Una alternativa para trabajar el pensamiento matemático a través de la modelación en el nivel medio superior

An alternative for working on mathematical thinking through modeling at the high school level.

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107

(electrónico)

Mónica del Rocío Torres Ibarra

mtorres@uaz.edu.mx

Johan David Gallego Guzmán

jdgallegosg@uaz.edu.mx

Nancy Janeth Calvillo Guevara

ncalvill@uaz.edu.mx

Universidad Autónoma de Zacatecas

México

Recibido: 21 de noviembre de 2024

Aceptado: 20 de diciembre de 2024

Autor de Correspondencia:

Mónica del Rocío Torres Ibarra

Resumen: El presente trabajo, tiene como objetivo presentar una propuesta para promover la transversalidad entre los pilares del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en el marco de la Nueva Escuela Mexicana para el nivel medio superior. Se utiliza como base la resolución de un problema de población basado en la Serie de Fibonacci, con la intención de interactuar entre temas como funciones, series, variación, graficación y modelación. La propuesta se validó con cinco estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Los resultados revelaron que ante el planteamiento de una situación problema, presentada con el apoyo de un simulador virtual, los estudiantes son capaces de involucrar algunas nociones del pensamiento matemático de manera transversal y modelar el problema para llegar a una solución.

Palabras clave: pensamiento matemático, modelación matemática, Serie de Fibonacci, transversalidad, resolución de problemas

Abstract: The purpose of this paper is to present a proposal to promote transversality between the pillars of mathematical thinking through mathematical modeling within the framework of the New Mexican School for the upper secondary level. The solution to a population problem based on the Fibonacci Series is used as a basis, with the intention of interacting between topics such as functions, series, variation, graphing and modeling. The proposal was validated with five students of the bachelor's degree in mathematics at the Autonomous University of Zacatecas. The results revealed that when faced with a problem situation, presented with the support of a virtual simulator, students can involve some notions of mathematical thinking in a transversal way and model the problem to reach a solution.

Keywords: mathematical thinking, mathematical modeling, Fibonacci series, transversality, problem solving

CC BY NC

1. Introducción

La educación en México enfrenta un momento crucial con la implementación de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), un proyecto que busca transformar el paradigma educativo del país. En este contexto, uno de los desafíos en el área de las matemáticas radica en la promoción y aplicación efectiva de la transversalidad del pensamiento, en la cual se busca una conexión entre los aprendizajes que el estudiantado va adquiriendo en varias áreas de conocimiento y su contexto.

Incorporar la modelación matemática al currículo del profesor se considera indispensable para el desarrollo de competencias como el establecimiento de ambientes y el planteamiento de situaciones de modelación (Niss et al. 2007), mientras que la NEM lo propone como una habilidad a desarrollar en los estudiantes, la capacidad de emplear el pensamiento matemático más allá de la solución de operaciones complejas y descontextualizadas (SEP, 2024).

Por su parte, Mancera et al. (2022) mencionan la importancia de cambiar los ambientes de enseñanza tradicional a una estructura sociocrítica, en la que los estudiantes tengan oportunidad de reflexionar y discutir sobre los modelos matemáticos que dan soporte a los fenómenos sociales. En este proceso, la enseñanza de la matemática convierte sus métodos tradicionales, en los que se pasa de dar la teoría y proponer ejercicios, a una estructura en la que la matemática es una herramienta, el profesor un mediador y el estudiante un constructor del conocimiento, favoreciendo con ello la comprensión de los conceptos matemáticos.

La modelación matemática es considerada como herramienta y estrategia pedagógica, al poder crear esos vínculos que demuestran la aplicabilidad de la matemática en otras áreas.

> La poderosa relación entre la matemática y la 'realidad' es el fundamento de la enseñanza matemática a nivel escolar; en particular, la matemática (álgebra, geometría, estadística) es el lenguaje de las ciencias y nos ayuda a abordar y entender problemas que enfrentamos como ciudadanos. (Borromeo Ferri et al., 2021, p. 17)

En este sentido, se pretende integrar elementos de la biología con conceptos matemáticos, a través de la modelación de una situación problema sobre el crecimiento de una población de conejos utilizando como herramienta la Serie de Fibonacci, en la que se espera que los estudiantes utilicen o evidencien algunos elementos que componen al pensamiento matemático, es decir, promover la transversalidad entre el pensamiento variacional, algebraico, espacial, numérico y aleatorio.

2. Elementos Teóricos

Consideramos al pensamiento matemático, según la Propuesta del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) como:

> "… un recurso sociocognitivo que involucra diversas actividades desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta los procesos mentales abstractos que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático, pretende resolver problemas, usar o crear modelos, y le dan la posibilidad de elaborar tanto conjeturas como argumentos; organizar, sustentar y comunicar sus ideas" (SEP, 2024, p. 16).

Este pensamiento matemático se integra a su vez por 5 pilares o pensamientos (MEN, 1998; Shiguay et al., 2022), los cuales son: Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio y Variacional (ver *Figura 1*). Sin embargo, su integración transversal en el currículo educativo se ve obstaculizada por múltiples factores, entre los que se destacan las metodologías pedagógicas tradicionales (Valero et al. 2020), la falta de recursos y de motivación entre los estudiantes (Miranda y Martínez, 2022), hasta la desconexión entre los contenidos curriculares y las demandas del mundo real (Suárez, 2013). Siendo esto el fomento a la capacidad de integrar conocimientos, habilidades y actitudes en la resolución de problemas de diversas disciplinas que implica no solo dominar conceptos y técnicas matemáticas, sino también aplicarlas de manera creativa y crítica en contextos interdisciplinarios.

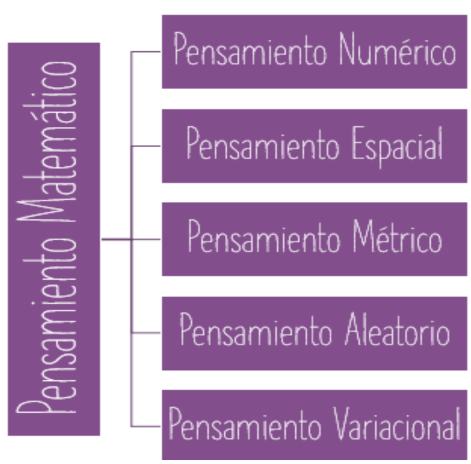


Figura 1. Pilares de pensamiento matemático

Para la determinación de las actividades en las que se puede evidenciar cada pensamiento, se elaboró la *tabla 1*, donde con base en SEP (2024) y Shiguay (2022), se describen los elementos considerados para cada pensamiento

Tabla 1.

Actividades que evidencian los pilares del pensamiento matemático

Pensamiento	**Descripción de actividades que lo evidencian.**
Numérico	Desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.
Algebraico	Comprensión de relaciones funcionales y uso de símbolos para formalizar generalizaciones.
Espacial	Controlar información a partir de la manipulación de objetos concretos destacando rasgos esenciales como la lectura de gráficas.
Aleatorio	Exploración y construcción de modelos de fenómenos físicos a partir de acciones como intuir, analizar, deducir y elaborar conjeturas.
Variacional	Representar y modelar situaciones teniendo conciencia sobre lo que varía
Métrico	Considerar cantidades muy grandes o pequeñas las cuales representan cifras significativas o desarrollo de notación científica

Por otra parte, la propuesta de la NEM busca abordar estos pensamientos mediante un enfoque integral que promueva la vinculación de las diferentes áreas del conocimiento, así como con problemáticas sociales, científicas y tecnológicas relevantes para los estudiantes, asignando a su vez cuatro categorías del pensamiento, las cuales se describen en la *tabla 2*.

Tabla 2.

Categorías del Pensamiento Matemático

Categoría	**Descripción**
Procedural	Integra lo Aritmético, Algebraico, Geométrico y Manejo de Datos
Procesos de razonamiento	Considerando lo Cognitivo-Abstracto, Espacial-visual y Aleatorio
Modelación	Aborda el uso y construcción de modelos y Estrategias heurísticas

Solución de problemas e interacción y lenguaje matemático	Desde el registro escrito, simbólico, algébrico e iconográfico, la negociación de significados y el ambiente matemático de comunicación

La *Figura 2* ilustra que los procesos cognitivos asociados al pensamiento matemático ocurren muchas veces participando de dos o más categorías entre las que se da una retroalimentación de manera dinámica (SEP, 2024, p. 21).

Figura 2. Categorías y subcategorías del Pensamiento Matemático.

Así pues, se considera al pensamiento matemático como un ente integral, que se consigue a través de la conjunción de diversidad de pensamientos y acciones, y es una parte esencial en el desarrollo de competencias cognitivas en la formación de los estudiantes y, como consecuencia, piedra angular en la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento.

Si bien, dentro de las categorías del pensamiento matemático se considera la solución de problemas y modelación, el término de modelación matemática no es nuevo y a lo largo del tiempo ha tenido diferentes interpretaciones, por ejemplo: Bacaër, et al (2008) mencionan que uno de ejemplos de modelos matemáticos más antiguos está plasmando en el libro de Fibonacci de 1202, mediante un ejemplo de crecimiento en la población de conejos (caso que se estudia en este documento a profundidad); por su parte Zaldivar (2017) hace un recuento de la forma en la que el concepto se ha ido enriqueciendo, de la siguiente manera:

"… Pollak en 1969 puntualizó los pasos que la conformaban: Identificar una

> pregunta del mundo real que se quiere entender, Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar, relaciones entre ellos. Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son. Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema.
>
> … Blum y Niss (1991) la consideran como el proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático.
>
> … Trigueros (2006), la detalla como un proceso cíclico donde se proporciona a los alumnos problemas abiertos y complejos en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos.” (p. 90)

En el mismo sentido, Villa-Ochoa, et al (2022) describen que la modelación matemática tiene dentro del aula puede ser el “vínculo para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos; enseñar modelos matemáticos y maneras de aplicar las matemáticas como contenido matemático y promoverlas como una actividad humana que responda a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos” (p. 69), que es la postura que se considera para este trabajo, vista como un instrumento que permite promover la transversalidad entre los pilares que conforman el pensamiento matemático y a la vez que hacen uso de significados refuerzan conceptos matemáticos.

Se integra como campo de aplicación a los elementos de la biología a través del crecimiento de una población de conejos, cuya base se puede describir con la Serie de Fibonacci y se espera que los estudiantes evidencien una conexión entre dos o más de los pilares de pensamiento matemático al utilizar algún modelo matemático propuesto para encontrar la solución.

3. Diseño e implementación de la propuesta

Para el diseño de la propuesta se consideró como base la propuesta de Zaldívar et al. (2017), pues plantea tres momentos principales por los que pasar las situaciones problema en las que se involucra la modelación matemática en el aula: Introducción al contexto real, Matematización de la situación a partir de los datos del contexto y Síntesis y regreso al contexto real.

La implementación se llevó a cabo en dos sesiones de 90 minutos cada una, con un grupo de cinco estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, 1 mujer y 4 hombres, de los cuales dos presentan alguna discapacidad (uno visual y otro cognitiva). Para el análisis de resultados, en este trabajo se codifica a cada estudiante como *E1* ... *E5* con la intención de comparar los pensamientos que evidencia cada uno de ellos en relación con los modelos propuestos y *P* a las intervenciones del profesor.

El escenario fue un aula de cómputo en la que cada estudiante contó con una computadora con acceso a internet para interactuar con los materiales integrados en la secuencia didáctica. Se utilizaron como herramientas un simulador PhET, el software de geometría dinámica GeoGebra y cuestionarios diseñados exprofeso con base en los tres momentos establecidos para la modelación matemática propuestos por Zaldivar et al. (2017), con el objetivo de que los estudiantes identifiquen los conceptos matemáticos involucrados en la solución y hagan uso de ellos de manera indistinta en el contexto del problema.

En el momento 1, referido a la ***introducción al contexto real***, se hizo un acercamiento de la situación problema mediante un simulador llamado "selección natural" (PhET, 2024), que se trata de una aproximación al crecimiento de los conejos, evidenciando factores como: clima, escases de alimentos y depredadores (ver *Figura 3*).

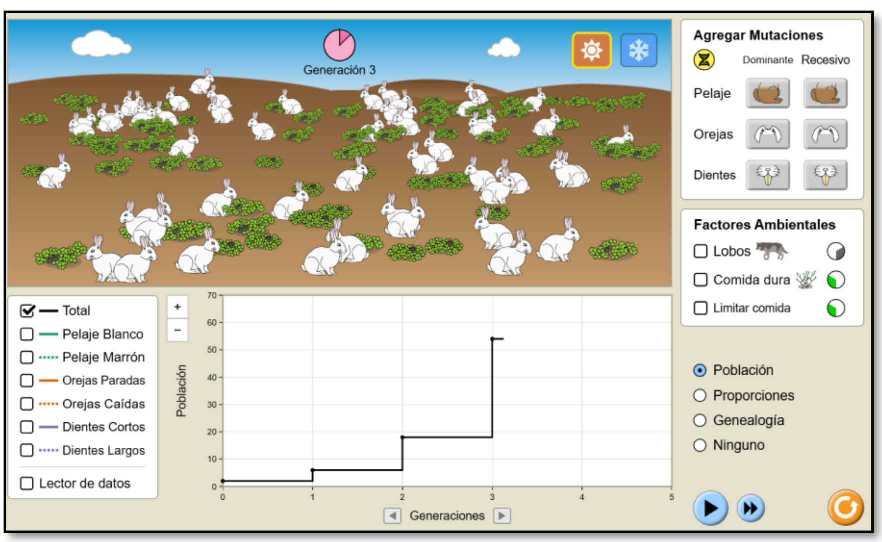


Figura 3. Simulador PhET Selección Natural

Mediante una estructura de clase completa, se explicó a los estudiantes los elementos que componen el simulador y se les dio tiempo para que interactuaran con ellos. Posteriormente, para identificar que el contexto del problema es comprendido y guiar a los estudiantes en la exploración de la herramienta, el profesor planteó de manera verbal preguntas como:

P: ¿Qué ocurrió con los conejos?

E2: Conquistaron el mundo

P: ¿A qué te refieres con eso?

E3: Habrá una sobrepoblación y llenan todo el territorio

P: ok, sin ningún depredador crecen y crecen

E1: Tienen un crecimiento exponencial

La recogida de datos se realizó mediante grabación de audio y video, así mismo, se pidió a los estudiantes que escribieran sus ideas en una hoja de papel, las cuales se recogieron al final de la sesión. De manera más guiada se fueron planteando preguntas como: ¿*Cuántos conejos aumentan de la generación 0 a la generación 1?*, ¿*Cuántos conejos más hay de la generación 1 a la 2?*, y así sucesivamente hasta llegar a la generación 4, simultáneamente los estudiantes fueron contestando lo que creían que sucedería de una generación a otra y luego del acuerdo grupal, lo corroboraron con el simulador (ver *Figura 4*), se les pidió que primero anotaran su predicción y posteriormente lo corroboraran con el uso del simulador.

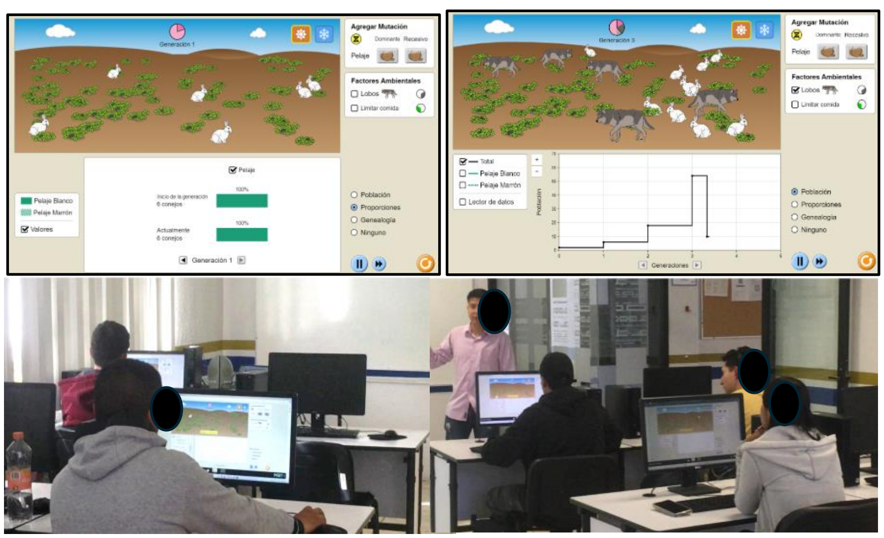


Figura 4. Exploración de la situación mediante el simulador

Mediante la interacción propuesta en la secuencia, se fue analizando el crecimiento de la población de generación en generación y se logró consensar que los primeros elementos de la serie son 2, 6, 18, 54 y 162 conejos para las primeras cuatro generaciones.

Posteriormente se plantearon las siguientes preguntas: ¿*pueden predecir la cantidad de conejos* *que habrá en la generación 5?, ¿La predicción corresponde a los resultados del simulador?, ¿qué crees que ocurrió?, ¿Qué ocurre cuando cambiamos el clima?, ¿Qué ocurre cuando limitamos la comida?, ¿Qué ocurre cuando agregamos depredadores?,* se tomó como punto de quiebre la 5ª generación de la población de conejos, pues en ésta hay un evento que modifica la estructura de la serie, lo que ocasionó que sus predicciones tuvieran una diferencia respecto a lo que se presentaba en el simulador en las generaciones anteriores. Mediante estas preguntas se promovió una lluvia de ideas para que los estudiantes determinaran la razón del suceso y la forma de encontrar la cantidad buscada, de ahí surgió la idea de que *"se muere la primera generación",* componiendo un primer acercamiento al patrón del crecimiento.

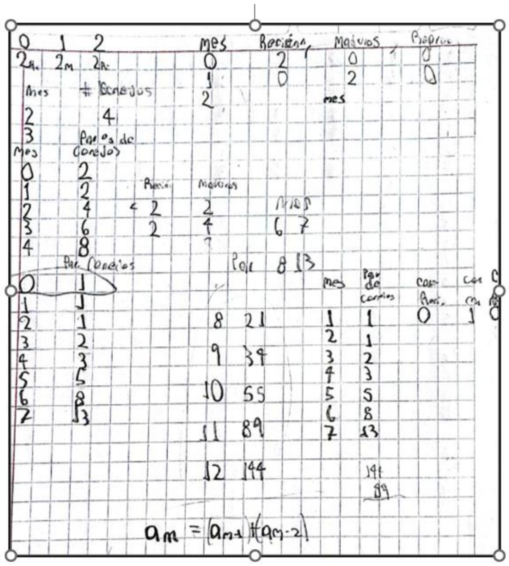
Este momento fue un detonante en la actividad, pues la interacción con el simulador motivó a los alumnos a participar activamente en la sesión, presentando ideas y haciendo hipótesis que los llevaron a la consecución del patrón buscado.

Para el momento 2, con el objetivo de lograr la ***matematización a partir de los datos del contexto***, se les planteó un cambio en la situación, con el objetivo de que los alumnos formularan algún modelo matemático que los llevara a determinar la cantidad de conejos que crecerían en dos años suponiendo condiciones ideales para la reproducción (ver *Figura 5*), se les hizo llegar de manera digital un instrumento compuesto de 7 preguntas que permitirán evaluar la interpretación de la situación y la validación de los modelos planteados.

> En un rancho, Don Javier tiene una variedad de animales, entre ganado, gallinas, conejos, cerdos, caballos entre otros. Diversos estudios científicos reconocen que los conejos tienen un periodo de maduración y reproducción de un mes. Si Don Javier deja en un corral a una pareja de conejos recién nacidos y suponemos que cada que se reproducen los conejos tienen una pareja.

Figura 5. Segundo problema de la secuencia

Los estudiantes hicieron anotaciones y contestaron simultáneamente las preguntas planteadas en el instrumento, en la *Figura 6* se puede observar la interacción de E1 ante esta situación.



1. En un rancho, Don Javier tiene una variedad de animales, entre ganado, gallinas, conejos, cerdos, caballos entre otros. Diversos estudios científicos reconocen que los conejos tienen un periodo de maduración y reproducción de un mes. Si Don Javier deja en un corral a una pareja de conejos recién nacidos y suponemos que cada que se reproducen los conejos tienen una pareja.
   a. ¿Cuántas parejas de conejos se tendrá al cabo de dos años?
   46368
   b. Matemáticamente, ¿cómo podemos modelar la situación y predecir esa cifra?
   Calculando la suma de los dos términos anteriores de la sucesión
   c. Introduce tu modelo en GeoGebra, posteriormente explica con tus propias palabras el resultado
   En la conclusión
   d. ¿Crees que en algún momento el comportamiento de la situación cambie?
   No
   e. Describe la situación en la que se daría el cambio
   Si no se agrega la tasa de mortalidad, se mantendrá el mismo comportamiento.
   f. ¿Es posible determinar la tendencia de la situación a más tiempo? Explica
   El crecimiento será cada vez mayor, pues con cada mes que pasa, los números serán cada vez más grandes, lo que se reflejará como un número mucho más grande en el resultado de la suma que determina el comportamiento.
   g. ¿Cómo le explicarías a Don Javier el comportamiento de su población de conejos?
   Podríamos comentarle a Don Javier que su población de conejos tiende a crecer cada vez más rápido conforme pasan los meses.

Figura 6. Respuestas y anotaciones de E1 a la situación planteada

La información recopilada las hojas de trabajo proporcionó datos individuales sobre las prácticas que cada uno de los participantes realizó y su manera de trabajar entre un pensamiento y otro.

En el momento 3, que se refiere a la ***síntesis y regreso al contexto real***, se planteó otro cambio de situación, presentando gráficamente el comportamiento de una población (ver *Figura 7*), con el objetivo de que a partir de la lectura de la gráfica los estudiantes interpretaran la situación presentada.

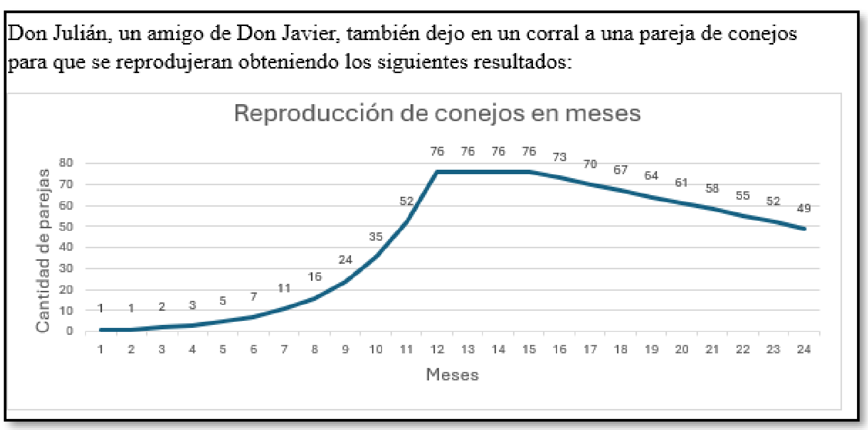


Figura 7. Situación gráfica planteada en el momento 3

Cabe mencionar que para la integración del estudiante con discapacidad visual se hizo uso de herramientas adicionales como un lector de pantalla para el cuestionario digital y material tangible (realizada con impresora de resaltado), describiendo verbalmente los momentos que debía considerar y corroborando por medio del tacto. (ver *Figura 8*).

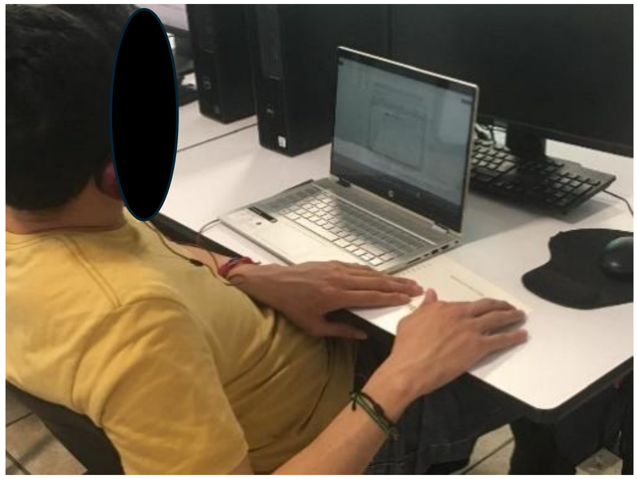


Figura 8. Manipulación de material tangible y lector de pantalla de E3

En la segunda sesión se retoman las problemáticas planteadas con el objetivo de corroborar los modelos y uso de pensamientos que se evidenciaron. Para el momento 1, se les pidió determinar si existían similitudes entre las problemáticas planteadas en la sesión anterior, a lo que surgieron respuestas como *"todas tienen un comportamiento exponencial", "están usando la serie de Fibonacci"*, se cuestionó acerca de esas aseveraciones y los conceptos matemáticos inmersos en la solución, donde surgieron entre otras, ideas como *funciones* y *sucesiones*, como puede verse en la *Figura 9*, creada por E1.

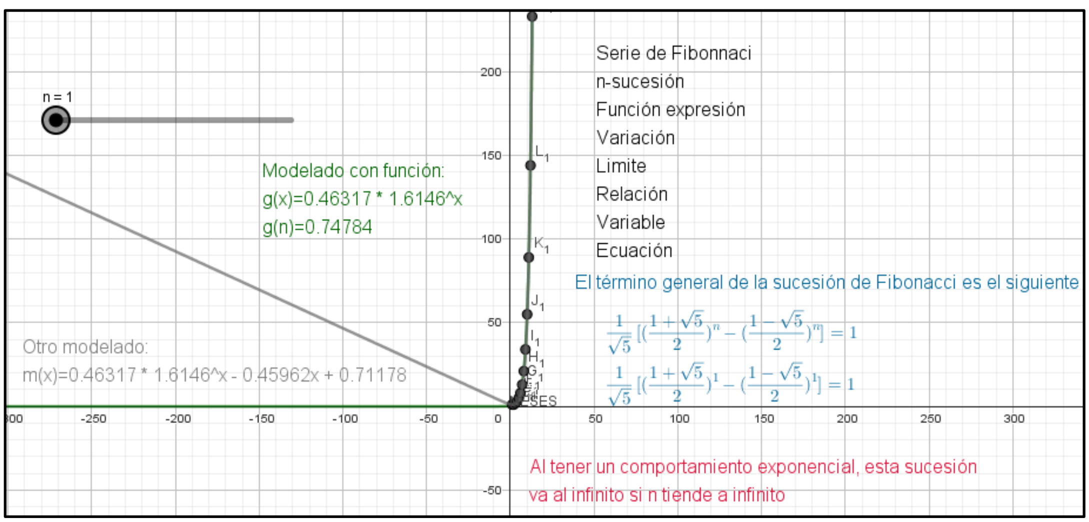


Figura 9. Conceptos involucrados en la situación, según E1

En el momento 2, se les pidió que capturaran los datos que tenían de la sesión anterior para visualizar y validar los modelos creados mediante el software de geometría dinámica GeoGebra (ver *Figura 9)*, e inferir acerca de las diferencias y similitudes de las situaciones planteadas. Los estudiantes verificaron su modelo numérico y establecieron la relación variacional, como puede verse en la *Figura 10*, donde E2 resalta la relación entre las variables involucradas.

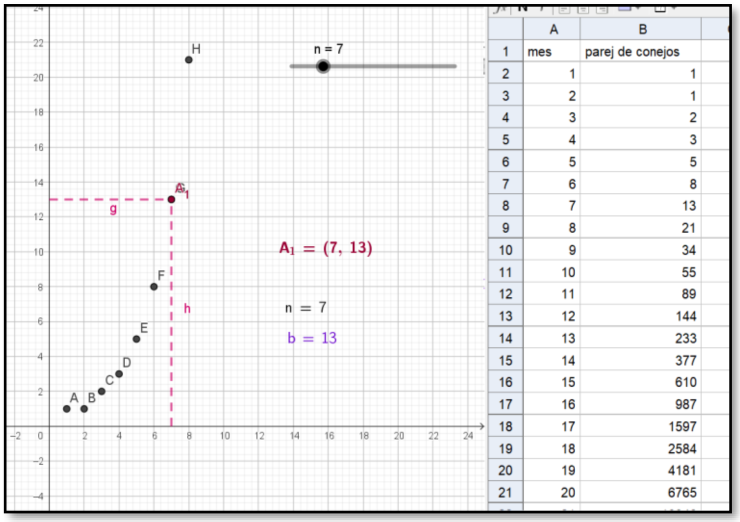


Figura 10. Identificación de relación entre variables creada por E2

Con estas dos representaciones de la situación (numérica y gráfica) los estudiantes determinaron que se podría modelar como una sucesión creciente, como se muestra en el siguiente extracto del audio:

P: ¿Cómo podemos describir lo que tenemos en pantalla?

E2: Es una sucesión

E3: Una sucesión creciente infinita

E5: Sería infinita si los conejos no se murieran

E1: Es la serie de Fibonnacci

P: ¿Por qué crees que se trata de la serie de Fibonacci?

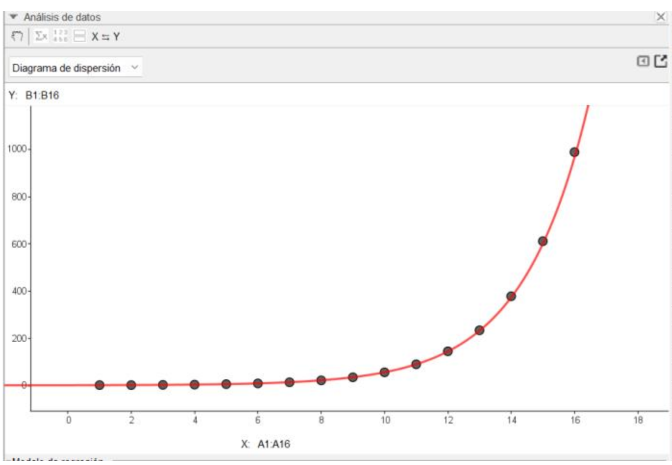
E1: Porque el siguiente término depende de la suma de los dos anteriores

E3: Si, mire [mostrando su pantalla] aquí lo comprobé (ver *Figura 11*)

4	3	3
5	5	5
6	8	8
7	13	13
8	21	21
9	34	34
10	55	=B10 + B9
11	89	89
12	144	144
13	233	233
14	377	377
15	610	610
16	987	987
17	1597	1597
18	2584	2584
19	4181	4181
20	6765	6765
21	10946	10946
22	17711	17711

Figura 11. Comprobación numérica realizada por E3

Se generaron ideas para determinar el n-ésimo término de la sucesión y E4 comentó que si también podríamos determinar una función por medio del software, tras la discusión, se les indicó que un modelo matemático podría tener varias formas, dependiendo de la situación que queremos resolver y nuestros conocimientos matemáticos, resaltando la importancia de interpretar y verificar que nuestros modelos, si bien son un acercamiento, deben reflejar la situación que se estudia; con ello, se procedió a buscar modelos algebraicos y elementos que permiten adaptarlos a las situaciones, incluso E1 trató de comprobar numéricamente si los modelos se adaptaban (ver *Figura 12*).



Hoja de Cálculo

	B	C	D	E	F	G
7	13	13.24949		-2.50557		10.74393
8	21	21.39265		-2.96519		18.42747
9	34	34.5406		-3.42481		31.1158
10	55	55.7693		-3.88443		51.88488
11	89	90.04519		-4.34406		85.70115
12	144	145.3871		-4.80368		140.58344
13	233	234.74223		-5.2633		229.47895
14	377	379.01515		-5.72292		373.29225
15	610	611.95843		-6.18254		605.77591
16	987	988.06899		-6.64216		981.42685
17	1597	1595.33765		-7.10179		1588.23589
18	2584	2575.83454		-7.56141		2568.27316
19	4181	4158.94628		-8.02103		4150.92528
20	6765	6715.04083		-8.48065		6706.56021
21	10946	10842.11489		-8.94027		10833.174...
22	17711	17505.69479		-9.3999		17496.294...
23	28657	28264.72079		-9.85952		28254.861...
24	46368	45636.26013		-10.31914		45625.941...
25	PAREJAS	FUNCIÓN 1		DIFERENCIA E...		NUEVA F...

Figura 12. Comprobaciones numéricas de la situación realizadas por E1

Posteriormente, cuando E2 mencionó que no se estaba considerando la mortalidad, se procedió a dar espacio para que los alumnos abordaran el momento 3, pidiendo que comprobaran por medio de la herramienta las preguntas que buscaban cantidades específicas y determinaran si sus respuestas anteriores eran similares a las obtenidas, en sus conclusiones se puede observar que regresan al contexto, identifican la variación, la utilidad de las funciones, incluso la serie de Fibonacci y los límites (ver *Figura 13*).

d. ¿Crees que en algún momento el comportamiento de la situación cambie?
No, aunque al cabo del tiempo las primeras generaciones mueran la tasa de crecimiento es mayor que la de decesos
Describe la situación en la que se daría el cambio
Si se dejaran de reproducir la población se mantendría constante y comenzaría a decrecer si siguen sin reproducirse
e. ¿Es posible determinar la tendencia de la situación a más tiempo? Explica
Como ya antes mencionado la población disminuiría si dejaran de reproducirse por un tiempo y empezaran a morir las primeras generaciones

Como conclusión podemos notar que en este ejercicio entran en cuenta la sucesión de fobonacci, ya que es la suma de los dos dígitos anteriores a el. Se pudo representar la función, creando el deslizador que inicie desde 3 para así poder encontrar el numero de parejas correspondientes con el mes,en donde el dezlizador corresponde al mes.

c. Introduce tu modelo en GeoGebra, posteriormente explica con tus propias palabras el resultado
El modelo representa la cantidad de conejos que existirán en 2 años utilizando una hoja de cálculo, posteriormente se gráfican puntos en el plano en dónde se maneja una función la cual es la cantidad de conejos en función del tiempo.
d. ¿Crees que en algún momento el comportamiento de la situación cambie?
Si, cuando los conejos empiecen a fallecer.

e. Describe la situación en la que se daria el cambio
Sería una generación antigua en la que no se cuente en los posteriores resultados, en dónde se tomará en cuenta una fórmula para los conejos totales futuros y para los conejos fallecidos.

Figura 13. Consideración de la mortalidad en la situación del problema

Sin embargo, si bien todos los participantes pudieron determinar un modelo algebraico, solo E5 formuló un modelo en el que se consideraba la mortalidad (ver F*igura 14*).

¿Hay manera de predecir hacia dónde van las cifras? Explica tu razonamiento

En la primera parte el comportamiento de los conejos es la suma de la cantidad actual de conejos más la anterior cantidad de parejas de conejos menos cuatro generaciones la actual generación que se esta tomando.

La parte decreciente es la generación actual menos 3 y así sucesivamente.

Representa matemáticamente la situación

n+(n_1)-n_1-5

Figura 14. Determinación de modelo considerando la mortalidad

4. Resultados y Discusión

Cabe mencionar que los instrumentos utilizados para el análisis de los resultados fueron, de manera individual: las hojas de notas en las que los estudiantes plasmaron de manera escrita sus ideas, los archivos de texto en los que contestaron las preguntas planteadas y los archivos dinámicos generados con GeoGebra en los que se plasmaron sus modelos, mientras que en forma grupal se usaron grabaciones de audio y video.

La *tabla 2* muestra la progresión y uso de los pensamientos utilizados por cada uno de los estudiantes en cada uno de los momentos de la situación, se nombra M1-1, M2-1, M3-1 como referencia a los momentos 1, 2 y 3 de la sesión 1 y M1-2, M2-2 y M3-2 para los momentos de la sesión 2, así mismo, se codifica el uso de los pensamientos matemáticos y/o modelos planteados por los participantes de la siguiente manera: NU- Numérico, ES-espacial, AG-algebraico AL-aleatorio y VA-variacional.

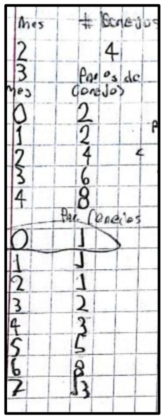
Tabla 2.

Pensamientos evidenciados en el estudio y sus relaciones

Estudiante	**M1-1**	**M2-1**	**M3-1**	**M1-2**	**M2-2**	**M3-3**
E1	NU, VA, AG	AG, AR	ES, NU, VA	VA, NU	ME, AG	ES, AR, AL
E2	NU, AG, VA	VA, AG	AR, ES	NU, ES	AG, VA	AR, ES, AL
E3	VA, NU	VA, AG	VA, ES	VA, NU		NU, ES
E4	VA, NU	AG, NU	AR, ES	NU, VA	AG, VA	
E5	VA, NU	AG, VA	VA	NU, VA	VA, ES	AG, AL, ES

Enseguida, se ejemplifican algunos de estos pensamientos considerados con base en las producciones generadas por los estudiantes.

En la *Figura 15* muestra que E1 hace uso del pensamiento aritmético y variacional en M1-1, da muestra de que ha comprendido la situación, al identificar las variables independiente y dependiente y relacionar uno a uno, a través de la tabulación, los meses con el número de conejos, podemos intuir que estaba pensando en el concepto de función biyectiva.



f. ¿Es posible determinar la tendencia de la situación a más tiempo? Explica
<u>**El crecimiento será cada vez mayor, pues con cada mes que pasa, los números serán cada vez más grandes, lo que se reflejará como un número mucho más grande en el resultado de la suma que determina el comportamiento.**</u>

Figura 15. Relación Numérico-variacional de E1

Para M2-2 (ver *Figura 16*), E2 plantea un modelo algebraico en el que identifica un modelo de sucesión matemática, sin embargo, se da cuenta que no está considerando factores como la muerte después de cierto número de generaciones, describiéndolo de la siguiente manera:

b. Matemáticamente, ¿cómo podemos modelar la situación y predecir esa cifra?
Si solo nos preguntan la cantidad de parejas que se tienen o que se obtuvieron al cabo de un tiempo sin la necesidad de decir cuántas de ellas han muerto entonces tenemos una secuencia en la cual la cantidad de parejas que se tendrán en el mes n es igual a a la suma del mes (n-1)+(n-2)

n=(n-1)+(n-2)

n=mes

Figura 16. Propuesta de pensamiento algebraica de E2

En lo que respecta a M1-3 (*Figura 17*), E3 integra el pensamiento aleatorio al analizar e interpretar los datos de la gráfica y relacionarlo con el contexto del problema e integra el pensamiento aleatorio con el pensamiento algebraico, cuando responde la pregunta "d" con la descripción de su propuesta para determinar sucesión algebraica.

f. ¿Es posible determinar la tendencia de la situación a más tiempo? Explica
Calculando el promedio de edad de un conejo y restando los conejos fallecidos al resultado final

g. ¿Cómo le explicarías a Don Javier el comportamiento de su población de conejos?
La población de sus conejos es creciente sin tener un límite de conejos.

d. Representa matemáticamente la situación
<u>**Podemos representar esta situación con la secuencia 76-3n, donde n representa los meses después del mes 15.**</u>

Figura 17. Uso de pensamiento Variacional y espacial propuesto por E3 en M1-3

Para M3-2, E2 interpreta e infiere la información contenida y no en la gráfica presentada, pues muestra un regreso a la situación, con el uso de pensamientos espacial y aritmético descritos como se muestra en la *Figura 18*.

a. ¿Qué crees que pasó con los conejos desde el mes 12 al mes 15?
Empezaron a morir parejas anteriores y los conejos que quedaron fueron todos machos

b. ¿Qué crees que pasó con los conejos después del mes 15?
Al ser que los conejos que tiene son machos ya no se pueden reproducir entre ellos por ende solo empiezan a morir los machos viejos con forme pasa el tiempo

Figura 18. Evidencia de pensamientos especial y aritmético en la solución del problema

Cabe resaltar que E5 fue el unico estudiante que percibió que la sucesion planteada correspondia a la sucesion de Fibonacci, ya que en el minuto 01:02:50 de la grabación de la sesion 1 se tiene lo siguiente:

P: ¿Cómo escribir matemáticamente lo que estás pensando?

E4: ¿$n + (n - 1)$?

E5: Se parece a la Sucesión de Fibonacci

P: ¿Por qué dices que se parece a la Sucesión de Fibonacci?

E5: Porque el numero siguiente surge de los dos resultados anteriores

P: Comprueba lo que dices, prueba con cada mes a ver si se cumple

Finalmente, dentro de las conclusiones del trabajo, cada estudiante externó sus impresiones, resaltando entre otras cosas, los conceptos involucrados, como se muestra a continuación.

CONCLUSIÓN:

En esta actividad estudiamos sucesiones y modelado de datos. Comenzamos con inferir una sucesión en el problema de población de conejos, tal sucesión resultó ser la serie de Fibonacci, pues la población de conejos por cada mes venía dada por la suma de la población de los dos meses anteriores. Una vez encontrada la ecuación de la sucesión notamos que cuando la variable crece, esto es; cuando pasa el tiempo, la población de conejos crece exponencialmente. De lo último se pudo inferir el resultado del modelado que se hizo en Geogebra.

Hicimos una tabla de la población de los conejos respecto a los meses y con esto creamos una gráfica de puntos y a esta gráfica le hicimos un poligonal, después aproximamos con Geogebra una función que se adecuara a la gráfica de puntos. Como se había dicho ya, tal función resultó ser una función exponencial. Se realizó otra función del modelado con intención de aproximar mejor la gráfica de puntos, esta nueva función se obtuvo al crear una fila con la diferencia que había entre los valores por mes de la sucesión y los de la primera función; de aquí, creamos con Geogebra una función que modelara a su vez esta diferencia. Posteriormente sumamos esta función a la primera función, obteniendo así otra función del modelado de nuestro problema.

d. ¿Crees que en algún momento el comportamiento de la situación cambie?
No, aunque al cabo del tiempo las primeras generaciones mueran la tasa de crecimiento es mayor que la de decesos
Describe la situación en la que se daría el cambio
Si se dejaran de reproducir la población se mantendría constante y comenzaría a decrecer si siguen sin reproducirse

e. ¿Es posible determinar la tendencia de la situación a más tiempo? Explica
Como ya antes mencionado la población disminuiría si dejaran de reproducirse por un tiempo y empezaran a morir las primeras generaciones

Figura 19. Conclusiones y descripción de solución E1 y E2, respectivamente

5. Conclusiones

La NEM plantea un desafío significativo para los educadores, pues implica un cambio en la metodología de abordaje. En este trabajo se considera que el primer reto es la identificación de situaciones que estimulen el empleo de estrategias de resolución diversas y que involucren múltiples conceptos como posibles soluciones, el segundo reto es el diseño de la situación, pues implica el paso por los 3 momentos modelación matemática, comprender el problema, matematizarlo sin inducir la forma de hacerlo y posteriormente verificar su pertinencia en el mismo contexto, y finalmente el tercer reto es la integración de los cinco pilares del pensamiento: variacional, numérico, algebraico, espacial y métrico. Lo anterior permite concluir que este marco teórico-metodológico es una herramienta efectiva en la transversalidad de los pensamientos matemáticos.

Respecto al problema planteado y sus variaciones en los diferentes momentos de la modelación matemática: la comprensión del problema, matematización de la situación y regreso al contexto, se cumplió el objetivo de que los alumnos se familiarizaran con el problema, se dieran cuenta que si bien se buscan valores puntuales, no existen soluciones ni métodos únicos y puede abordarse con el uso de conceptos como sucesiones, funciones, variación o límites, así mismo, que intervinieran todos los tipos de pensamiento matemático. El uso de la tecnología fue una herramienta fundamental en el proceso, pues desde el simulador que sirvió para introducirlos al contexto hasta la generación y visualización de modelos con GeoGebra motivó a los alumnos a explorar los modelos creados. Los resultados obtenidos indican que todos los participantes trabajaron un pensamiento matemático transversal e integral, con un aprovechamiento coherente y progresivo de los distintos pilares del pensamiento matemático.

6. Referencias

Bacaër, N., Bravo, R. y Ripoll, J. (2008). Breve historia de los modelos matemáticos en dinámica de poblaciones. Traducción al español de Histories de mathématiques et de populations, Cassini, Paris, 2008. http://www.ummisco.ird.fr/perso/bacaer/BreveHistoria2.pdf

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68 https://link.springer.com/article/10.1007/bf00302716

Borromeo Ferri, R., Mena Lorca, J., & Mena Lorca, A. (Editores). (2021). *Fomento de la Educación STEM y la modelización matemática para profesores. Fundamentos, ejemplos y experiencias*. Kassel University Press. https://kobra.uni-kassel.de/items/11203521-b0d6-4879-85ae-55fdf38f838f

Mancera, G. y Camilo, F. (2022). Decantando las posibilidades de la modelación matemática desde nuestras prácticas pedagógicas e investigativas. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, vol. 18, núm. 1. https://doi.org/0.14483/23464712.18338

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Matemáticas en Lineamientos curriculares. MEN y Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá.

Miranda, F., y Martínez, A. (2022). Desarrollo educativo en América Latina. Tendencias globales, desafíos regionales. Políticas, reformas y evaluación educativas en México y América Latina. https://www.researchgate.net/profile/ArceliaMartinezBordon/publication/361289237_Politicas_reformas_y_evaluacion_educativas_en_Mexico_y_America_Latina_Balance_y_perspectivas_a_futuro/links/63c6255 6d7e5841e0bd4bc55/Politicas-reformas-y-evaluacion-educati

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, The 14th ICMI Study, 10(1), 3-32. http://doi.org/10.1007/9780387298221

PhET Interactive Simulations (2024, Mayo). University of Colorado Boulder, bajo licencia CC- BY-4.0 CC-BY-4.0 https://phet.colorado.edu/es/simulations/natural-selection

Shiguay, G., Hu, G. y De la Cruz, R. (2022). El Pensamiento Matemático: los 5 pilares de la formación docente en ciencias. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación.* https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i23.371

Secretaria de Educación Pública [SEP]. (2024). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático.* https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13516/1/images/Documento%20progresiones%20-%20Pensamiento%20matem%C3%83%C2%A1tico.pdf

Suárez, N. (2013). Estrategias comunicativas en la clase de matemáticas. *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Latina y del Caribe. I CEMACYC.* https://ciaem-iacme.org/memorias-icemacyc/320-560-1-DR-C.pdf

Valero, N. y González, J. (2020). Análisis comparativo entre la enseñanza tradicional matemática y el método ABN en Educación Infantil en Educación Matemática en la Infancia (Edma0-6). vol. 9 núm. 1. pp. 40-61. http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6

Villa-Ochoa, J. A., Sánchez-Cardona, J., & Parra-Zapata, M. M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos, 67-89. https://www.researchgate.net/profile/Jhony-Villa-Ochoa/publication/362532389_Modelacion_matematica_en_la_perspectiva_de_la_educacion_mate matica/links/62eeb226505511283e970bba/Modelacion-matematica-en-la-perspectiva-de-la-educacion-matematica.pdf

Zaldívar, J., Quiroz, S., & Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 8*(15), 87-110. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200087