	
10	0.8312	
11	0.8367	
12	0.8420	
13	0.8471	
14	0.8520	
…	…	
88	0.6596	
89	0.6495	
90	0.6392	

ACTIVIDAD 6

P1. Manipula el Applet de GeoGebra moviendo los puntos sobre la curva, usando el deslizador. Observa qué pasa con la pendiente de la recta secante (o razón de cambio promedio) cuando los puntos se aproximan entre sí, es decir, cuando el intervalo de las edades ($\Delta edad = \Delta x$) se hace cada vez más pequeño ($\Delta x \to 0$).

P2. Utiliza el siguiente 'simulador' para observar a que valor se aproxima la razón de cambio promedio cuando elegimos dos edades muy próximas ($\Delta edad \to 0 \ = \Delta x \to 0$) para distintos pares de puntos de la curva que mejor aproxima el fenómeno.

P3. Argumenta la siguiente afirmación:

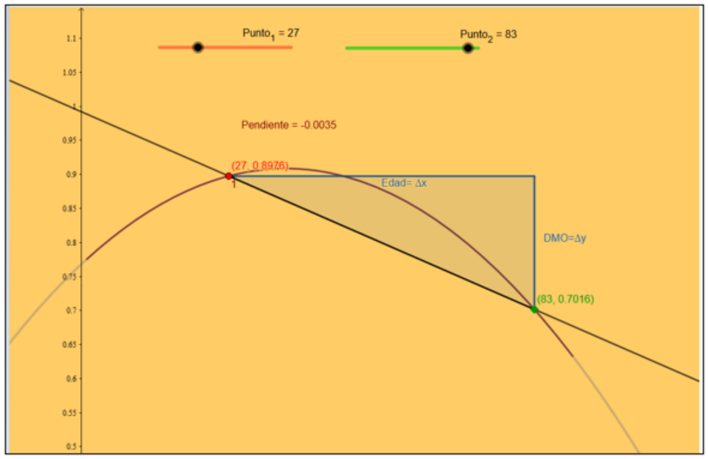
Cuando los extremos del intervalo en la edad sean iguales, es decir, en el límite cuando

Δx →0, la recta secante se convierte en recta tangente y la razón de cambio promedio para dos puntos consecutivos deriva en razón de cambio instantánea para un solo punto.

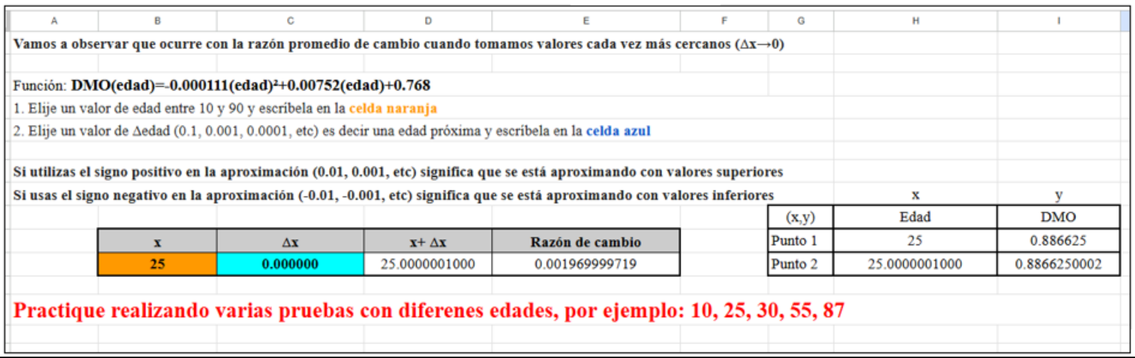
P4. Manipula el Applet de GeoGebra para que observes el valor de la pendiente de la recta tangente sobre el gráfico. Verifica que los resultados obtenidos en el punto anterior (P2) coinciden con los que se muestran en el Applet de GeoGebra. ¿Cuánto vale la pendiente de la recta tangente en el valor máximo? ¿Ocurrirá lo mismo en el valor mínimo?

En la actividad 6 se puede apreciar el uso de un Applet diseñado en GeoGebra (Figura 3a), mediante el cual se busca propiciar entre el estudiantado un acercamiento al concepto de límite de manera intuitiva. Este acercamiento también se realiza de forma numérica mediante un simulador diseñado en una hoja de cálculo (Figura 3b) que permite observar el valor de la función en un punto, $f(a)$, y el valor de la derivada en ese mismo punto, $f'(a)$, con el propósito de que el alumno aprecie su diferencia. Al manipular el simulador, debe responder preguntas (P2) como: ¿Cuánto vale la densidad mineral ósea a los 19 años? ¿Y cuánto vale la razón de cambio instantánea a los 19 años? Además, debe observar el valor al que converge la razón de cambio promedio en el límite cuando $\Delta x \to 0$, tanto por la derecha (con valores mayores) como por la izquierda (con valores menores) del punto a, seleccionado dentro del dominio de la función.

a) Applet de GeoGebra



b) Simulador elaborado en la Hoja de Cálculo



Vamos a observar que ocurre con la razón promedio de cambio cuando tomamos valores cada vez más cercanos (Δx→0)

Función: **DMO(edad)=-0.000111(edad)²+0.00752(edad)+0.768**

1. Elije un valor de edad entre 10 y 90 y escríbela en la **celda naranja**
2. Elije un valor de Δedad (0.1, 0.001, 0.0001, etc) es decir una edad próxima y escríbela en la **celda azul**

Si utilizas el signo positivo en la aproximación (0.01, 0.001, etc) significa que se está aproximando con valores superiores

Si usas el signo negativo en la aproximación (-0.01, -0.001, etc) significa que se está aproximando con valores inferiores

x	Δx	x+ Δx	Razón de cambio
25	0.000000	25.0000001000	0.001969999719

	x	y
(x,y)	Edad	DMO
Punto 1	25	0.886625
Punto 2	25.0000001000	0.8866250002

Practique realizando varias pruebas con diferenes edades, por ejemplo: 10, 25, 30, 55, 87

Figura 3. Applet de GeoGebra y Simulador

3.3 *Nivel General*

En la Tabla 5 se muestran algunas de las actividades diseñadas para las tareas del *Nivel General*.

Tabla 5

Actividad 7 diseñada para el Nivel General

ACTIVIDAD 7
Situación 2 La siguiente función indica la posición de una partícula que recorre cierta distancia $f(t)$ durante 4 minutos. Considera que t se mide en minutos y $f(t)$ en metros. $$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$ P1. Calcula $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ para esta función, detallando cada uno de los pasos realizados. P2. Obtén el tiempo t donde se alcanza el valor óptimo. P3. Determina si es un valor mínimo o un valor máximo.

Situación 3

Suponga que la variación en la concentración (medida en miligramos por litro) de anestesia en el torrente sanguíneo de un paciente en operación, conforme pasa el tiempo (horas), viene dada por la función:

$$C(t) = 0.03t^2 - 0.5t + 1000$$

P3. Interpreta la razón de cambio instantánea en el contexto planteado en este fenómeno y también interpreta el valor óptimo en este contexto.

P5. Calcula $f´(6)$ e interpreta este valor en el contexto planteado.

P6. Describe la diferencia entre $f'(6)$ y $f(6)$. Describiendo que mide cada uno de estos valores en el contexto de la situación planteada.

Situación 4

Supongamos que tenemos la siguiente función cúbica: $f(x) = 13x^3 - 4x^2 + 12x + 1$

P1. ¿Qué elementos te indican que esta expresión matemática puede modelar un fenómeno de variación?

P3. Encuentra los valores óptimos de la función $f(x)$ y argumenta por qué uno es máximo y el otro mínimo, usando valores de la razón de cambio instantánea $f´(x)$.

P4. Investiga los criterios de la primera y segunda derivada e interprétalos con tus palabras.

3.4 *Nivel Formal*

En la tabla 6 se muestran algunas de las actividades diseñadas para las tareas del *Nivel Formal*.

Tabla 6

Actividad 8 diseñada para el Nivel Formal

ACTIVIDAD 8

P1. Describe a detalle los elementos que intervienen en la siguiente expresión, indicando cuales corresponden a la razón de cambio promedio y cuales a la razón de cambio instantánea:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

P2. Describe el procedimiento para encontrar un valor óptimo usando la definición formal de límite.

P3. Describe cómo la pendiente de la recta tangente ayuda a describir la forma gráfica de un fenómeno de optimización y distinguir un valor máximo de uno mínimo. Utiliza el siguiente Applet de GeoGebra para guiarte en tu respuesta.

P4. Verbaliza la diferencia entre $f(a)$ y $f´(a)$.

P5. Verbaliza la diferencia entre $f´(a)$ y $f´(x)$.

P6. Explica que es la derivada y para qué sirve.

P7. Explica por qué la función derivada es una herramienta matemática que permite resolver problemas de optimización.

El Applet de GeoGebra utilizado en este nivel tiene la intención de proporcionar argumentos para distinguir entre un valor máximo y un valor mínimo mediante el cambio de valores de la pendiente de la recta tangente (precisando el criterio de la primera derivada), así como para identificar el procedimiento de igual a cero la derivada para obtener los valores óptimos.

A manera de síntesis, los principios de *realidad*, *interconexión* y *niveles* fundamentan fuertemente el diseño de las actividades de la secuencia didáctica. Mientras que la participación de los *principios de actividad*, *interacción* y *reinvención guiada* se detallan en el apartado de implementación de la secuencia, ya que permiten establecer dinámicas para la realización de las actividades, la interacción entre los pares y la guía individual o grupal por parte de la docente.

4. Implementación

La implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo con un grupo de 32 estudiantes de nivel universitario, quienes trabajaron durante cinco días, una hora diaria, en el salón de clases. Se organizaron en seis equipos: cuatro de cinco integrantes y dos de seis. Las actividades que involucraban el uso de applets de GeoGebra y hojas de cálculo diseñadas en Google Calc fueron resueltas de manera individual mediante el teléfono celular, tableta o computadora portátil de cada participante, y discutidas posteriormente en sus respectivos equipos. Para las discusiones plenarias, se utilizaron el ordenador y el proyector del aula. La recolección de información se realizó a través de hojas de trabajo impresas, entregadas en clase; en caso de no finalizar la actividad durante la sesión, los equipos podían subir su resolución a un grupo en la plataforma Microsoft Teams.

Durante la implementación se retoman los principios de *actividad* e *interacción*, durante el trabajo en equipo resolviendo las actividades y discutiendo sus respuestas. Asimismo, considerando el principio de *reinvención guiada*, la docente recorrió todos los equipos y, mediante preguntas focalizadas, ayudó a resolver controversias internas y orientó al estudiantado a observar detalles que les permitieran contrastar argumentos y alcanzar acuerdos consensuados.

Para el análisis de la implementación, las respuestas de cada equipo se contrastan con las respuestas esperadas (hipotéticas) mediante tablas correspondientes a cada nivel de matematización. A modo de ejemplo, la Tabla 7 recopila las respuestas de los seis equipos en una actividad del nivel situacional, con el fin de realizar un análisis posterior.

Tabla 7

Ejemplo de formato para la recolección de datos

Nivel Situacional. Actividad 1.
Tarea 2: Plantear ideas intuitivas e informales de la relación entre las magnitudes involucradas en la situación problema de optimización.

Pregunta 3. ¿Consideras que la edad y la DMO están relacionadas de manera que el valor de una magnitud depende del valor de la otra? ¿Cuál sería la magnitud dependiente y cual la independiente? Justifica		
Equipo	Respuesta Real	Respuesta hipotética
1	Sí, puedes tener 15 años y tener densidad ósea, pero si cambia la edad la densidad ósea también se modifica. La independiente es la edad y la dependiente es la DMO.	El estudiantado identifica que la densidad mineral ósea (DMO) está relacionada con la edad, ya que en los primeros años va a aumentar y luego comenzará a disminuir en la vejez, por lo que, la DMO es la variable dependiente y la edad la variable independiente.
2	Sí, porque conforme la edad avanza se van acumulando los minerales que afectan la densidad que tienen los huesos. La variable dependiente es la DMO y la independiente es la edad.	
3	Si consideramos que el valor de la DMO depende del tiempo del crecimiento de la persona, siendo así que el valor de la DMO es el valor dependiente y la edad de la persona el valor independiente, la respuesta se justifica ya que, con la edad de la persona, la densidad mineral ósea aumenta o disminuye.	
4	Si están relacionadas, son inherentes una de la otra haciendo que la edad sea independiente y la DMO dependiente.	
5	Si están relacionadas, la dependiente es la masa ósea y la independiente es la edad, porque la masa ósea aumenta o disminuye conforme a la edad.	
6	La edad es el valor independiente y la DMO es el valor dependiente, de manera que, al aumentar la edad, aumenta o se reduce la DMO.	

Para cada tarea se construyó una tabla, con todas las actividades que atienden el objetivo, de manera que se realizaron 15 tablas en total.

5. Resultados

La discusión de los trabajos realizados por los equipos, para mostrar un panorama general de la construcción del concepto de derivada a través de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, acorde con *los niveles* de la EMR se acotará a los Niveles *Situacional y Referencial*, que están fuertemente ligados al contexto de la densidad mineral ósea. Específicamente, en el *Nivel Situacional* se presentan aspectos relacionados con la identificación de un problema de optimización y en el *Nivel Referencial*, sobre la obtención de la razón de cambio instantánea a partir de la razón de cambio promedio, y la determinación, mediante la definición formal, de la edad en la que se alcanza el pico de masa ósea en la cadera de las mujeres.

En la Figura 4 se presenta un acercamiento a la idea de problema de optimización. A través de la pregunta ¿Cómo evoluciona la densidad mineral ósea (DMO) a lo largo de la vida/edad de las personas?, se busca que el estudiantado construya modelos sobre el comportamiento de la DMO, reconociendo que la variación creciente-decreciente en el tiempo implica la existencia de un valor "máximo". La hipótesis planteada en este objetivo es que el estudiantado no tendrá dificultades para identificar dicha variación si cuenta con apoyo visual, especialmente mediante la gráfica; por ello, las intervenciones del docente deben centrarse en la interpretación de la información escrita y de la representación gráfica.

En este contexto, la respuesta del equipo 5 muestra un avance hacia el objetivo, ya que identifican la edad en la que se alcanza el "pico de masa ósea" (el valor óptimo). Además, señalan que la disminución de la DMO en las mujeres es muy notable a cierta edad, a diferencia de lo que ocurre en los hombres. A partir de la discusión plenaria, el equipo añade mayor precisión a su análisis al puntualizar: "en las mujeres hay una disminución muy notable entre los 50 y los 60 años, y en los hombres es constante la disminución"; un aspecto relevante para la construcción de significados, en consonancia con el *principio de reinvención guiada*.

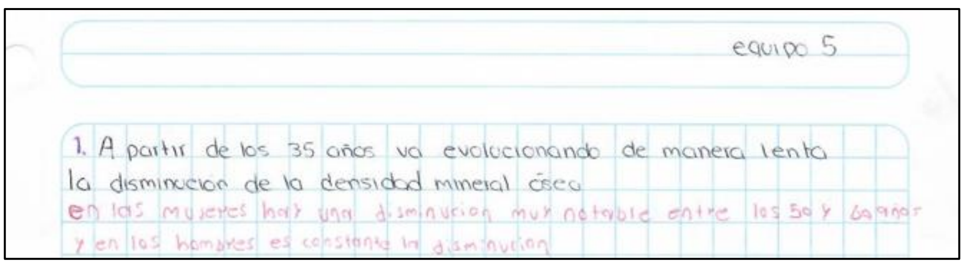


Figura 4. Respuestas de la actividad 1 (equipo 5)

En el *Nivel Referencial*, la discusión se orienta hacia la obtención de la razón de cambio instantánea a partir de la razón de cambio promedio. Esta tarea se compone de varias actividades. En primer lugar, a partir del procedimiento para obtener la pendiente de la recta secante dados dos puntos —conocimiento que forma parte del saber previo—, el estudiantado debe relacionar el valor de dicha pendiente con la razón de cambio promedio y su interpretación gráfica. En la discusión de la actividad 3, se infiere, a partir de las respuestas proporcionadas por los equipos, que lograron vincular la representación gráfica con el valor de la pendiente (positiva = función creciente) y, a su vez, establecer la correspondencia entre la razón de cambio promedio y el valor de la pendiente de la recta secante, ya que ambos coinciden.

> Equipo 1: “¡La línea es positiva porque crecer! – “¡Da el mismo valor!”;
>
> Equipo 2: “¡Es una recta creciente!” – “¡Es el mismo resultado!”;
>
> Equipo 3: “¡La inclinación es la de una línea positiva, lo que significa que los valores aumentan!” – “¡La relación entre la razón de cambio promedio y la pendiente es que sus valores son iguales!”;
>
> Equipo 4: “¡Tiene una inclinación ascendente hacia los 25 años, donde se aprecia el aumento de la DMO!” – “¡Nos da el mismo resultado debido a que la resolución para obtener el resultado es demasiado similar!”;
>
> Equipo 5: “¡La inclinación en ese intervalo de tiempo es creciente!” – “¡La pendiente es igual a la razón de cambio!”;
>
> Equipo 6: “¡La inclinación es positiva (creciente), lo que indica que la DMO aumenta! La pendiente de esta línea secante representa el incremento promedio de la DMO en este intervalo por año.” – “¡La pendiente de la recta secante es igual a la Razón de cambio promedio que obtuvimos antes, ya que la razón de cambio promedio representa la pendiente de la línea que conecta esos dos puntos en el gráfico!”.

Posteriormente, se relaciona el valor de la pendiente de la recta secante sobre toda la curva para que se pueda relacionar este valor, con la variación de la DMO (Figura 5) a lo largo de la vida. Ningún equipo tuvo dificultad para realizar esta tarea, las respuestas proporcionadas por los equipos se corresponden a las respuestas esperadas en la THA.

Intervalo de edad	Razón promedio de cambio	Comportamiento de la gráfica (creciente/decreciente)	Cambio en la DMO (aumenta/disminuye)
(15, 25]	0.0043	Creciente	Aumenta
(25,35]	0.0006	Creciente	Aumenta
(35,45]	0.0017	Creciente	Aumenta
(45,55]	0.0025	Creciente	Aumenta
(55,65]	-0.0169	Decreciente	Disminuye
(65,75]	-0.0013	Decreciente	Disminuye
(75,85]	-0.0071	Decreciente	Disminuye

Figura 5. Respuestas de la actividad 3 del Equipo 5

Una vez que se identifica que la pendiente de la recta secante es útil para describir el comportamiento de la DMO a lo largo de la vida y que, al aumentar y luego disminuir se genera un valor máximo, se puede abordar, la comprensión intuitiva que deriva la razón de cambio promedio en razón de cambio instantánea, al hacer intervalos Δx cada vez más pequeños (*modelo de*). En los comentarios proporcionados en el punto 3 de la actividad 6, donde a manera de ejemplo, se muestran las respuestas de dos equipos, se puede apreciar este acercamiento intuitivo al concepto de límite:

Equipo 5: ¡Lo que sucede es que la recta secante (que conecta dos puntos) se convierte en recta tangente (que toca a la curva en un solo punto)!

Equipo 6: ¡Los dos puntos se acercan tanto que se fusionan en un solo punto en el límite!

Estos resultados coinciden con lo previsto en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y, a su vez, con los hallazgos de Azcárate et al. (1996) y Ortega y Sierra (1998), quienes señalan que es posible introducir la noción intuitiva de límite como una aproximación progresiva mediante razones de cambio cada vez más pequeñas. De este modo, la expresión algebraica del límite del cociente incremental se presenta de forma más natural y puede emplearse para determinar la edad en la que se alcanza el pico de masa ósea (Figura 6).

Equipo 2:

- El máximo trata de acercarse a cero o negativos, y el mínimo de los negativos a ceros o positivos.
- DMO(x)=−0.0001x2+0.0076x+0.7652
  DMO'(x)=−0.0002x+0.0076
  −0.0002x+0.0076=0
  x=0.0076/0.0002=38 años
- Los 25 años

Equipo 5:

⑥ En punto de Maximo, la pendiente de la recta tangente es cero, indicando que en este punto la DMO Alcanza su valor mas alto. En punto de minimo, también es cero, para indicar el valor más bajo

⑧ a) 38 años

b) 1: Derivar la función multiplicando por el exponente
2: Sustituimos en la función derivada la "x" cada edad
3: Identificamos cual el era la edad optima

Figura 6. Ejemplo de las respuestas de la actividad 6 de dos equipos

Los siguientes comentarios verbales realizados en los equipos evidencian razonamientos que reflejan cierta comprensión de la derivada como herramienta útil para describir el comportamiento de una función, su representación gráfica y para determinar valores óptimos:

Estudiante 1: ¡Ah! Ya entendí porque se iguala a cero la derivada para obtener un máximo o mínimo.

Estudiante 2: Cuando la razón de cambio instantánea crece cada vez menos, significa que se acerca a un valor máximo.

Estudiante 3: ¡En una función decreciente la pendiente de la tangente es negativa!

Los enunciados muestran cierta comprensión que relaciona el valor de la pendiente de la recta tangente con la forma de la curva, por ejemplo la expresión "crece cada vez menos, significa que se acerca a un valor máximo", proporciona elementos que indican una comprensión entre el cambio en el valor de la pendiente de la recta tangente (criterio de la primera derivada), pasando de valores positivos a cero y luego a negativos, para indica la presencia de un valor óptimo máximo. Este tipo de razonamiento concuerda con lo esperado en la THA, y con lo señalado por Tall (2012), quien afirma que la dificultad de comprender la definición formal de límite, propia del análisis matemático, puede atenuarse al relacionar las representaciones numérica, gráficas y algebraicas.

6. Conclusiones

La demanda actual hacia los docentes de nivel universitario para que implementen metodologías de enseñanza que vinculen los conceptos matemáticos con situaciones de la vida real responde a una tendencia pedagógica cada vez más consolidada (Silva y Maturana, 2017 y Morales y Rodríguez, 2022). Como señala Alsina (2023), se ha avanzado paulatinamente hacia un enfoque cuyo propósito es que el alumnado adquiera conocimientos y habilidades matemáticas que le permitan desenvolverse mejor en su vida cotidiana y profesional. Esta orientación exige propuestas didácticas que partan de contextos realistas y que fomenten aprendizajes significativos y duraderos (Jácome et al., 2022).

En este marco, la secuencia didáctica diseñada para el aprendizaje de la función derivada, centrada en el estudio de la densidad mineral ósea (DMO), se fundamenta en los principios de la Educación Matemática Realista y se estructura a través de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). Los resultados obtenidos son alentadores, ya que reflejan avances en los distintos niveles de matematización. En el *Nivel Situacional*, el fenómeno de variación de la DMO a lo largo de la vida permitió al estudiantado apropiarse del contexto e identificar la variación creciente – decreciente, característica previa a la presencia de un valor óptimo máximo.

En el *Nivel Referencial*, se establecieron conexiones entre las magnitudes del contexto y las representaciones matemáticas (gráficas, numéricas y verbales), lo cual facilitó el tránsito de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, lo que favoreció una concepción más operativa e intuitiva de la derivada, superando visiones puramente formales y abstractas. Durante la interacción entre pares y la reinvención guiada por la docente se modificaron los *modelos* conceptuales del estudiantado, mostrado en sus correcciones escritas y sus expresiones verbales una comprensión más articulada de las distintas representaciones del concepto de derivada, lo que contribuyó, en cierta medida, a mejorar algunos de los errores reportados en investigaciones revisadas (Baker et al., 2000; Badillo, 2003; Dávila, 2010; Tall, 2012; Gonçalves y Da Silva, 2013).

El uso de tecnología resultó fundamental para facilitar el tránsito desde una noción intuitiva de límite hasta la comprensión de la definición formal de derivada. Esto concuerda con lo señalado por Sfard (1992), Azcárate et al. (1996), Dolores (1999) y Tall (2012), y permitió que el concepto formal se construyera de manera progresiva y significativa, tal como lo señala Pineda (2013).

Si bien los resultados son prometedores, se requiere la replicación de esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para dar mayor solidez a las conclusiones obtenidas. En este sentido, se están explorando nuevos contextos situacionales vinculados a las ingenierías en Ciencias Ambientales, Energías Renovables y Sustentabilidad, con el objetivo de realizar ajustes pertinentes tanto en el fenómeno inicial de variación como en las actividades de los *Niveles Situacional* y *Referencial*.

Finalmente, se espera que el diseño de esta secuencia facilite su implementación, apoyando los esfuerzos por crear experiencias significativas que promuevan una matemática más práctica, funcional y conectada con la realidad.

7. Referencias

Alsina, A. (2023). Conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas: orientaciones para implementar situaciones de aprendizaje. Educación Matemática en la Infancia, 12(2), 65 –108. https://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/24150/037667.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias 27*(1), 121-136. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

Azcárate, C., Casadelvall, M., Casellas, E. y Bosch, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia* [Tesis doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona]. TDX: Tesis doctorales en Xarxa. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4702/erbj1de4.pdf

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578. https://doi.org/10.2307/749887

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa, 9*(46), 15-25. http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Daher, M., Rosati, A., Hernández, A., Vásquez, N. y Tomicic, A. (2022). TIC y metodologías activas para promover la educación universitaria integral. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 24*(e08), 1-18. https://doi.org/10.24320/redie.2022.24.e08.3960

Dávila, M. T. (2010). *La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización en ambientes creados con Geogebra* [Tesis de maestría, Universidad de Sonora]. Repositorio Institucional Unison. https://www.repositorioinstitucional.uson.mx/handle/20.500.12984/7765?locale=es

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Gonçalves, D. y Da Silva, F. (2013). Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 27*(46), 417-432. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300006

González, I. y Granillo, R. (2020). Competencias del ingeniero industrial en la Industria 4.0. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 22*(e30), 1-14. https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e30.2750

Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3

Gravemeijer, K. (2020). Emergent Modeling: an RME Design Heuristic Elaborated in a Series of Examples. *Educational Designer, 4*(13), 1-31. http://www.educationaldesigner.org/ed/volume4/issue13/article50/

Jácome, I., Fiallo, J. y Parada, S. (2022). Un acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo a través de la Matemática Realista. *Educación Matemática, 34*(1). https://doi.org/10.24844/EM3401.10

Jiménez, J., Grijalva, A., Milner, F., Dávila, M. y Romero, C. (2022). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*. Editorial de la Universidad de Sonora.

Lee, J., Lee, S., Jang, S. y Ryu, OH. (2013). Age-Related Changes in the Prevalence of Osteoporosis according to Gender and Skeletal Site: The Korea National Health and Nutrition Examination Survey 2008-2010. *Endocrinology and Metabolism, 28*(3), 180-191. https://doi.org/10.3803/EnM.2013.28.3.180

Morales, R. y Rodríguez, P. (2022). Retos en la Educación Superior: una mirada desde la percepción de los docentes. *Education in the Knowledge Society*, *23*, 15-23. https://revistas.usal.es/tres/index.php/eks/issue/view/1390/153

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, *12*(2), 87-115. http://hdl.handle.net/10201/131890

Pineda, C. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria*. [Tesis Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/75064

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 267-296. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005&lng=es&tlng=es.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25*, 59-84. https://www.researchgate.net/publication/242490242_Operational_origins_of_mathematical_objects_and_the_quandary_of_reification-The_case_of_function

Silva, J. y Maturana, D. (2017). Una propuesta de modelo para introducir metodologías activas en educación superior. *Innovación Educativa, 17*(73), 117-131. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-26732017000100117&script=sci_abstract

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104. https://eric.ed.gov/?id=EJ683059

Sulasmi, S. Sampoerno, P. y Noornia, A. (2020). Development of learning using Indonesian realistic mathematics education approach to build students' relational understanding of derivative. *Journal of Physics, 147*0(1), 012060. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012060

Tall, D. (2012). A Sensible approach to the Calculus. *El Cálculo y su enseñanza, 3*(1), 81–128. https://doi.org/10.61174/recacym.v3i1.139

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction— The Wiskobas Project*. D. Reidel Publishing Company. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 713-717. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa, 10*(38), 36-46. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1164898/Vrancken2009Una.pdf

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 449-468. http://dx.doi 10.1590/1980-4415v28n48a22

Zolkower, B. y Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (Pochulu, M. y Rodríguez, M. eds.). Argentina: UNGS–EDUVIM, 175–200. https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/pdfs_ediciones/Educaci%C3%B3n_Matem%C3%A1tica:_Volumen_1-completo.pdf#page=175

Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime, 10*(1), 145-175. https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a7.pdf