

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

The CoorCar Intelligent Tutoring System as a Pedagogical Mediator for Learning the Cartesian Plane among Costa Rican Secondary School Students.

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Fabiola Delgado Navarro
fdelgado@uned.ac.cr
Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica

Armando Cuevas-Vallejo
ccuevas@cinvestav.mx
Departamento de Matemática
Educativa: Centro de
Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto
Politécnico Nacional
México

Recibido: 28 de mayo de 2024

Aceptado: 28 de junio de 2026

Autor de Correspondencia:

Cuevas Vallejo



Resumen: Este artículo analiza una secuencia didáctica mediada por el sistema tutorial inteligente **CoorCar**, perteneciente al entorno **GeomVisual**, para favorecer el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de octavo año de secundaria en Costa Rica. La investigación se fundamentó en la didáctica Cuevas-Pluinage y se desarrolló desde un enfoque de investigación de diseño, organizado en las fases de diseño, experimentación y análisis retrospectivo. La intervención incluyó un pretest, tres actividades didácticas y un postest, orientadas en ubicar y reconocer de puntos en el plano cartesiano, la distancia entre dos puntos, el punto medio y los puntos intermedios. Los resultados evidencian avances en reconocer puntos, coordenadas y ejes cartesianos, así como en ubicar puntos y comprender conceptos básicos de geometría analítica. También se identificaron retos vinculados con el manejo del software y en comprender en calcular los puntos intermedios. Se concluye que CoorCar favorece un aprendizaje más visual, activo y progresivo del plano cartesiano, al permitir la interacción, la exploración y la retroalimentación durante el proceso.

Palabras claves: geometría analítica, coorCar, sistema tutorial inteligente, plano cartesiano, educación matemática.

Abstract: This article analyzes a teaching sequence facilitated by the CoorCar intelligent tutoring system, part of the GeomVisual environment, designed to support the learning of the Cartesian plane among eighth-grade students in Costa Rica. The research was grounded in the Cuevas-Pluinage pedagogical approach and was conducted using a design-based research methodology, organized into the phases of design, experimentation, and retrospective analysis. The intervention included a pretest, three instructional activities, and a posttest, focused on locating and identifying points on the Cartesian plane, the distance between two points, the midpoint, and intermediate points. The results show progress in recognizing points, coordinates, and Cartesian axes, as well as in locating points and understanding basic concepts of analytic geometry. Challenges were also identified related to using the software and understanding how to calculate intermediate points. It is concluded that CoorCar promotes a more visual, active, and progressive learning of the Cartesian plane by allowing for interaction, exploration, and feedback during the process.

Keywords: analytic geometry, CoorCar, intelligent tutorial system, Cartesian plane, mathematics education.

1. Introducción

El aprendizaje del plano cartesiano constituye una base esencial para el desarrollo de conocimientos posteriores en matemática, particularmente en los contenidos de funciones, gráficas, geometría analítica y cálculo. Aunque en la educación secundaria este contenido suele abordarse como un tema inicial, su comprensión exige que el estudiantado coordine distintas representaciones: gráfica, numérica, simbólica y verbal. Esta articulación no siempre resulta sencilla, pues ubicar puntos en el plano cartesiano, reconocer los ejes cartesianos, interpretar pares ordenados y establecer relaciones entre coordenadas son procesos que requieren más que la aplicación mecánica de procedimientos.

En el contexto costarricense, los Programas de Estudio de Matemáticas proponen una enseñanza orientada al desarrollo de procesos como razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar ideas matemáticas, representar de diversas formas y comunicar el pensamiento matemático (MEP, 2012). Esta orientación curricular permite comprender que el aprendizaje del plano cartesiano no debe reducirse a la repetición de ejercicios, sino que requiere experiencias didácticas donde el estudiante explore, represente, compare, se equivoque y reconstruya progresivamente sus conocimientos.

No obstante, fortalecer estos aprendizajes continúa siendo un desafío para el sistema educativo nacional. El *Noveno Estado de la Educación* advierte que Costa Rica enfrenta una crisis educativa asociada con deterioros en los aprendizajes y con debilidades acumuladas en la trayectoria escolar del estudiantado, situación que vuelve urgente fortalecer las bases conceptuales desde la educación secundaria (Programa Estado de la Nación, 2023). En este escenario, contenidos como el plano cartesiano adquieren especial relevancia, debido a que funcionan como puente entre la geometría, el álgebra y el estudio de funciones.

Frente a estas necesidades, las tecnologías digitales ofrecen oportunidades para enriquecer la enseñanza de la matemática, siempre que se integren con sentido pedagógico. La UNESCO (2023) señala que el uso de tecnología en educación debe valorarse desde criterios de pertinencia, equidad, escalabilidad y sostenibilidad, por lo que su incorporación no puede depender únicamente de la disponibilidad de recursos, sino de su aporte real al aprendizaje.

Desde este aspecto, la tecnología no sustituye la mediación docente; más bien, puede ampliar las posibilidades de visualización, interacción, retroalimentación y participación estudiantil.

De acuerdo con Valdespino (2017), los estudiantes presentan graves deficiencias en el tema de plano cartesiano. Entre ellas, se encuentran la falta de comprensión de conceptos como los cuadrantes, las abscisas, las ordenadas, el punto en el origen, los sistemas de coordenadas, las características de los puntos que se ubican sobre el eje horizontal y vertical, las regularidades de las coordenadas de los puntos y la reproducción de figuras planas con información de las coordenadas. Estas deficiencias pueden limitar el aprendizaje de conceptos más avanzados relacionados con la geometría y el análisis matemático, por lo que es importante que se aborden a través de estrategias educativas efectivas. Es fundamental desarrollar propuestas de enseñanza para abordar los temas básicos del plano cartesiano, como reconocer los ejes, ubicar puntos y comprender el eje de las abscisas y las ordenadas, ya que estos son conceptos fundamentales en la geometría analítica. Los estudiantes de secundaria a menudo enfrentan dificultades para entender estos temas, por lo que es crucial diseñar estrategias educativas que les permitan comprender y aplicar estos conceptos de manera efectiva. Con una enseñanza clara y estructurada, el uso de materiales didácticos y tecnología, actividades en grupo y retroalimentación constante, los estudiantes podrían mejorar significativamente su comprensión de la geometría analítica y el plano cartesiano, lo cual es fundamental para su formación académica y personal.

Por otro lado, Andrade (2024), en una revisión sistemática sobre nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, plantea que estos recursos pueden favorecer los procesos de aprendizaje cuando se seleccionan adecuadamente y se articulan con objetivos didácticos claros. Esto resulta particularmente importante en geometría, donde la visualización y la interacción con objetos matemáticos pueden facilitar la comprensión del tema.

Además, se pretende que el sistema tutorial inteligente **CoorCar** se presente como una alternativa para apoyar el aprendizaje inicial de la geometría analítica. Su valor didáctico radica en que no funciona como un programa que resuelve automáticamente los ejercicios, sino como un entorno que guía al estudiante mediante actividades, interacción y retroalimentación. De esta manera, permite trabajar conceptos como ubicar puntos en el plano cartesiano, distancia entre dos puntos, punto medio y punto intermedio desde una experiencia más visual, activa y progresiva.

Debido a lo anterior, se concluye que los estudiantes de secundaria presentan dificultades para identificar el plano cartesiano, los ejes (ordenadas y abscisas), ubicar puntos en el plano cartesiano, determinar la distancia entre dos puntos y encontrar el punto medio de un segmento, por tanto, el artículo tiene como propósito analizar la implementación de una secuencia de aprendizaje mediado con la tecnología digital por medio del sistema tutorial inteligente "CoorCar", que busca contribuir al aprendizaje de los estudiantes costarricenses de 8° nivel (12-14 años) acerca de los conceptos de: plano cartesiano, distancia entre dos puntos, punto medio y puntos intermedios.

2. Marco teórico

La didáctica Cuevas-Pluinage constituye uno de los fundamentos centrales de esta investigación, ya que propone una enseñanza matemática basada en la acción del estudiante, la resolución de problemas y la construcción progresiva de los conceptos. Desde esta perspectiva, el aprendizaje no se entiende como una simple recepción de información, sino como un proceso en el cual el estudiante interactúa con situaciones matemáticas, formula respuestas, identifica errores y reconstruye sus procedimientos.

Cuevas y Pluinage (2003) proponen un enfoque didáctico diferente, basado en proyectos de acción práctica, con el fin de desarrollar actividades que promuevan un aprendizaje significativo de las matemáticas. Entre los aspectos más destacados de su propuesta se incluyen:

- La necesidad de que los estudiantes estén constantemente involucrados en alguna acción, como la resolución activa de problemas matemáticos.
- La descomposición de problemas complejos en actividades más simples y manejables.
- La promoción de la conversión entre diferentes formas de representación matemática.
- La presentación de problemas tanto directos como inversos para fomentar una comprensión más profunda de los conceptos.

El sistema tutorial inteligente CoorCar, requiere la interacción activa de los estudiantes para funcionar y proporciona retroalimentación inmediata después de cada respuesta. Esta retroalimentación se divide en dos fases: una corrección de la sintaxis, que evalúa la precisión de la forma en que se presenta la solución, y una revisión semántica, que verifica la exactitud del contenido de la respuesta en sí. Por ejemplo, si se solicita a un estudiante que escriba las coordenadas de un punto en el plano y omite la coma que separa las coordenadas, el sistema le

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

pedirá al estudiante que corrija su respuesta utilizando su propio editor. Este enfoque de retroalimentación segmentada facilita un proceso más detallado y efectivo para corregir y mejorar las respuestas de los estudiantes.

Este enfoque se fundamenta en la noción de que el aprendizaje no se limita a la mera absorción de información, sino que implica un proceso activo en el cual los estudiantes construyen su propio entendimiento a través de la reflexión y la experiencia. Por consiguiente, mediante la utilización del sistema CoorCar y el enfoque de Cuevas-Pluvinage, se busca impartir enseñanza de manera atractiva y dinámica, abordando conceptos tales como la ubicación de puntos en el plano cartesiano, la determinación de la distancia entre dos puntos, el cálculo del punto medio y del punto intermedio, entre otros.

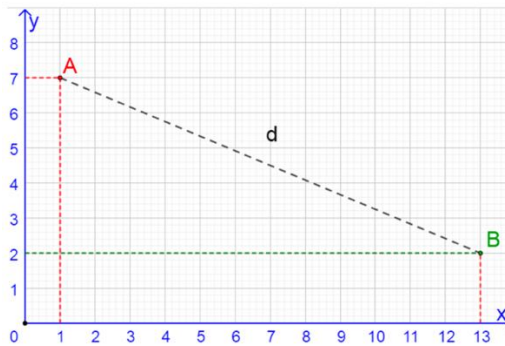
Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo, mediante la resolución de un determinado problema es necesario descomponer o dividir este problema en subproblemas que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requiere para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, mediante ejercicios, gradualmente dosificados, que nos lleve en forma 25 coordinada y coherente a la consecución de la meta (Cuevas y Pluvinage, 2003, p. 56).

Ejemplo

El problema consiste en calcular las coordenadas de un supermercado, conociendo que es un punto que deberá estar a la misma distancia de la iglesia y de la escuela que está en el mismo segmento.

Par ordenado de la Iglesia	Par ordenado de la Escuela	Par ordenado del Supermercado	El otro punto
(10,-2)	(15,12)	(10,8)	(15,6)

Considere la siguiente figura en la que se representan, dos puntos A y B en el plano cartesiano.



1. Escriba las coordenadas del punto A. _____
2. Escriba las coordenadas del punto B. _____
3. ¿Cuál es el punto medio del \overline{AB} ? _____

Por ejemplo, para llegar a calcular un punto intermedio de un segmento, se inicia reconociendo lo que son las coordenadas cartesianas en un plano después de calcular de manera sencilla puntos medios de segmentos en los ejes, posteriormente se calculan los puntos medios de segmentos en el plano y finalmente se calculan los puntos intermedios. “Cada vez que se planteen ejercicios que representan las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada.” (Cuevas y Pluinage, 2003, p.55)

Directo

Determine el punto medio de los siguientes puntos.

Puntos		Punto Medio	
P1	P2	Abscisa	Ordenada
(2,1)	(-3,2)	$xm=$	$ym=$
(-3,4)	(3,-4)		

Inverso

Determine el otro extremo del segmento dado el punto medio.

Punto Medio	P1	P2
(8,7)	(1,2)	(15,12)

Directo

Determine la distancia entre los dos puntos de los siguientes pares ordenados.

P1	P2	Distancia entre los dos puntos
(2,-1)	(4,0)	
(1,2)	(-2,-1)	

Inverso

Dada la distancia y un punto, calcule el otro punto que determina la distancia dada.

Distancia entre dos puntos	P1	P2
5	(4,6)	

Elaborar los problemas de acuerdo con el nivel que curso los estudiantes; es decir, que la dificultad de los problemas no sobre pase el contenido del grado para no desanimarlo y que el problema se pueda resolver de diversas maneras.

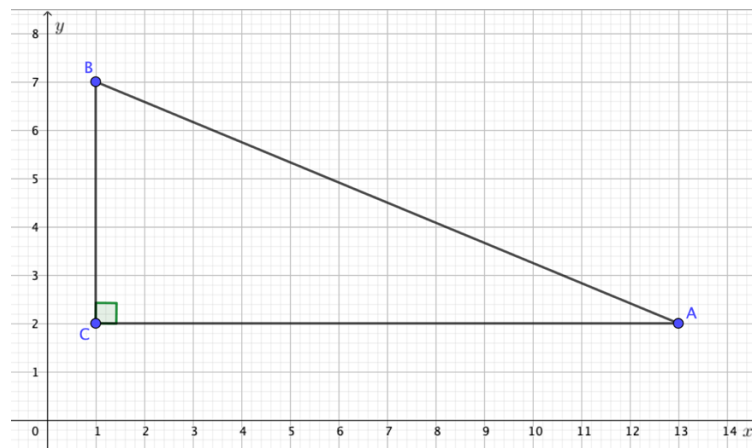
Al momento que el estudiante está resolviendo el problema, darle una ayuda mínima, ni indicaciones directas que les permita resolver el ejercicio, si no, que el estudiante descubra el problema por sí mismo.

En cada problema que tenga la enseñanza de un concepto matemático plantear actividades en los diferentes tipos de representación.

“Es necesario establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo. Proponer problemas en donde el concepto enseñado sea parte de la estructura con la que el alumno debe de analizar y resolver el problema planteado” (Cuevas y Pluvintage, 2003, p.56)

Ejemplo

Considere la siguiente figura en la que se representan, dos puntos A y B en el plano cartesiano.



- Escriba las coordenadas del punto A. _____
 - Escriba las coordenadas del punto B. _____
 - ¿Cuál es la distancia del punto B al punto C? $d1=$ _____
 - ¿Cuál es la distancia del punto C al punto A? $d2=$ _____
- Al segmento recto determinado por los puntos A y B, se le llama hipotenusa del triángulo recto formado por los puntos A, B y C.
- ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa? $d3=$ _____

2.1 Sistema Tutorial Inteligente Coor Car

Cuevas y Pluinage (2009) reportaron en su investigación la comparación de dos grupos del curso Cálculo I. En uno de los grupos, conformado por estudiantes de la carrera de ingeniería informática administrativa donde se utilizó el CalcVisual en el curso de Cálculo I por primera vez, mientras que, en el otro grupo, conformado por estudiantes de Ingeniería en Computación (ICO) de la misma universidad, se implementó la clase de manera tradicional con otro profesor. Los resultados fueron satisfactorios para los investigadores, ya que el índice de reprobación para el grupo que utilizó CalcVisual fue del 25%, mientras que para el grupo que tuvo una clase tradicional fue del 80%. Asimismo, los autores mencionan que el uso de las herramientas del CalcVisual facilita la actividad de factorización algebraica mediante las herramientas que el software presenta.

La perspectiva planteada por Cuevas y Hernández (2023) resalta la importancia que una plataforma “no pretende ser un sustituto del profesor, por el contrario, se espera sea un aliado, en donde el docente puede delegar muchas de las tareas más rutinarias de su ejercicio y destinar sus clases a ser más reflexivas y aplicadas a situaciones reales” (p. 31).

Al confiar las tareas rutinarias a las plataformas, los profesores pueden dedicar su tiempo y energía a aspectos más críticos de la enseñanza, como el diseño de experiencias significativas de aprendizaje y la orientación personalizada de los estudiantes.

Les da la oportunidad de crear un ambiente de aprendizaje más interactivo y centrado en el estudiante, promoviendo la exploración, la colaboración y la resolución de problemas. El empleo de plataformas tecnológicas también puede mejorar la enseñanza al brindar acceso a diversos recursos y herramientas multimedia, lo que hace más dinámica y atractiva la presentación de conceptos. Los docentes pueden usar estas herramientas para variar sus métodos de enseñanza y ajustarlos a distintos estilos de aprendizaje, fomentando la participación y el compromiso de los estudiantes.

2.1.1 Sistema Tutorial Inteligente de Geometría Visual (Coordenadas Cartesianas-CoorCar)

El sistema tutorial inteligente **CoorCar** forma parte del entorno **GeomVisual**. GeomVisual constituye el sistema general orientado a la enseñanza y el aprendizaje de contenidos de geometría analítica, mientras que CoorCar corresponde al módulo específico de coordenadas cartesianas.

GeomVisual se entiende como un entorno tecnológico general orientado al apoyo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica. En dicho entorno se integra CoorCar, un módulo diseñado específicamente para el estudio de las coordenadas cartesianas. Este recurso permite trabajar contenidos vinculados con el plano cartesiano, tales como la localización de puntos, el reconocimiento de coordenadas, el cálculo de la distancia entre dos puntos, el punto medio y los puntos intermedios. A diferencia de un programa que proporciona respuestas de forma automática, CoorCar acompaña al estudiante durante la resolución de las actividades, promueve la interacción con los conceptos y ofrece retroalimentación según las respuestas dadas. Por ello, en esta investigación se considera una herramienta de mediación tecnológica que contribuye a un aprendizaje más visual, activo y progresivo del plano cartesiano. Por ello, en esta investigación CoorCar se utiliza como una herramienta de mediación tecnológica que favorece una enseñanza más activa, visual e interactiva del plano cartesiano. El diseño del software CoorCar está pensado para permitir que el estudiante interactúe de forma individual con el apoyo de la computadora. El estudiante responde a las preguntas formuladas por el software y recibe retroalimentación inmediata sobre la corrección de sus respuestas. De esta manera, los estudiantes participan activamente en el proceso de aprendizaje, ya que el software requiere de su colaboración para funcionar.

3. Metodología

Esta metodología se conforma por tres fases: el diseño, la experimentación y un análisis retrospectivo. Esta propuesta será del tipo: estudio de diseño de aula, y aunque la naturaleza iterativa de esta metodología es un aspecto vital, en esta investigación presentamos un solo ciclo.

3.1 Fases del estudio

3.1.1 Fase de Diseño

Se seleccionó un grupo de estudiantes de colegio cuyo contenido temático tuviera la enseñanza del plano y coordenadas cartesianas. Se solicitó un laboratorio de cómputo donde llevar a cabo la experiencia didáctica. Del programa se eligieron cinco sesiones en las que se llevaría a cabo. Se elabora el pretest para conocer las deficiencias de los estudiantes en el contenido y luego, en la primera sesión se realizaría la instalación en cada computadora del sistema inteligente CoorCar, y se explicaría su manejo.

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

Posteriormente, se redactan las hojas de exploración y aprendizaje guiado, además, se decidió que el profesor durante las sesiones con el sistema CoorCar, solo actuaría como testigo, respondiendo solo a preguntas de manejo y dejando a los estudiantes el aprendizaje de forma autónoma y colaborativa puesto que se permitiría el intercambio de preguntas entre ellos. Para finalizar, se aplicaría un postest para evaluar el aprendizaje que obtuvieron los estudiantes a través de la aplicación de las tres actividades, con la ayuda del CoorCar. Este postest permitiría medir de manera integral la comprensión y asimilación de los conceptos abordados durante el uso de la herramienta.

3.1.2 Fase de Experimentación

La investigación se desarrolló con la participación inicial de 16 estudiantes de octavo año de secundaria en Costa Rica. Durante el año 2022, se seleccionaron los datos correspondientes a 10 estudiantes, quienes completaron la totalidad de las actividades propuestas. Las personas participantes tenían edades comprendidas entre los 12 y 14 años.

Se desarrollaron una serie de actividades para enseñar el tópico de coordenadas cartesianas de geometría analítica utilizando el sistema tutorial inteligente CoorCar. Para formular las actividades se utilizó la didáctica de Cuevas-Pluinage (2003). Dentro de este tema se cubrieron los puntos del programa de estudios: ubicación de puntos en el plano cartesiano; distancia entre dos puntos; punto medio y puntos intermedios. Las actividades didácticas, se llevaron a cabo durante cinco sesiones de trabajo presenciales con el grupo de estudiantes donde se les aplicó un pretest, 3 guías y por último el postest.

3.2 Sesiones de la investigación

3.2.1 Sesión 1. Pretest

El Pretest contempló contenidos necesarios para el abordar el tema de plano cartesiano y la geometría analítica básica. En esa hoja de exploración se incluyeron ejercicios relacionados con operaciones con fracciones, reconocimiento de rectas paralelas y perpendiculares, reconocer los ejes cartesianos, ubicar puntos en el plano cartesiano y reconocer puntos a partir de sus coordenadas. La finalidad de este diagnóstico fue identificar los conocimientos previos del estudiantado y determinar posibles dificultades antes de desarrollar las actividades didácticas mediadas por CoorCar. De esta manera, los resultados permitieron orientar la propuesta hacia

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

el fortalecimiento de habilidades básicas indispensables para trabajar contenidos posteriores, como la distancia entre dos puntos, el punto medio y los puntos intermedios.

3.2.2 Sesión 2. Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

En esta actividad se trabajó el reconocimiento y la ubicación de puntos en el plano cartesiano como parte del proceso inicial para fortalecer la comprensión de las coordenadas cartesianas. Para ello, los estudiantes debían identificar correctamente los ejes del plano, diferenciar la abscisa y la ordenada, interpretar pares ordenados y ubicar puntos en la posición correspondiente. Esta actividad resultó importante porque permitió que el estudiantado relacionara la información numérica de las coordenadas con su representación gráfica en el plano.

Además, se incorporó una dinámica interactiva en la que los estudiantes debían mover un punto dentro del plano cartesiano para alcanzar un blanco ubicado de manera aleatoria. Esta tarea favoreció la manipulación directa de las coordenadas, ya que los estudiantes tenían que modificar los valores de la abscisa y la ordenada para observar cómo cambiaba la posición del punto. De esta forma, la actividad no se centró únicamente en repetir procedimientos, sino en promover la exploración, la observación y la relación entre los valores numéricos y el desplazamiento en el plano.

El uso de CoorCar en esta sesión permitió que los estudiantes interactuaran con el contenido de manera visual y progresiva. Al recibir retroalimentación durante el proceso, podían reconocer errores, corregir sus respuestas y reforzar la comprensión de los pares ordenados.

3.2.3 Sesión 3. Distancia entre dos puntos.

En la Sesión 3 se abordó el contenido de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano mediante el uso del sistema tutorial inteligente CoorCar. En esta actividad, los estudiantes trabajaron con la representación de puntos y segmentos en el plano, lo que les permitió visualizar la relación entre las coordenadas y la longitud del segmento que une dos puntos. Para apoyar el proceso de resolución, el sistema ofrecía herramientas como el menú de ayuda y la calculadora, recursos que facilitaron el desarrollo de los ejercicios y permitieron a los estudiantes verificar sus procedimientos.

La actividad no se limitó al cálculo directo de la distancia, sino que también propuso situaciones en las que los estudiantes debían trazar segmentos horizontales, verticales o diagonales, según

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

la ubicación de los puntos en el plano cartesiano. Además, se incluyeron ejercicios inversos, como determinar un punto a partir de una distancia dada y otro punto conocido. Este tipo de tareas favoreció la aplicación de conceptos de geometría analítica y promovió una comprensión más amplia del significado de la distancia en el plano.

De esta manera, la sesión permitió que el estudiantado utilizara CoorCar como un entorno interactivo para explorar, representar y calcular distancias entre puntos. La combinación entre la visualización gráfica, el uso de herramientas digitales y la resolución guiada contribuyó al fortalecimiento de habilidades relacionadas con la interpretación de coordenadas, el trazado de segmentos y el cálculo de distancias en diferentes situaciones del plano cartesiano.

3.2.4 Sesión 4. Punto medio y puntos intermedios.

En la sesión 4 se trabajó el contenido de **punto medio y punto intermedio de un segmento en el plano cartesiano** mediante el uso del sistema tutorial inteligente **CoorCar**. La actividad permitió que los estudiantes aplicaran sus conocimientos sobre coordenadas cartesianas para determinar el punto que divide un segmento en dos partes iguales, así como puntos ubicados en una razón determinada dentro del segmento. De esta manera, el estudiantado relacionó la representación gráfica del segmento con el procedimiento algebraico necesario para calcular dichos puntos. Una característica relevante de esta sesión fue la incorporación de ejercicios directos e inversos. En algunos casos, los estudiantes debían calcular el punto medio o el punto intermedio a partir de dos puntos dados; en otros, el sistema proporcionaba un punto medio o una razón, y los estudiantes debían proponer los extremos del segmento correspondiente. Este tipo de actividad resultó importante porque rompió con la resolución mecánica de ejercicios y exigió mayor análisis por parte del estudiantado. El uso de **CoorCar** favoreció la interacción con el contenido, ya que el sistema permitía proponer puntos, utilizar herramientas de apoyo y recibir orientación durante el proceso. Además, la posibilidad de visualizar los segmentos en el plano cartesiano ayudó a que los estudiantes comprendieran con mayor claridad la relación entre los puntos extremos, el punto medio y los puntos intermedios.

3.2.5 Sesión 5. Postest

Al finalizar las sesiones de trabajo, se aplicó un **postest** con el propósito de valorar los aprendizajes alcanzados por el estudiantado después de la implementación de la secuencia didáctica. Este instrumento permitió identificar el nivel de avance en relación con los contenidos abordados durante el proceso, tales como la ubicación de puntos en el plano cartesiano, el

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

reconocimiento de coordenadas, el cálculo de la distancia entre dos puntos, así como la determinación del punto medio y de puntos intermedios.

El postest estuvo conformado por preguntas, ejercicios y tareas vinculadas con las actividades desarrolladas previamente. Su aplicación permitió recopilar información sobre el desempeño de los estudiantes luego de interactuar con CoorCar y participar en las sesiones de aprendizaje. Asimismo, al contrastar estos resultados con los obtenidos en el diagnóstico inicial, fue posible analizar el progreso del estudiantado y valorar el impacto de la propuesta didáctica en la comprensión de conceptos básicos de geometría analítica.

4. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos con un grupo de 10 estudiantes que participaron en la aplicación de un pretest. Posteriormente, se desarrollaron tres actividades didácticas mediante el uso del Sistema Tutorial CoorCar, siguiendo una metodología fundamentada en la didáctica Cuevas-Pluinage. Finalmente, se aplicó un postest con el propósito de valorar el impacto de la intervención realizada.

4.1. Sesión 1

Durante el análisis del pretest, se observa que la mitad de los estudiantes no logran ubicar ni reconocer números racionales en la recta numérica. Además, presentan dificultades al sumar fracciones homogéneas y al simplificar fracciones. De manera similar, enfrentan desafíos al realizar sumas con fracciones heterogéneas.

En cuanto a los conceptos de geometría, se observa que la mitad de los estudiantes aún no reconoce un punto, una recta, semirrecta, segmento y un rayo. Aunque los 10 estudiantes reconocen las rectas paralelas, 2 de ellos aún confunden las rectas secantes y perpendiculares.

En relación con el plano cartesiano, solo 3 estudiantes identifican la numeración de cada cuadrante en dicho plano. Además, se evidencian dificultades al ubicar puntos en el plano cartesiano; no obstante, en el análisis se observa que la mayoría de los estudiantes logra ubicar al menos un punto de manera correcta en el plano cartesiano.

En la figura 1, se le proporciona 5 puntos ubicados en el plano cartesiano.

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

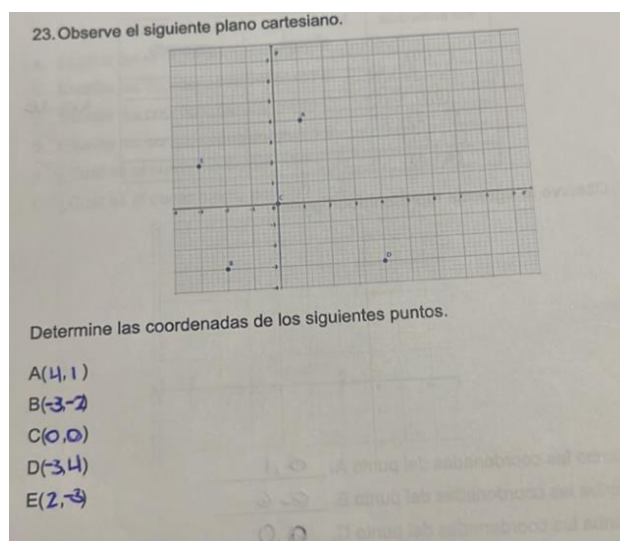


Figura 1: Reconocer puntos en el plano cartesiano.

4.2. Sesión 2

En esta sesión, cada uno de los estudiantes tenía instalado en sus computadoras el Sistema Inteligente CoorCar. Se les entregaron hojas de exploración impresas a todos los estudiantes que formaban parte de la aplicación. Este enfoque integrado facilitó una experiencia más completa y participativa, permitiendo a los estudiantes explorar y aplicar los conceptos de manera práctica con el apoyo del sistema y los materiales impresos proporcionados.

En la actividad #1, algunos estudiantes enfrentaron dificultades al intentar mover el origen del plano cartesiano, ya que no lograban encontrarlo. Asimismo, tuvieron problemas para ubicar números negativos en la recta, localizar la hoja cuadrículada y, en dos computadoras, se presentaron dificultades para escribir números decimales en el Sistema CoorCar, ya que no permitía ingresar el punto o la coma. Sin embargo, esto no representó una dificultad para el uso del CoorCar. Los estudiantes ubicaron de manera correcta los puntos en pares ordenados según lo indicado por el Sistema CoorCar.

Después del uso del CoorCar fueron capaces de generalizar e interpretar de forma adecuada la abscisa y la ordenada, así como de ubicar los puntos en el plano cartesiano.

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

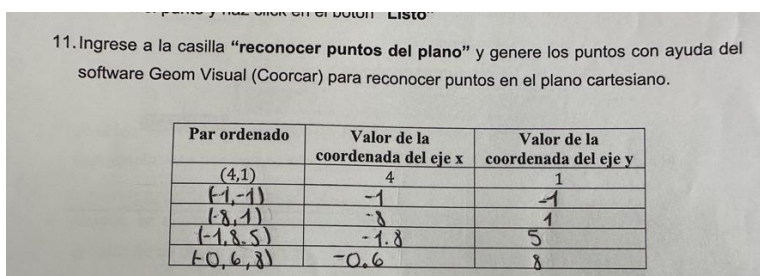


Figura 2: Reconocer los ejes cartesianos

En la figura 2 se observa los puntos que el CoorCar da a los estudiantes y como ellos reconocían la coordenada del par ordenado.

4.3. Sesión 3

En la actividad #2, se tardó más de lo esperado según la evaluación del investigador. Los estudiantes dedicaron dos sesiones de una hora y media cada una, aunque solo una estudiante tomó la totalidad del tiempo para completar su guía de exploración. Algunos estudiantes siguieron experimentaron problemas en sus computadoras con el Sistema CoorCar, ya que no pudieron ingresar un punto o una coma. A pesar de estos inconvenientes, al finalizar, los estudiantes lograron determinar y comprender correctamente la definición de distancia entre dos puntos, demostrando una comprensión sólida del concepto a pesar de las dificultades técnicas.

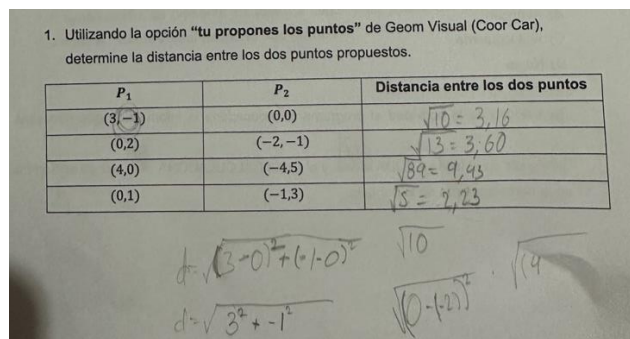


Figura 3: Calcular distancia entre dos puntos con el CoorCar.

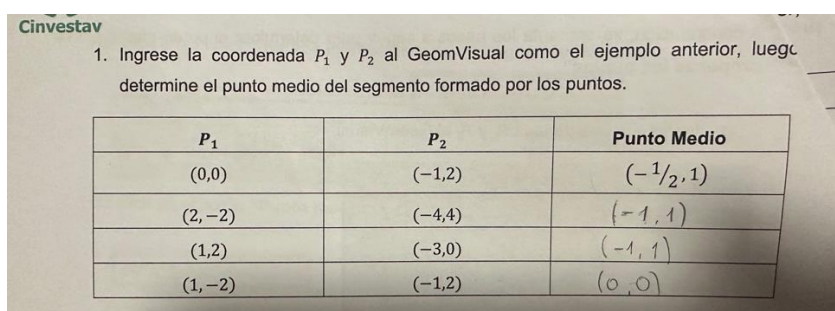
En esta actividad, los estudiantes se apoyaron en la fórmula de distancia entre dos puntos proporcionada por el Sistema CoorCar, accediendo a la opción "ayuda". Además, utilizaron sus calculadoras científicas para realizar los cálculos necesarios. Se observaron distintos enfoques en las representaciones: algunos estudiantes optaron por utilizar todos los decimales proporcionados por la calculadora, mientras que otros limitaron su respuesta a solo dos

decimales o calcularon primero la raíz cuadrada y luego proporcionaron una aproximación numérica.

4.4. Sesión 4

En la actividad #3, los estudiantes no conocen qué es el punto intermedio ni cómo determinarlo. Al igual que en la actividad #2, los estudiantes dedicaron dos sesiones de una hora cada una. Al finalizar la actividad, se observó un resultado positivo, ya que los estudiantes mostraron satisfacción al comprender la definición de punto medio y puntos intermedios de un segmento.

Los estudiantes utilizaron el Sistema CoorCar matemático para ingresar dos pares ordenados (ver figura 5) y calcular el punto medio de ellos, realizando la tarea de manera precisa y correcta.



Cinvestav

1. Ingrese la coordenada P_1 y P_2 al GeomVisual como el ejemplo anterior, luego determine el punto medio del segmento formado por los puntos.

P_1	P_2	Punto Medio
(0,0)	(-1,2)	$(-1/2, 1)$
(2,-2)	(-4,4)	$(-1, 1)$
(1,2)	(-3,0)	$(-1, 1)$
(1,-2)	(-1,2)	(0,0)

Figura 4: Punto medio con el CoorCar de Geom Visual

4.5 Sesión 5

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, logrando que los estudiantes comprendieran los temas de ubicación de puntos en el plano cartesiano, distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento. Todos los estudiantes respondieron correctamente al postest.

Se observó que, con la ayuda del Sistema CoorCar, pudieron responder de manera acertada las preguntas solicitadas, resaltando la eficacia de la herramienta en el refuerzo y aplicación de los conceptos aprendidos. También, se obtiene que los estudiantes logran reconocer los cuadrantes, así como los tipos de ejes de las ordenadas y abscisas al finalizar cada una de las actividades realizadas.

Los estudiantes reconocen los pares ordenados en el plano cartesiano y determinan distancias horizontales y verticales de manera correcta en la hoja de exploración ya que en el pretest no lograban hacerlo. Este logro refleja su habilidad para aplicar los conceptos aprendidos,

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

demostrando una comprensión sólida de la representación gráfica de datos en el contexto del plano cartesiano.

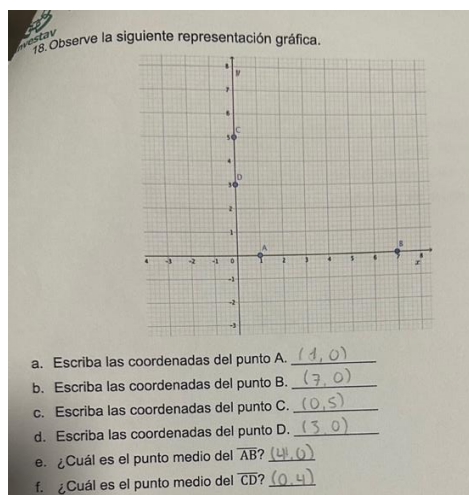


Figura 5: Puntos en el plano cartesiano y punto medio.

5. Conclusiones

La adopción de estrategias experimentales fue crucial para guiar el diseño y desarrollo de la propuesta didáctica. Estos experimentos proporcionaron datos tangibles y nos permitieron observar de primera mano los efectos de las estrategias educativas aplicadas. Al basarnos en los principios de la didáctica Cuevas-Pluinage, pudimos fundamentar las decisiones en la creación de actividades y recursos educativos. Durante la implementación de nuestra propuesta didáctica, creamos un entorno de aprendizaje dinámico y efectivo para los participantes de nuestra investigación. Observamos un aumento significativo en la participación, interacción y comprensión por parte de los estudiantes. Además, los entornos virtuales interactivos desempeñaron un papel clave en la promoción del aprendizaje activo y la exploración autónoma. A través del Sistema Tutorial CoorCar (Coordenadas cartesianas), los estudiantes pudieron sumergirse en el contenido y realizar actividades prácticas en un entorno seguro y controlado. Basándonos en el análisis de los resultados y en la observación directa de la experiencia, podemos concluir que la influencia del sistema tutorial CoorCar fue positiva. Este enfoque convirtió la enseñanza de las matemáticas en una experiencia experimental, donde los estudiantes tenían la libertad de explorar sus respuestas y recibir retroalimentación instantánea, así como asesoramiento detallado según sus errores u omisiones. Además, proporcionó un aprendizaje individualizado, permitiendo que cada estudiante asimilara los conceptos a su

propio ritmo y capacidad. En ocasiones, algunos estudiantes regresaban al sistema para repasar temas previos antes de abordar nuevos conceptos. Todo esto, junto con las discusiones grupales en clase que fomentaban el aprendizaje colaborativo, contribuyó al éxito de la experiencia.

Durante la intervención, se identificaron dificultades específicas entre los estudiantes en relación con el concepto de puntos intermedios. A pesar de recibir explicaciones claras y participar en actividades diseñadas para abordar este tema, algunos estudiantes aún enfrentaron dificultades para comprenderlo plenamente.

Estas dificultades podrían haber surgido por diversas razones. En primer lugar, el entendimiento de los puntos intermedios implica una comprensión sólida de conceptos previos como fracciones, razones, el plano cartesiano y la distancia entre dos puntos. Si los estudiantes no habían dominado completamente estos conceptos, podrían haber tenido dificultades para aplicarlos en la determinación de puntos intermedios.

Además, los puntos intermedios pueden presentar desafíos adicionales debido a su naturaleza abstracta. A diferencia de la ubicación de puntos específicos en el plano cartesiano, los puntos intermedios son puntos que pueden requerir un razonamiento más avanzado y abstracto.

Se evidencia que los estudiantes tienen un buen manejo del eje de las abscisas y las ordenadas, lo que indica una comprensión básica del sistema de coordenadas cartesianas. Este entendimiento es crucial para avanzar en habilidades más avanzadas en esta área.

No obstante, se detectaron algunas dificultades durante el proceso de aprendizaje. Uno de los desafíos fue la ubicación y manipulación del origen del plano cartesiano en el software utilizado, lo cual resultó problemático para algunos estudiantes. A diferencia de la convención de un origen fijo en el centro del plano, CoorCar les permitía ubicarlo en distintas posiciones, lo que generó confusión y la necesidad de adaptarse a esta flexibilidad.

Se identificaron dificultades en la correcta colocación de números negativos en la recta numérica, así como en el uso adecuado de la hoja cuadriculada para transferir puntos al software. Estos hallazgos resaltan la importancia de brindar recursos y estrategias específicas para mejorar la comprensión de los conceptos fundamentales.

Un aspecto positivo fue la habilidad de los estudiantes para ubicar puntos correctamente en pares ordenados, siguiendo las instrucciones del software CoorCar de Geom-Visual. Esto demuestra que pueden aplicar eficazmente sus conocimientos del sistema de coordenadas cartesianas en un entorno digital.

A pesar de los avances en general, algunos estudiantes encontraron dificultades al calcular la distancia entre dos puntos. Estas dificultades pueden atribuirse a la complejidad inherente de los cálculos, así como a la comprensión y aplicación de las fórmulas involucradas en situaciones específicas.

El postest realizado al finalizar la intervención proporcionó una evaluación exhaustiva del nivel de comprensión y la adquisición de habilidades matemáticas por parte de los estudiantes. Los resultados reflejaron un impacto positivo en el aprendizaje de geometría analítica, mostrando un mejor desempeño y mayor confianza en la aplicación de los conceptos estudiados.

6. Referencias

- Andrade, J. M. (2024). *El uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas: una revisión sistemática*. Tecnología, Ciencia y Educación, 28, 115-140. <https://doi.org/10.51302/tce.2024.18987>
- Cuevas, C. y Mejía, H. (2003). *Cálculo visual*. OXFORD.
- Cuevas-Vallejo, C. A., y Hernández González, I. E. (2023). Diseño y construcción de una plataforma virtual de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El cálculo Y Su enseñanza, 19(2), 15–33. <https://doi.org/10.61174/recacym.v19i2.210>
- Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2003). Les projets D'Action pratiqué éléments D'Une Ingénierie D'enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 273-293.
- Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. *El cálculo y su enseñanza*, 1(1), 45-60. <https://doi.org/10.61174/recacym.v1i1.164>
- Cuevas, C. (2011). *CoorCar: Sistema tutorial inteligente para la enseñanza de coordenadas cartesianas y segmentos de línea para un curso de geometría analítica* [Software de computadora]. Registro No. 03-2012-01231009600-01. México.
- Cuevas, C. y Martínez R. (2013). Un modelo para la construcción de entornos didácticos educativos para la enseñanza de las matemáticas. En *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 159-174). Pearson.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas: Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. MEP.
- Programa Estado de la Nación. (2023). *Noveno Estado de la Educación 2023*. CONARE.

El sistema tutorial inteligente CoorCar como mediador didáctico para el aprendizaje del plano cartesiano en estudiantes de secundaria costarricense

UNESCO. (2023). *Informe de seguimiento de la educación en el mundo 2023: Tecnología en la educación: ¿una herramienta en los términos de quién?* UNESCO. <https://www.unesco.org/es/articles/informe-de-seguimiento-de-la-educacion-en-el-mundo-2023-tecnologia-en-la-educacion-una-herramienta>

Valdespino, E. (2017). El conocimiento especializado de maestros mexicanos de primaria sobre el plano cartesiano. [Tesis de maestría, Universidad Internacional de Andalucía]. <http://hdl.handle.net/10334/3887>