Interacción entre el conocimiento matemático y las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje del profesor al impartir función racional

Interaction between mathematical knowledge and the teacher's conceptions of teaching-learning when teaching rational function.

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Leticia Sosa Guerrero

lsosa@uaz.edu.mx

Hermes Alfredo Carabali Florez

hermescarabaliflorez@gmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Recibido: 16 de octubre de 2024

Aceptado: 15 de noviembre de 2024

Autor de Correspondencia:

Leticia Sosa Guerrero

Resumen: La relación entre el conocimiento matemático y las concepciones de enseñanza-aprendizaje del docente constituye un pilar esencial para comprender su quehacer en el aula. Este artículo examina en profundidad esta interrelación en la enseñanza de la función racional a estudiantes de bachillerato. El estudio, de carácter cualitativo y enfoque descriptivo, se centra en la práctica pedagógica de un profesor de matemáticas. Para analizar el conocimiento especializado docente, se aplica el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, con énfasis en el conocimiento matemático involucrado en su enseñanza. En cuanto a las concepciones, se emplea el instrumento Concepciones de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas para establecer la conexión entre sus concepciones y la práctica pedagógica. Los hallazgos muestran que las concepciones del profesor impactan notablemente en sus decisiones didácticas, actuando como moderadoras de su práctica. Además, esta relación permite identificar el modelo de enseñanza y su efecto en los logros matemáticos de los estudiantes, resaltando la relevancia de integrar ambos aspectos para optimizar los resultados educativos.

Palabras clave: Conocimiento Especializado del Profesor, Concepciones de Enseñanza-Aprendizaje, MTSK, Función Racional.

Abstract: The relationship between mathematical knowledge and the teaching-learning conceptions of the teacher is a crucial element for understanding their work in the classroom. This article examines this interrelationship in depth in the teaching of rational functions to high school students. The study, qualitative nature with a descriptive approach, focuses on the pedagogical practice of a mathematics teacher. To analyze specialized teacher knowledge, the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model is applied, emphasizing the mathematical knowledge involved in instruction. Regarding conceptions, the Conceptions of Mathematics Teaching-Learning (CEAM) instrument is used to establish the connection between these beliefs and pedagogical practice. The findings show that the teacher's conceptions significantly influence their didactic decisions, acting as moderators in their practice. Furthermore, this relationship helps to identify the teaching model and its effect on students' mathematical achievements, highlighting the importance of integrating both aspects to improve educational outcomes.

Keyword: Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, Teaching-Learning Conceptions, MTSK, Rational Function.

1. Introducción

Las concepciones de los profesores sobre la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fungen como potentes moderadores durante la práctica de enseñanza (Rodríguez-Muñiz et al., 2022). Por dicha razón, en las últimas décadas, diversos investigadores han indagado sobre el papel que tienen las concepciones en la práctica de enseñanza, y su relación con el conocimiento profesional que poseen y manifiestan los docentes en la enseñanza (p. ej. Aguilar-González et al., 2018; Vasco y Climent, 2018; Mapolelo y Akinsola, 2015).

Desde los ochenta, diversas investigaciones han argumentado acerca de la importancia que tiene analizar la relación entre el conocimiento profesional y las concepciones del profesor para comprender el quehacer profesional docente (p. ej. Thompson, 1984; Ernest, 1989). Respecto a esto, indagaciones como la de Wilkins (2008), proporcionan evidencia sobre las notables repercusiones que tiene esta relación, en la efectividad de la enseñanza y, por tanto, en el aprendizaje de los estudiantes. Así pues, *el impacto* de esta relación puede analizarse, según la literatura reportada, bajo dos criterios: primero, la correlación entre *el conocimiento profesional, las concepciones y la práctica de enseñanza*; segundo, *el logro matemático alcanzado por los estudiantes* (Campbell et al., 2014).

En la enseñanza del álgebra escolar, diversas investigaciones han evidenciado que los profesores poseen limitaciones en los conocimientos matemáticos y didácticos del contenido que emplean para impartir (p. ej. McCrory et al., 2012). En ese orden de ideas, uno de los objetos algebraicos más estudiados es el de función (Romero, 2019), y esto se debe a la importancia que tiene en la formación algebraica de los estudiantes (Herrera y Muñoz, 2014), y las dificultades encontradas en docentes, tanto en formación, como en ejercicio, para comprender y enseñar este objeto (Amaya et al., 2016).

Respecto a la función racional, la literatura reporta que estudiantes de bachillerato tienen dificultades para comprender este concepto, construir representaciones gráficas y determinar su comportamiento asintótico (Arce y Ortega, 2013; Noreña, 2013; Scorzo et al., 2014). Estos resultados se correlacionan con los reportados por Fernández (2019), quien afirma que los docentes, además de poseer estas dificultades, también tienen falencias en el discurso que emplean para impartir el contenido de función racional.

En consecuencia, el objetivo de este estudio es caracterizar el *impacto* que tiene la relación entre *el conocimiento matemático y las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de* *la función racional en bachillerato.* Este impacto es entendido, para el desarrollo de la investigación, como la relación entre el conocimiento especializado que posee y manifiesta el profesor de matemáticas durante la práctica de enseñanza con el conocimiento matemático adquirido por los estudiantes, producto de la práctica-docente (p. ej. Campbell y Malkus, 2011; Smith y Esch, 2012, Campbell et al., 2014).

Con esta finalidad, empleamos el modelo teórico MTSK[1] (Carrillo et al., 2018) para identificar conocimiento matemático del docente, y el instrumento CEAM[2] (Carrillo, 1998; Climent, 2005) para comprender y, posteriormente, caracterizar sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje que manifiesta en la enseñanza.

2. Fundamentos teóricos

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos que se emplearán en relación con el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK) y las *Concepciones de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas* (CEAM).

2.1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Desde principios de los años ochenta, docentes e investigadores de la Educación Matemática han indagado sobre los conocimientos profesionales de los profesores de matemáticas para ejercer su función docente (Sosa, 2012). Entre estas indagaciones, destacan los estudios realizados por Shulman (1986), Ball et al. (2008), Godino (2009), Carrillo et al. (2013) y Carrillo et al. (2018), quienes proponen diversos modelos teóricos para caracterizar el conocimiento especializado que posee y manifiesta el docente en su quehacer profesional.

Para impartir matemáticas de forma efectiva, no basta únicamente con poseer conocimiento matemático (Escudero, 2017), también se debe poseer conocimiento didáctico del contenido a enseñar. Bajo esta premisa, en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) el conocimiento especializado del profesor se divide en tres dominios: primero, *el Conocimiento Matemático* (MK); segundo, *el Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK); tercero, *las Creencias del*

---

[1] Del acrónimo en inglés *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK).

[2] Del acrónimo *Concepciones de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas* (CEAM).

Profesor sobre las Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje. A su vez, estos dominios se dividen en subdominios de conocimiento (véase la *Figura 1*).

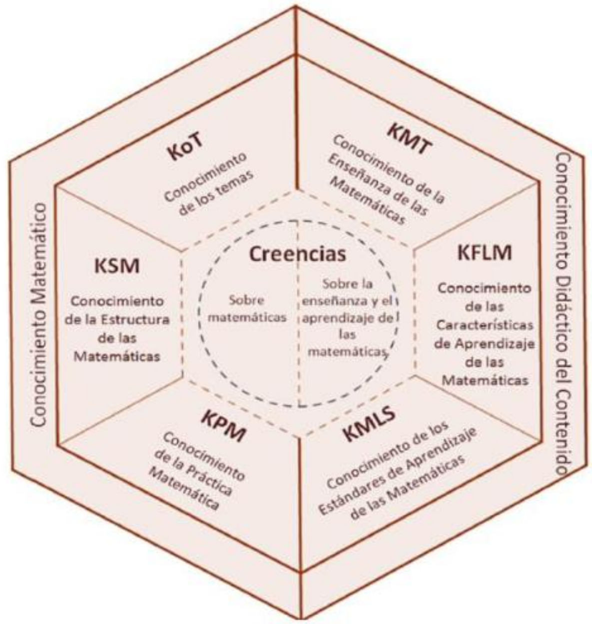


Figura 1. Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018)

El dominio del **Conocimiento Matemático** abarca el conocimiento que posee el profesor de su área como disciplina científica (Flores y Carrillo, 2014). En ese sentido, el MK está dividido en tres subdominios:

- *Conocimiento de los Temas* (KoT). Este subdominio refiere al conocimiento fundamentado que posee el profesor acerca de los contenidos matemáticos y sus significados (Sosa et al., 2015). Es decir, el conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda (Aguilar-González et al., 2018). En concordancia, en este subdominio se encuentran cuatro categorías de conocimiento: (1) las definiciones, propiedades y fundamentos, (2) los procedimientos, (3) los registros de representación, (4) la fenomenología y sus aplicaciones.
- *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM). Este subdominio refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de las formas de conocer, crear o producir y proceder en matemáticas (Zakaryan y Sosa, 2021). En ese sentido, el KPM destaca la importancia de comprender cómo se desarrollan las matemáticas y, por ende, que el profesor conozca los resultados matemáticos y las formas de proceder para obtenerlos (Carrillo et al., 2018). En consecuencia, el KPM se subdivide en cuatro categorías de conocimiento: (1) la práctica de demostrar, (2) la práctica de definir,

(3) la práctica de resolver problemas y el papel del lenguaje matemático (Delgado-Robello y Espinosa-Vásques, 2021).

- *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM). Este subdominio contempla el conocimiento de las relaciones que el profesor establece entre los contenidos matemáticos (Flores y Carrillo, 2014). En ese orden de ideas, en el KSM se reconocen las conexiones entre los distintos contenidos, estableciendo una red de conceptos y/o procedimientos (Sosa et al., 2015). Así pues, este subdominio reconoce cuatro categorías de análisis: (1) conexiones de simplificación, (2) conexiones de complejización, (3) conexiones transversales, (4) conexiones auxiliares.

El dominio del **Conocimiento Didáctico del Contenido** refiere al conocimiento que posee el profesor del contenido matemático como objeto de enseñanza (Carrillo et al., 2018). En ese sentido, en el PCK se consideran aquellos conocimientos para la enseñanza de las matemáticas, incluyendo aquellas formas que resultan de utilidad para representar ideas, analogías, ilustraciones, explicaciones ejemplos y demostraciones (Carrillo et al., 2013). En consecuencia, el PCK se divide en tres subdominios de conocimiento:

- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje* (KMLS). En este subdominio se contempla el conocimiento que el profesor posee acerca de los aprendizajes que los estudiantes deben, y pueden, alcanzar en distintos cursos y niveles escolares (Aguilar-González et al., 2018). En ese sentido, el KMLS abarca el conocimiento de los contenidos propuestos por el currículo de matemáticas y las normativas educativas (Vasco y Climent, 2018). Así pues, en el KMLS se proponen las siguientes categorías: (1) los resultados de aprendizaje esperados, (2) el nivel de desarrollo esperado, (3) la secuenciación de los temas.
- *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM). Este subdominio refiere al conocimiento sobre cómo se aprende un contenido matemático, teniendo en cuenta que el foco no es el estudiante, sino el conocimiento del profesor sobre el contenido como objeto de aprendizaje (Sosa et al., 2015). En ese sentido, el KFLM engloba los conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes a los contenidos matemáticos (Carrillo et al., 2018). Así pues, en este subdominio se consideran las siguientes categorías: (1) teorías de aprendizaje

matemático, (2) fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, (3) formas de interacción con un contenido matemático, (4) aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (Delgado-Robello y Espinosa-Vásques, 2021).

- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT). Este subdominio abarca el conocimiento del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza (Carrillo et al., 2018). En ese sentido, el KMT integra el conocimiento de distintas estrategias que le permiten al profesor fomentar las capacidades procedimentales y conceptuales asociadas al contenido (Aguilar-González et al., 2018). Así pues, este subdominio está compuesto por tres categorías de análisis, descritas a continuación (Carillo et al., 2013): (1) teorías de enseñanza de las matemáticas, (2) recursos de enseñanza, (3) estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

2.2. Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje

Durante las últimas décadas, en la Educación Matemática, los investigadores han posicionado al profesor como el centro de indagación para mejorar el quehacer profesional docente, y la calidad de la formación matemática que reciben los estudiantes (p. ej. Dávalos et al., 2018; Navarrete et al., 2018). Particularmente, los conocimientos y las creencias de los profesores de matemáticas han sido objeto de numerosos estudios durante los últimos treinta años (p. ej. Ernest, 1989; Thompson, 1992; Wilkins, 2008; Campbell et al., 2014; Aguilar-González et al., 2018). Esto es debido, según Potari (2019), a un intento por interpretar por qué la enseñanza de las matemáticas es eficaz, o no, y buscar formas de desarrollarla y/o complementarla.

En cuanto a las *Creencias* y *Concepciones del Profesor*, existen diferentes posicionamientos teóricos respecto a cómo deben entenderse ambos términos. Investigadores como Pajares (1992) y Ponte (1992), entienden las *creencias* como elementos poco elaborados, formados a edades tempranas y, debido su componente afectiva, tienden a arraigarse en el pensamiento del docente. En consecuencia, en Thompson (1992) se argumenta que, las creencias se pueden mantener con mayor o menor convicción, pues forman *sistemas de creencias* que aportan distintos grados de consistencia y estabilidad tanto a las prácticas, como a los comportamientos, y actuaciones del profesor de matemáticas.

Por su parte, a las *concepciones* se les asigna una naturaleza de tipo cognitiva, pues forman parte del conocimiento, y son organizadores implícitos de conceptos que influyen en los procesos de razonamiento (García et al., 2006). En ese sentido, Thompson (1992) argumenta que las concepciones son “una estructura más general, incluyendo creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares” (p. 130). En consecuencia, en Montes et al. (2014) se afirma que:

> La diferenciación, por tanto, entre creencia y concepción, puede entenderse, a priori, en base a la implicación de la componente afectiva y emocional en las creencias, frente a la racionalización que suponen las concepciones. Sin embargo, esta relación entre creencias y concepciones, así como su integración en el conocimiento, es una faceta que aún no se ha explorado en la profundidad necesaria como para llegar a puntos de consenso (p. 11).

Dado que esta investigación empleó el instrumento CEAM (Carrillo, 1998; Climent, 2005) para la caracterización de las concepciones de enseñanza-aprendizaje del profesor, optamos por la definición presentada por Climent (2005), quien las define como:

> El conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones, respuestas a preguntas sobre y su descripción de su práctica, su acción y los documentos que produce en torno a esta (p. 23).

Esta definición resulta teórica y metodológicamente conveniente, pues es compatible con la noción de concepción presente en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) y, además, es operativa, pues permite identificar las concepciones que matizan la práctica de enseñanza del profesor mediante el instrumento CEAM.

2.3. Instrumento CEAM.

El instrumento CEAM fue desarrollado por Climent (2005) a partir de la caracterización realizada por Carrillo (1998) sobre las concepciones de enseñanza que posee el profesor de matemáticas.

Respecto a esto, Carrillo y Contreras (1995) afirman que las concepciones “pueden considerarse como operadores que actúan en el proceso de transformación del conocimiento a la situación didáctica, y en el propio control de la interacción alumno - situación” (p. 80). Bajo esta noción, clasificaron las concepciones de los profesores sobre la naturaleza y enseñanza de las matemáticas de acuerdo con cuatro tendencias: *tradicional (TR)*, *tecnológica (TE)*, *espontaneísta (E) e investigativa (I)*, y las organizaron conforme a seis categorías: *la metodología, la concepción de la matemática escolar, la concepción de aprendizaje, el papel del estudiante, el papel del profesor y evaluación*.

En la Tabla 1, se expone una caracterización de las cuatro tendencias presentes en el instrumento CEAM:

Tabla 1

Caracterización de las tendencias didácticas de enseñanza del profesor de matemáticas.

Concepción	Caracterización
Tradicional (TR)	**(TR)** Bajo esta tendencia, la metodología de enseñanza está caracterizada por la repetición reiterada de ejercicios. En ese sentido, impartir consiste en la exposición magistral de las matemáticas como un producto acabado y se considera el libro de texto como el único material curricular para el desarrollo de los cursos. **(TR)** El estudiante es concebido como el responsable de sus aprendizajes y la evaluación de su proceso de aprendizaje consiste en medir la capacidad de éste para retener información. **(TR)** La metodología de enseñanza se concibe como una reproducción de procesos lógicos, en la cual el profesor no presenta los contenidos en su forma final, sino que simula su proceso de construcción con el apoyo de herramientas técnicas.
Tecnológica (TE)	**(TE)** Dentro de esta tendencia, se enfatiza el carácter práctico de la asignatura, es decir, su aplicación en otras disciplinas. Asimismo, se considera que el estudiante es responsable de su propio aprendizaje, el cual se basa en la memorización tanto de los conceptos como de los procesos lógicos que los acompañan.
Espontaneísta (E)	**(E)** En esta tendencia, la metodología de enseñanza se inclina por implementar diversos métodos y recursos que suelen ser efectivos en otros contextos educativos. En este sentido, los ejercicios son reemplazados por actividades experimentales que carecen de reflexión, y el profesor plantea actividades en las que se manipulan modelos que generan un conocimiento no estructurado. **(E)** La matemática escolar se concibe con un propósito formativo, buscando modificar la actitud del estudiante hacia el aprendizaje matemático mediante dinámicas grupales. **(E)** En este contexto, el docente tiende a adoptar un enfoque humanista.
Investigativa (I)	**(I)** En esta tendencia, se considera que el profesor guía al estudiante hacia la adquisición de ciertos conocimientos a través de la investigación. En este sentido, el docente presenta una propuesta organizada que incluye los elementos del programa, aunque sin estar vinculada a un recorrido completo. **(I)** El objetivo es que los estudiantes den significado a lo que aprenden y desarrollen actitudes positivas. Por lo tanto, se priorizan aprendizajes que puedan aplicarse en diversos contextos.

Nota: Adaptado de Carrillo y Contreras (1995) y Carabali (2022).

3. Diseño metodológico.

Dado el objetivo de la presente investigación, contemplamos que ésta es de naturaleza cualitativa y de corte descriptivo (Stake, 1999). En ese sentido, el método seguido es el estudio de caso instrumental, pues la finalidad es examinar un caso particular y proporcionar más información sobre el tema en cuestión. Como instrumentos para la recolección de información se emplean: *Entrevistas Semiestructuradas*, pues sirven como una herramienta valiosa para recolectar la información y profundizar sobre sus respuestas (Stake, 2007); *Observaciones de Clase*, este instrumento nos permite observar la práctica del profesor en su ambiente natural (el aula de clase), comprendiendo sus atributos característicos; *Cuestionarios*, pues nos permite identificar y comprender los conocimientos matemáticos que posee el profesor sobre el contenido de función racional.

3.1. Sobre el caso seleccionado.

El profesor seleccionado como caso ha sido nombrado con el seudónimo "William". A continuación, presentamos una breve descripción para ofrecer contexto: William es un docente de matemáticas con 13 años de experiencia en los niveles de secundaria y bachillerato. Su formación inicial es en Ingeniería Electrónica, y posee una Maestría en Innovación Educativa. Además, ha participado en varios cursos de corta duración, como diplomados en didáctica de las matemáticas utilizando software de geometría dinámica, como Geogebra y Cabri, así como otros cursos de actualización docente promovidos por Secretarías de Educación Municipales, departamentales y el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Actualmente, William enseña los cursos de Cálculo Diferencial y Álgebra en una institución educativa pública en Colombia. Los estudiantes a quienes enseñó el tema de función racional cursan el grado undécimo (11°) y tienen entre 16 y 18 años.

4. Resultados.

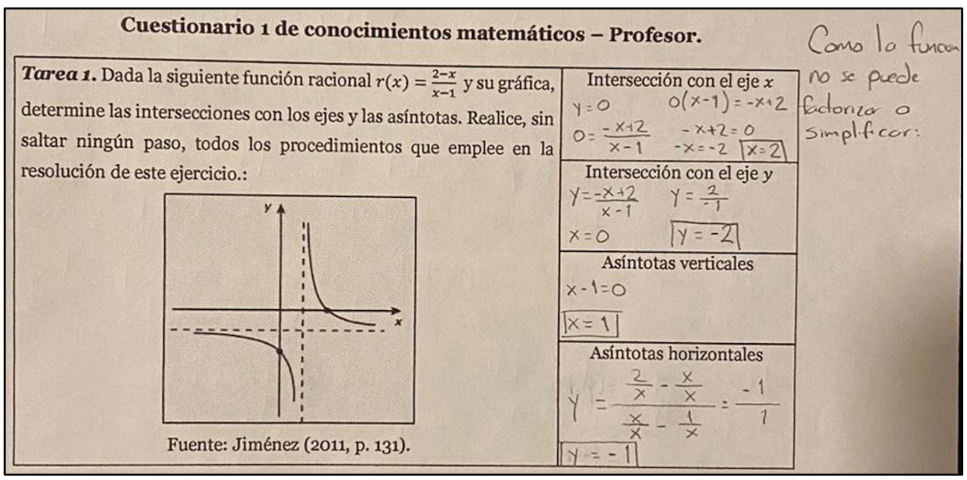
Uno de los principales hallazgos refiere a la caracterización de la interacción entre algunos subdominios del *Conocimiento Especializado del Profesor De Matemáticas* (MTSK) y sus *Concepciones sobre la Enseñanza-Aprendizaje* (CEAM) *de la Función Racional*. En ese sentido, el análisis de la información permite identificar que la relación entre los subdominios de conocimiento evidenciados por el profesor, se gesta a través de las concepciones que manifiesta durante su práctica de enseñanza.

En concordancia, los datos recabados se obtuvieron a través de la aplicación de dos entrevistas semiestructuradas, el análisis de las sesiones de clase, y un cuestionario de conocimiento matemático compuesto por cuatro tareas. A continuación, se presentan evidencias acerca del conocimiento especializado y las concepciones manifestadas por el profesor en nuestros instrumentos.

a. En cuanto al conocimiento matemático evidenciado por William en el cuestionario:

- **Análisis de la Tarea 1.**

El objetivo propuesto para la tarea 1 consistió en identificar el conocimiento matemático que tiene William acerca de los procedimientos para hallar las intersecciones de una función racional con los ejes, y sus posibles asíntotas verticales y horizontales. En ese sentido, propusimos una situación problema en la que William pudiese encontrar las intersecciones con los ejes y las respectivas asíntotas de una función racional $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$, como se observa en la *Figura 2*.


Cuestionario 1 de conocimientos matemáticos – Profesor.

Tarea 1. Dada la siguiente función racional $r(x) = \frac{2-x}{x-1}$ y su gráfica, determine las intersecciones con los ejes y las asíntotas. Realice, sin saltar ningún paso, todos los procedimientos que emplee en la resolución de este ejercicio.:

Fuente: Jiménez (2011, p. 131).

Intersección con el eje x
$y=0$ $0 = \frac{-x+2}{x-1}$ $0(x-1) = -x+2$ $-x+2=0$ $-x=-2$ $\boxed{x=2}$

Intersección con el eje y
$y = \frac{-x+2}{x-1}$ $x=0$ $y = \frac{2}{-1}$ $\boxed{y=-2}$

Asíntotas verticales
$x-1=0$ $\boxed{x=1}$

Asíntotas horizontales
$y = \frac{\frac{2}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{1}$ $\boxed{y=-1}$

Como la funcion no se puede factorizar o simplificar:

Figura 2. Respuesta de William a la Tarea 1.

En la evidencia anterior (Figura 2), identificamos que William, sin mayor dificultad, encuentra las intersecciones de la función $r(x)$ con los ejes x y y. Sin embargo, para determinar las asíntotas horizontales de la función, la respuesta del profesor nos proporciona indicios de que emplea un procedimiento asociado al concepto de *límites*, y no el teorema sobre las asíntotas horizontales. No obstante, en la justificación de esta tarea, William nos proporciona evidencia del conocimiento que tiene sobre dicho teorema. Veamos la Figura 3:

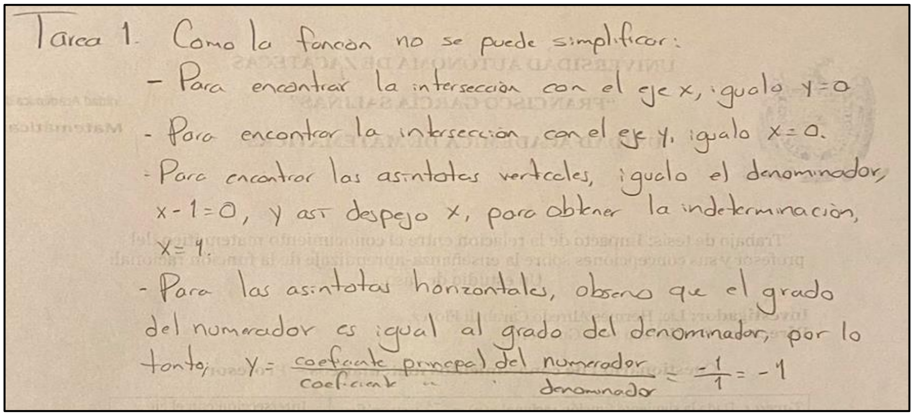

Tarea 1. Como la función no se puede simplificar:
- Para encontrar la intersección con el eje x, igualo $y=0$
- Para encontrar la intersección con el eje y, igualo $x=0$.
- Para encontrar las asíntotas verticales, igualo el denominador, $x-1=0$, y así despejo x, para obtener la indeterminación, $x=1$.
- Para las asíntotas horizontales, observo que el grado del numerador es igual al grado del denominador, por lo tanto, $y = \frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente '' '' denominador}} = \frac{-1}{1} = -1$

Figura 3. Justificación de William a la Tarea 1.

Resultados	• **KoT:** *Conoce un método para encontrar las intersecciones de la función con los ejes coordenados.* • **KoT:** *Sabe que, para identificar las asíntotas de una función racional, es necesario hallar los ceros del polinomio en el denominador.* • **KoT:** *Reconoce que una forma de determinar las asíntotas horizontales de una función racional es utilizando límites.* • **KoT:** *Conoce los criterios para establecer las asíntotas horizontales de una función racional.*

b. En cuanto al conocimiento especializado evidenciado por William al impartir (Carabali, 2022):

William*:*

Una función racional es aquella función formada por el cociente de dos polinomios, es decir, una función racional es una fracción que tiene un polinomio en el numerador y otro polinomio en el denominador.

$f(x) = \frac{a}{b} = \frac{p(x)}{q(x)}.$

Las funciones racionales se caracterizan por tener singularidades en aquellos puntos en los que se anula el denominador. Bueno, expliquemos un poco eso de que se anula el denominador: ¿Qué significa que el denominador se anule? Es decir, qué, como es un polinomio tiene variables, cuando las variables asumen algunos valores se hace la operación aritmética y en el denominador aparece un cero. Cuando aparece un cero, se configura una cosa que se llama la indeterminación. Una indeterminación simplemente es la inexistencia de la función como tal, no existe la función en ese punto. Todos sabemos que existen algunos casos como cero sobre un número, cero sobre un número es cero. Pero, un número sobre cero, no existe o también es una indeterminación.

Figura 4. *Episodio S1Ep1 (Carabali, 2022).*

Al analizar las líneas 1, 2 y 3 del **S1Ep1**, se observa que el profesor comprende que una función racional puede definirse como el cociente de dos polinomios (KoT). Además, también se evidencia que William sabe que una función racional puede representarse mediante los registros gráfico y verbal (KoT), ya que en la línea 4 presenta la función racional como: $f(x) = \frac{a}{b} = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $a, b, p(x), q(x)$ polinomios (Carabali, 2022).

Además, observamos que William, al definir la función racional, no menciona de manera explícita a sus estudiantes que el denominador debe ser distinto de cero. Asimismo, cuando intenta explicarles qué ocurre cuando el denominador de la función es cero, entre las líneas 7 y 16, utiliza los términos “indeterminación” e “indefinición” como si fueran equivalentes.

Resultados	• **KoT:** ***Sabe que una función racional se define como el cociente entre dos polinomios.*** • **KoT:** ***Conoce que una función racional puede representarse mediante registros gráfico y verbal.***

William:

El dominio de una función son todos los valores de equis para los cuales la
función existe. Y el rango es la correspondencia de esos valores.
Es decir, que por lo general, nosotros entendemos el dominio
de una función como un intervalo.
Porque una función puede existir desde, por ejemplo, menos infinito a
infinito, osea, todos los reales. Y eso quiere decir que esa función va a ser
continua durante toda su trayectoria.
Tanto en los equis positivos como en los equis negativos.
Pero hay funciones que existen entre un valor y otro
es decir, no van a existir para todos los reales. Y el rango, como le dije
es evaluar en la función, el dominio y encontrar el codominio.
Podemos decir que son los valores de y para los cuales la función existe.
Para que luego de la aproximación conceptual, realicemos un ejercicio.
$f(x) = \frac{1}{x+1}$
El dominio de una función racional, son todos los números reales
excepto aquellos valores que anulan el denominador.
Entonces, decir que son aquellos valores que anulan el denominador
implica encontrar los valores que hacen que en esa función racional
aparezca un cero, acá en el denominador.
Entonces, la forma más práctica de entender el dominio de la función que
son los valores para los cuales existe, sacando pues aquellos en los que
aparezca el cero, es coger la expresión o polinomio que está en el
denominador, igualarla a cero y despejar.
Entonces cuando yo, por ejemplo, digo: $x + 1 = 0$,
estoy automáticamente intentando encontrar un valor
para el cual esto da cero.
Entonces yo despejo:
$x + 1 = 0, x = -1$
Uno está sumando, lo pasamos a restar, ¿entonces queda equis igual a que?

Figura 5. *Episodio S1Ep2 – Parte 1 (Carabali, 2022).*

Estudiante 1:

30 Cero.

William:

31 Entonces queda aparecería un cero aquí, que anularía la función.
32 Entonces, ya con esto, yo puedo decir que, el dominio de esa función son
33 todos los reales, menos, menos 1 o excepto menos 1.
34 Esa función va a tener valores reales que existan para cualquier valor desde
35 menos infinito, hasta infinito positivo,
36 ¿Pero no puede ser? menos, menos 1.
37 En ese punto, ahí hay un salto en la función.
38 Para encontrar el dominio de la función tengo que coger el denominador,
39 igualarlo a cero, y despejar. Si el polinomio es de segundo grado,
40 tengo que factorizarlo, e igualar a cero.

Figura 6. *Episodio S1Ep2 – Parte 2 (Carabali, 2022).*

En **S1Ep2**, se observa que William conoce la definición de dominio y rango de una función (KoT). Esto se evidencia en las líneas 1, 2, 3 y 4, donde William proporciona la definición a sus estudiantes. Asimismo, en las líneas 20, 21, 22 y 23, William destaca que, para determinar el dominio de una función racional, $f(x)$, es fundamental encontrar los ceros del polinomio en el denominador. Por lo tanto, podemos concluir que ***William comprende que, para determinar el dominio de una función racional, es necesario utilizar un procedimiento o algoritmo que permita identificar los ceros del polinomio en el denominador (KoT).***

Asimismo, en **S1Ep2**, observamos que ***William comprende la utilidad del ejemplo para facilitar la comprensión del proceso de determinar el dominio de una función racional (KMT)***. Esto se manifiesta en las líneas 13 y 14, donde propone a sus estudiantes hallar el dominio de una función racional y, en las líneas 24, 25, 26 y 27, identifica el valor que hace indefinida la función. Posteriormente, en las líneas 32 y 33, establece, en términos matemáticos, el dominio de la función.

En línea con lo anterior, William propone a sus estudiantes un segundo ejercicio, quizás algo más complejo que el anterior, con el propósito de reforzar y subrayar la importancia de igualar el denominador de la función racional a cero para determinar el dominio. La evidencia continúa en **S1Ep3**:

William:		
	1	Hagamos el siguiente ejemplo muchachos
	2	Tengamos la función $g(x) = \frac{2+x}{3x-5}$
	3	Para encontrar el dominio de la función
	4	lo primero que nos toca hacer es igualar a cero el polinomio
	5	del denominador
	6	Entonces nos va a quedar que $3x - 5 = 0$
	7	Ahora, despejamos y encontramos el valor de x, nos va a quedar que
	8	El cinco que esta restando, lo pasamos a sumar $3x = 5$
	9	Luego tres está multiplicando a la x, ¿qué hacemos?
Estudiante 2:		
	10	¡Lo pasamos a dividir!
William:		
	11	Entonces el resultado es equis igual a cinco tercios: $x = \frac{5}{3}$
	12	Ya después decimos que el dominio de la función $f(x)$
	13	es todos los reales menos el número que indetermina la función.
	14	Es decir $x = \frac{5}{3}$.

Figura 7. *Episodio S1Ep3 (Carabali, 2022).*

En ese orden de ideas, podemos afirmar que, de los episodios de clase, ***S1Ep2*** y ***S1Ep3***, obtuvimos los siguientes resultados (Carabali, 2022):

Resultados	• **KoT:** *Conoce una definición de dominio y rango de una función racional.* • **KoT:** *Sabe un procedimiento o algoritmo para determinar el dominio de una función racional.* • **KMT:** *Entiende la utilidad del ejemplo para facilitar la comprensión sobre cómo determinar el dominio de una función racional.* • **KFLM:** *Reconoce que una posible dificultad para sus estudiantes al encontrar el dominio de una función racional es identificar los ceros del polinomio en el denominador.*

c. En cuanto a las concepciones manifestadas por William al impartir:

- **Respecto a la Concepción de Enseñanza**

En la práctica de William, ***la actividad en el aula se caracteriza por la repetición constante de ejercicios (TR1)***. William expone el contenido matemático a sus estudiantes y luego les proporciona ejercicios para que reproduzcan lo que han aprendido. Esta evidencia se encuentra en los episodios de clase 2 y 3 de la sesión 1 (S1Ep2 y S1Ep3).

Al observar estos episodios, se notamos ***que William presenta el contenido a sus estudiantes en su forma final, utilizando estrategias expositivas (TR2)***. Durante su enseñanza, William utiliza un enfoque magistral, añadiendo un par de preguntas sobre el procedimiento a sus estudiantes para captar su atención.

Resultado	
Concepción sobre la enseñanza.	William adopta una **tendencia tradicional** en su práctica de enseñanza, ya que la actividad en el aula **se centra en la repetición constante de ejercicios** y **el contenido se presenta en su forma final**, apoyado en estrategias expositivas.

- **Respecto a la Concepción de Aprendizaje**

La información obtenida en las entrevistas sobre el tema 3 (E1P10 y E1P11), Concepción de Aprendizaje, revela que ***William considera que los objetos de aprendizaje no solo poseen significado, sino también la capacidad de ser aplicados en contextos distintos al original, adquiriendo así un carácter móvil dentro de una red conceptual*** **(I8)**. Además, William sostiene que un estudiante ha aprendido cuando puede extraer y aplicar el nuevo conocimiento en un contexto que trasciende lo meramente matemático (Carabali, 2022).

Según su percepción, ¿qué es aprender? y ¿Cómo se gesta el aprendizaje matemático en los estudiantes?	Podría decir que aprender es asociar un conocimiento que no tenías o, bien, un conocimiento que considerabas correcto, y luego te das cuenta que es erróneo, o que no te funciona. Aprender es adquirir un conocimiento y asociarlo a algo que antes no tenías. Yo creo que el aprendizaje matemático se gesta con las situaciones particulares, como los gustos, las actividades que les resultan interesantes o los motivas. Cuando les presentas una situación o algo que pueda resolver, eso que le motiva, y lo resuelve con lo que uno le enseña, ahí se está gestando el aprendizaje. Cuando le encuentra utilidad.

Figura 8. *Entrevista 1 Pregunta 10 E1P10 (Carabali, 2022).*

¿Cómo y cuándo es posible saber que un estudiante aprendió lo impartido en clase?	Cuando lo saca del contexto meramente matemático y lo puede poner en práctica en diferentes situaciones. Cuando pasa eso, ya me doy cuenta. Porque si puede llevarlo a otras situaciones distintas de las meramente escolares, o de las que se presenta comúnmente, ya lo aprendió.

Figura 9. *Entrevista 1 Pregunta 11 E1P11 (Carabali, 2022).*

Por otro lado, al preguntarle a William cómo definiría una oportunidad de aprendizaje, él señala que es fundamental establecer analogías entre el contenido a enseñar y experiencias que los estudiantes puedan vivir (E2P4). Esta respuesta reafirma la concepción de aprendizaje que expresa tener.

¿Usted cómo definiría una oportunidad de aprendizaje?	Cuando se capta la motivación del estudiante, no entrar directamente en el tema sino iniciar con un contexto, me ayudo hablándoles un poco acerca de las creencias que hay en las matemáticas relacionadas con los temas que a ellos les interesa así logro enseñarles cómo las creencias matemáticas se van desarrollando a partir de las experiencias previas. Otra oportunidad es relacionar el tema con experiencias vividas. También el hecho de cambiar el hecho de evaluar (no mencionar la palabra examen) es importante. Independiente de como sea el grupo es importante verlos como seres humanos antes que como estudiantes.

Figura 10. *Entrevista 2 Pregunta 4 E2P4 (Carabali, 2022).*

Resultado	
Concepción sobre el aprendizaje	William adopta una **tendencia investigativa** en el aprendizaje de las matemáticas.

- **Tipos y formas-procesos de Aprendizaje**

En cuanto al proceso de aprendizaje, la evidencia muestra que ***William considera que, aunque el aprendizaje puede iniciarse mediante la observación de un proceso inductivo, el aprendizaje verdadero debe fundamentarse en un proceso deductivo (TE9).*** Además, ***cree que el estudiante adquiere conocimiento simplemente porque el docente lo presenta (TR10).***

Al analizar la práctica de William (S1EP2), observamos que, en ambas clases, William utiliza un enfoque lógico-deductivo, donde primero presenta una regla general y luego plantea ejercicios para que sus estudiantes reproduzcan lo enseñado. De esta manera, los estudiantes deben asimilar los conocimientos presentados por William y aplicarlos de forma repetitiva.

Por ejemplo, William propone un ejercicio en el que sus estudiantes deben encontrar el dominio de una función racional. En este ejercicio, William establece que, en primer lugar, es necesario identificar el polinomio en el denominador; en segundo lugar, igualarlo a cero; y, finalmente, factorizarlo. Posteriormente, en **S1Ep3**, propone un ejercicio similar para que los estudiantes repliquen el proceso aplicado en el ejercicio anterior.

William:

11 $f(x) = \frac{1}{x+1}$

12 El dominio de una función racional, son todos los números reales, excepto aquellos valores que anulan el denominador.

13 Entonces, decir que son aquellos valores que anulan el denominador, implica encontrar los valores que hacen que en esa función racional, aparezca un cero, acá en el denominador.

14 Entonces, la forma más práctica de entender el dominio de la función que son los valores para los cuales existe, sacando pues aquellos en los que aparezca el cero, es coger la expresión o polinomio que está en el denominador, igualarla a cero y despejar.

15 Entonces cuando yo, por ejemplo, digo: $x + 1 = 0$, estoy automáticamente intentando encontrar un valor para el cual esto da cero.

16 Entonces yo despejo:

17 $x + 1 = 0, x = -1$.

Figura 11. *Fragmento del Episodio S2Ep2 (Carabali, 2022).*

Resultado	
Concepción sobre los tipos y formas-procesos de aprendizaje	William adopta una **tendencia tecnológica** respecto a los tipos y procesos de aprendizaje de la función racional, ya que considera que **el verdadero aprendizaje se produce a través de un proceso deductivo**, en el cual los estudiantes aprenden principalmente al observar su método de enseñanza.

De esta manera, en la Figura 12, se presenta un balance respecto a las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje que se identificaron en William al analizar las sesiones de clase y las entrevistas semiestructuradas aplicadas:

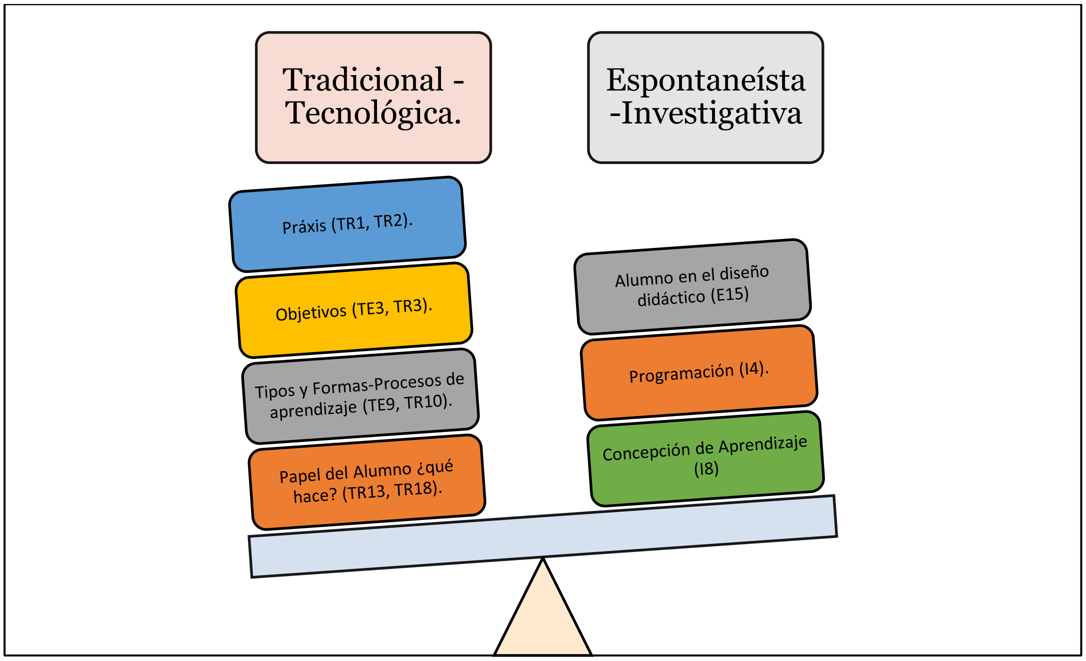


Figura 12. Concepciones de William sobre la Enseñanza-Aprendizaje de la Función Racional.

Este balance nos permite inferir que, en las concepciones de William sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional, existe una inclinación hacia las tendencias tradicional y tecnológica expuestas en el instrumento CEAM. En consecuencia, la relación entre los subdominios de conocimiento especializado y las acciones de William al impartir se ven matizadas por las concepciones manifestadas.

4.1. Relación entre el conocimiento matemático de William y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

William, durante su práctica de enseñanza, manifesta conocimientos matemáticos acerca de la definición de función racional **(KoT1)**, sus representaciones **(KoT2)** y procedimientos para encontrar sus asíntotas **(KoT4)** e interceptos con el eje coordenado. Asimismo, asoció este conocimiento con su conocimiento didáctico del contenido, y esto le permite anteceder a dificultades en el aprendizaje de sus estudiantes **(KFLM1),** y proponer diversos ejemplos **(KMT1)** para resaltar características y propiedades de la función racional.

A partir de la información recabada, identificamos que durante la práctica de enseñanza, la concepción evidenciada por William fue tradicional **(TR2)**, pues sus acciones consistieron en presentar el contenido de forma magistral y con poca participación de sus estudiantes. En concordancia, el rol del William consiste en organizar y transmitir el contenido a sus estudiantes mediante estrategias expositivas **(TE20-TE23)**. Por otra parte, el papel de los alumnos durante el proceso de aprendizaje fue el de apuntar, constantemente, las explicaciones de William **(E20)**. Por ende, el rol de los alumnos sigue una tendencia tradicional.

Por su parte, otro resultado relevante refiere a las relaciones establecidas entre subdominios del conocimiento especializado y las concepciones evidenciadas por William durante su práctica. Por ejemplo, William conoce las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales en una función racional **(KPM1)**, este conocimiento se manifiesta a través de un ejemplo desarrollado en clase **(KMT1)**, donde la función racional es factorizable y reductible. La relación entre subdominios es entre el conocimiento matemático **(MK-KPM)** y el conocimiento didáctico del contenido **(PCK-KMT)**. Esta relación está matizada por la concepción de William sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función racional, pues para él enseñar consiste en exponer el contenido de forma magistral **(TR2)** y aprender se gesta a través de proceso deductivo **(TE9)**.

Otro caso similar, es referente a la gráfica de funciones racionales en el plano cartesiano. Esto se debe a que, William conoce una estrategia para graficar funciones racionales **(KPM2)** y lo manifiesta al dictar a sus estudiantes una guía de pasos para representar la función gráficamente. Sin embargo, William propuso a sus estudiantes construir la gráfica utilizando la herramienta Geogebra (**KMT2**). Por lo tanto, consideramos que se establece una relación entre el conocimiento de la práctica matemática y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas en relación con el contenido de la función racional.

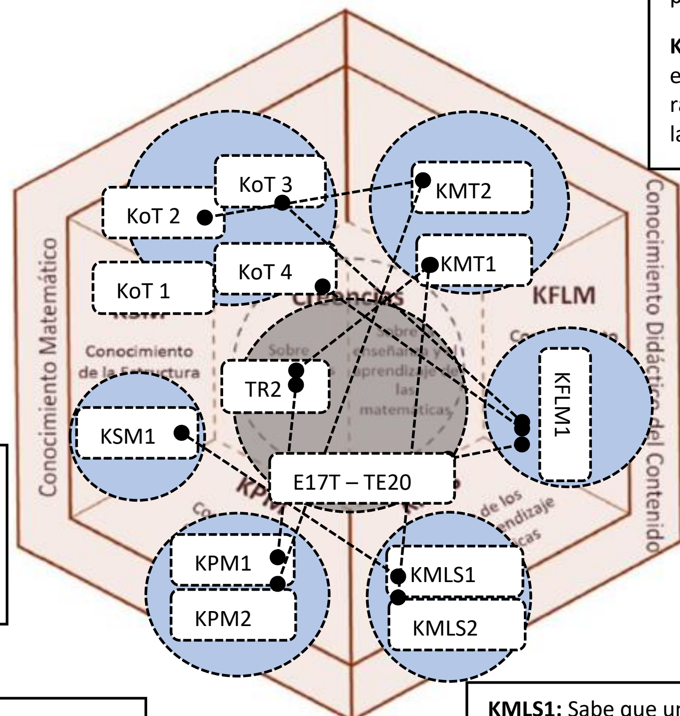
Además, encontramos indicios del conocimiento de la estructura matemática (**KSM**) de William y su comprensión de los estándares de aprendizaje (**KMLS**). En este sentido, William explica a sus estudiantes que las asíntotas horizontales de una función racional se pueden calcular mediante el concepto de límite (**KSM1**), y agrega que este es un resultado de aprendizaje esperado en cursos posteriores (**KMLS1**).

Finalmente, podemos afirmar que todos los ejemplos mencionados anteriormente reflejan las concepciones de William sobre qué y cómo se debe enseñar y aprender matemáticas, particularmente en relación con la función racional. A continuación, en la Figura 13, mostramos las relaciones entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.

Interacción entre el conocimiento matemático y las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje del profesor al impartir función racional

KMT1: Sabe que un ejemplo potente para determinar la existencia de asíntotas en una función racional es cuando ésta tiene polinomios p(x) y q(x) con factores comunes.

KMT2: Sabe que Geogebra es un recurso de enseñanza potente para modelar funciones racionales y exponer el carácter dinámico de la función y sus elementos.



KSM1: Sabe que una posible conexión entre la función racional y el concepto de límite es a través del cálculo de sus asíntotas horizontales.

KPM1: Conoce las condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia de asíntotas verticales de una función racional.

KPM2: Sabe que una estrategia para graficar funciones racionales es: primero, hallar los interceptos con los ejes x y y; segundo, determinar las asíntotas; tercero, mediante tabulación, graficar en el plano cartesiano

KFlM1: Sabe que una posible dificultad de sus estudiantes para encontrar el dominio de una función racional es determinar los ceros del polinomio del denominador.

KMLS1: Sabe que un resultado esperado de próximos cursos es que los estudiantes calculen las asíntotas de una función racional empleando límites.

KMLS2: Sabe la ubicación curricular y la secuenciación de los

Concepciones

Metodología de Enseñanza:

- TR2: La enseñanza consiste en presentar el contenido a los estudiantes en su fase final, apoyado en estrategias expositivas.

Objetivos:

- TE3: Al carácter terminal de los objetivos se le añade el carácter funcional.

Programación del contenido:

Concepción de aprendizaje:

- TE9, TE10: Se desarrolla a partir de un proceso inductivo, pero el proceso inductivo tiene mayor importancia. -El alumno se hace de los conocimientos por el simple hecho de que los presenta el profesor-.

Papel del estudiante:

- E17: Prevalece apuntar, constantemente, lo que escribe el profesor en la pizarra para aprender.

Papel del profesor:

Figura 13. *Relación entre el Conocimiento Especializado y las Concepciones de William sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional.*

5. Conclusiones

Las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son potentes moderadores del quehacer profesional docente (Rodríguez-Muñiz et al., 2022). En ese sentido, resaltamos la importancia de continuar indagando sobre la relación que tienen las concepciones y los conocimientos especializados del profesor (Aguilar-González et al., 2018; Vasco y Climent, 2018), pues permiten entender el porqué de sus acciones durante la práctica de enseñanza. Asimismo, resulta pertinente continuar investigando y caracterizando el impacto de esta relación en logro matemático de los estudiantes debido a que posibilita comprender el alcance de la práctica docente en el aula.

Los resultados permitieron identificar dos tipos de concepciones en el docente: una concepción ingenua y una dominante (Gascón 2001). Aunque el docente describe su enfoque como tecnológico y espontaneísta (CEAM), observamos que su práctica se rige por una concepción tradicional dominante, la cual orienta su metodología hacia una enseñanza rutinaria asumiendo el rol central. En cuanto al aprendizaje, el docente considera que este se da principalmente mediante la asimilación del contenido y la imitación de sus procedimientos, promoviendo una relación unidireccional en la que los estudiantes aprenden a través de sus estrategias magistrales y expositivas

A su vez, los hallazgos indican que la selección de metodologías, en la enseñanza de las matemáticas, está influenciada por las concepciones epistemológicas e instruccionales que el profesor tiene sobre el contenido que imparte (Carabali, 2022). En ese orden de ideas, este estudio confirma que la metodología empleada por el docente responde principalmente a sus concepciones dominantes, afectando directamente su *praxis*, *los objetivos planteados y la estructura de la programación en clase.* Estas concepciones también determinan las características del aprendizaje logrado por sus estudiantes (Montes et al., 2014).

En nuestra consideración, la metodología empleada en este estudio se muestra pertinente y útil, pues nos permitió identificar relaciones entre los subdominios del modelo MTSK y las concepciones CEAM, además de caracterizar el impacto de esta relación en el logro matemático de los estudiantes. En consecuencia, esta aproximación metodológica puede servir como herramienta para que el investigador comprenda, de forma efectiva, cómo se gesta la interacción entre estos elementos y su influencia en el quehacer profesional docente.

A modo de síntesis, consideramos importante destacar la importancia que tiene este tipo de estudios en la comprensión del quehacer profesional docente. Esto debido a que, el análisis realizado, permite conceptualizar cómo se gestan las relaciones entre los subdominios de conocimiento especializado, las concepciones, y prácticas de enseñanza del profesor de matemáticas, además del impacto que tiene esta relación en el logro matemático alcanzado por los estudiantes.

6. Agradecimientos

Proyecto PID2021-122180OB-I00 (Gobierno de España). Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

7. Referencias

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, *13(1)*, 41-61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Amaya, T., Pino-Fan, L., y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144. https://doi.org/10.24844/em2803.05

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, *8(2)*, 61-73. https://doi.org/10.30827/pna.v8i2.6117

Ball, D. Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Campbell, P., Nishio, M., Smith, T., Clark, L., Conant, D., Rust, A., DePiper, J., Frank, T. J., Griffin, M. J., y Choi, Y. (2014). The Relationship Between Teachers' Mathematical Content and Pedagogical Knowledge, Teachers' Perceptions, and Student Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, 45(4), 419-459. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0419

Campbell, P. F., y Malkus, N. N. (2011). The impact of elementary mathematics coaches on student achievement. *The Elementary School Journal*, *111*(3), 430-454. http://dx.doi.org/10.1086/657654

Carabali, H. (2022). *Impacto de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la función racional: un estudio de caso.* *http://dx.doi.org/10.48779/ricaxcan-245*

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.

Carrillo, J., y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación matemática*, *7* (03), 79-92.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (2013). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Universidad de Huelva Publicaciones*. http://dx.doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20(3),* 136-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. [Tesis Doctoral, Universidad de Michigan]. Repositorio Institucional de la Universidad de Michigan.

Dávalos, M. T., Vital, A. T., y Farfán García, M. del C. (2018). Creencias, propósitos y acciones sobre la enseñanza en docentes de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ). *Psicumex*, 8(1), 22–39. https://doi.org/10.36793/psicumex.v8i1.268

Delgado-Robello, R., y Espinoza-Vásques, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? *V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.*

Ernest, P. (1989). The knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A model. *Journal of education for teaching*, *15*(1), 13-33. https://doi.org/10.1080/0260747890150102

Fernández, R. (2019). *Análisis del proceso de enseñanza de las asíntotas a través de sus gráficas en bachillerato mediante flipped classroom*. [Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid]. Repositorio Institucional de la Universidad de Valladolid.

Flores, E., y Carrillo, J. (2014). Connecting a Mathematics Teacher's Conceptions and Specialised Knowledge through Her Practice. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 85-116.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129- 159

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Herrera, Y., y Muñoz, V. (2014). *Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática*. [Trabajo de Grado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional de la Universidad de la Universidad Pedagógica Nacional.

Mapolelo, D., y Akinsola, M. (2015). Preparation of mathematics teachers: lessons from review of literature on teachers' knowledge, beliefs, and teacher education. *International Journal of Educational Studies*, *2(1)*, 01-12.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., y Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43(5)*, 584-615. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0584

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J. L., Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 9-22.

Navarrete, E., Farfán García , M. del C., y Castillo De la Rosa , E. (2018). El docente de Educación Superior: su práctica analizada desde las creencias del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Psicumex*, 8(1), 54–66. https://doi.org/10.36793/psicumex.v8i1.270

Noreña, R. (2013). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional*. [Trabajo de Grado, Universidad del Valle]. Repositorio Institucional de la Universidad del Valle.

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.

Ponte, J.P. (1992). Concepçoes dos professores de matemática e processos de formaçao. *Educaçao Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovaçao Educacional.

Potari, D. (2019). Mathematics Teaching and its Development: Looking into Teacher Knowledge, Beliefs and Identity. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1*. Leiden, The Netherlands: Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418875_001

Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, Á., Lindorff, A., y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Undergraduates' conceptions of mathematics teaching and learning: an empirical study. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(3), 523-547. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10105-5

Romero, C. (2019). Análisis del concepto de función como relación funcional desde APOE. *Revista Electrónica Amiutem*. 7(1), 1-16.

Scorzo, R., Favieri, A., y Williner B. (2014). Análisis de una actividad sobre funciones racionales realizada con software matemático. *V Jornada de Educación Matemática y II Jornada de Investigación en Educación Matemática*.

Smith, P. S., y Esch, R. K. (2012). Identifying and measuring factors related to student learning: The promise and pitfalls of teacher instructional logs. In *annual meeting of the American Educational Research Association.*

Sosa, L. (2012). Conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Contribución teórica al conocimiento del contenido y estudiantes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25*, 1151-1159.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educ Stud Math*, *15***,** 105–127. https://doi.org/10.1007/BF00305892

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146).

Vasco, D. y Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *12(3)*, 129-146. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6454

Wilkins, J. L. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11(2)*, 139-164. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9068-2

Zakaryan, D., y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación MatEMática*, *33*(1). https://doi.org/10.24844/EM3301.03