Diseño de un curso de formación inicial para profesores, que integra la modelación matemática escolar con evaluación de tecnologías

Desing of an initial training course for teachers, which integrantes school mathematical modeling with technology evaluation

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Iván Pérez Vera

ivan.perez@umce.cl

Paulina Salazar Cortez

elizabeth.salazar2023@umce.cl

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Chile

Recibido: 28 de febrero de 2024

Aceptado: 10 de abril de 2024

Autor de Correspondencia:

Iván Pérez Vera

Resumen: Este escrito, presenta los antecedentes que sustentan la necesidad de incorporar la modelación a la formación inicial docente de profesores de matemática. Se establece desde una postura teórica de la modelación y de la evaluación de tecnologías una propuesta para la implementación semestral de un curso que desarrolle la modelación matemática, inicialmente como objeto matemático y posteriormente como estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje. A nivel metodológico se trabaja una experiencia de investigación acción, que permite al profesor investigador estar en diálogos permanentes con los diversos actores del proceso. Se presentan los principales resultados del proceso agrupados en tres episodios, la evaluación de tecnologías, la modelación matemática y el diseño de situaciones de aprendizaje. El análisis y conclusiones se realizan en diálogo desde la modelación matemática escolar con la formación inicial docente, las tecnologías, lo metodológico y lo curricular.

Palabras clave: Modelación, Formación de Profesores, Tecnologías

Abstract: This paper presents the background supporting the need to incorporate modeling into the initial teacher education of mathematics teachers. It proposes, from a theoretical standpoint of modeling and technology assessment, the implementation of a semester-long course aimed at developing mathematical modeling, initially as a mathematical object and subsequently as a framework for designing learning situations. Methodologically, an action research experience is conducted, allowing the researching teacher to engage in ongoing dialogues with various stakeholders in the process. The main results of the process are presented in three episodes: technology assessment, mathematical modeling, and the design of learning situations. The analysis and conclusions are drawn in dialogue with school mathematical modeling, initial teacher education, technology, methodology, and curriculum.

Keyword: : Modeling, Teacher Training, Technologies

1. Antecedentes y problemática

1.1 Sobre el diferenciado de límites, derivadas e integrales y su incorporación a los últimos años de secundaria en Chile

En el año 2021, en el marco de las nuevas bases curriculares para los últimos años de educación secundaria en Chile, se incorpora el programa de estudio "Matemática: Límites, Derivadas e Integrales" para 3° y 4° medio (MINEDUC, 2021), el que se organiza en cuatro unidades que abordan aspectos fundamentales del cálculo. En la Unidad I, se enfoca en las funciones, instando a los estudiantes a utilizar diversas formas de representación y a comprender la composición de funciones, explorando la existencia de la función inversa. La Unidad II se centra en los límites, con énfasis en argumentar sobre su existencia en diferentes contextos y evaluar su influencia utilizando herramientas manuscritas y digitales. En la Unidad III, dedicada a las derivadas, se destaca la modelación de situaciones que implican rapidez instantánea de cambio, así como la resolución de problemas relacionados con el comportamiento de una función mediante el cálculo de derivadas. Finalmente, en la Unidad IV, que aborda las integrales, se busca modelar situaciones que involucren el concepto de integral como área bajo la curva, destacando la necesidad de ajustar modelos.

En todo el programa, se promueve el uso de herramientas tecnológicas, la elaboración de representaciones y la resolución colaborativa de problemas no rutinarios. Se presenta la modelación como un elemento crucial en cada unidad, ya que impulsa a los estudiantes a aplicar conceptos matemáticos en contextos prácticos, conectando variables y tomando decisiones fundamentadas. Este enfoque integrador fomenta un entendimiento más profundo y aplicado de los temas de cálculo, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos tanto en ámbitos académicos como en situaciones de la vida diaria.

Esta incorporación del cálculo escolar al currículum de secundaria nos exige revisar cuales son las dificultades asociadas al aprendizaje de los tópicos estudiados, principalmente de límites, derivadas e integrales.

1.2 Errores, obstáculos y problemáticas detectados por la investigación en el aprendizaje del límite, derivada e integral

Diversas investigaciones han detectado problemáticas y obstáculos en el proceso de aprendizaje de la noción de límite, según los investigadores, esto se debe a diversas concepciones erróneas y dificultades que enfrentan los estudiantes. Hernández, Prada y Ramírez (2017) resaltan que la enseñanza del límite se centra en un enfoque algebraico, donde la simple sustitución del valor de tendencia en la expresión se presenta como válida, pero los estudiantes encuentran dificultades al enfrentarse a expresiones con límites factorizables. Además, se destaca el desconocimiento sobre la evaluación de la continuidad y la dificultad para determinar el tipo de discontinuidad. Por otro lado, Medina y Rojas (2015) revelan que las concepciones erróneas de los estudiantes sobre el límite se originan en obstáculos epistemológicos, manifestando imágenes mentales no pertinentes y adoptando concepciones algebraicas finitistas estáticas. La Plata y Malespina (2019) aportan a esta problemática al evidenciar que los estudiantes carecen de una comprensión clara del límite finito de una función real de variable real, presentando errores conceptuales, simbólicos y gráficos.

Por otra parte, y continuando con el cálculo escolar, en el concepto de derivada de igual forma se han detectado problemáticas y obstáculos en el proceso de aprendizaje del concepto de derivada, las investigaciones señalan que, a pesar de una asimilación adecuada de procedimientos sistemáticos, como el cálculo de derivadas mediante su definición como límite, persisten errores y dificultades. González, Muñiz y Rodríguez (2018) evidencian problemas en la operación y simplificación de expresiones algebraicas, dificultades para cambiar estrategias de resolución, incapacidad para analizar funciones en formato tabular o gráfico, y confusión en la interpretación geométrica de la derivada. Montiel (2005) destaca innovaciones didácticas que buscan abandonar la visión algorítmica y estática del concepto, pero subraya la tendencia a centrarse en definiciones estáticas en lugar de abordar la actividad que dio origen y significado a la derivada. Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2017) resaltan que, aunque los estudiantes muestran mecánica correcta en el cálculo de derivadas, enfrentan dificultades cognitivas y procedimentales al concebir la derivada como una razón de cambio, y presentan problemas algebraicos y aritméticos en la aplicación de reglas de derivación.

Finalmente, desde la perspectiva del cálculo integral en el contexto del cálculo escolar, el concepto de integral presenta problemáticas, obstáculos y errores altamente estudiados en el proceso de aprendizaje. Muñoz (2000) destaca un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del cálculo integral, evidenciando una separación entre la parte conceptual y la parte algorítmica, con una notable diferencia en los tiempos dedicados a la enseñanza de cada una. Mateus (2022), por su parte, identifica que el cálculo integral es considerado complejo, proponiendo una visión integrada de los diferentes significados para la integral. Este enfoque incluye el desarrollo y formalización del concepto de integral definida, la formalización de la integral impropia, el estudio de funciones simples y multivariadas, y el posicionamiento de una definición analítica de integral definida para funciones continuas, entre otros aspectos. Además, resalta que esta perspectiva redundaría en una comprensión más profunda y en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes universitarios. Martínez y García (2020) señalan dificultades en la construcción del concepto de integral definida, especialmente al relacionar la altura de los rectángulos con la imagen de una función y al comprender la conexión entre las sumas de Riemann y el área bajo la curva. La falta de coordinación entre procesos de partición, sumas y límites también se destaca como un obstáculo.

A modo de síntesis, se puede señalar que las investigaciones enfocadas en el cálculo escolar han revelado desafíos sustanciales en la comprensión de conceptos clave como límites, derivadas e integrales. La enseñanza de los límites se ha visto afectada por concepciones erróneas y obstáculos epistemológicos, destacando la necesidad de estrategias pedagógicas que aborden estas dificultades mediante enfoques graduales y diversos registros de representación

(Hernández, Prada y Ramírez, 2017; Medina y Rojas, 2015; La Plata y Malaspina, 2019). En el caso de las derivadas, se subraya la complejidad intrínseca del concepto y se enfatiza la importancia de enfoques pedagógicos más contextualizados y comprensivos, superando visiones algorítmicas y estáticas (González, Muñiz, Rodríguez, 2018; Montiel, 2005; Gutiérrez, Buitrago, Ariza, 2017). Por último, en el ámbito del cálculo integral, se identifican problemas en la enseñanza, como el desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, evidenciando la necesidad de comprender la estructura de las sumas de Riemann para mejorar la comprensión conceptual de la integral definida (Muñoz, 2000; Mateus, 2022; Martínez y García, 2020). Estas perspectivas resaltan la importancia de avanzar hacia estrategias pedagógicas más efectivas que aborden las complejidades inherentes a estos conceptos y promuevan una comprensión más profunda y conectada del cálculo escolar.

Desde la necesidad de identificar estrategias pedagógicas que permitan trabajar con diversas representaciones de los elementos matemáticos, con uso de tecnologías y permitiendo intervenir en diversos contextos, se propone revisar cómo la modelación matemática entendida como metodología puede ser una alternativa para el aprendizaje del cálculo escolar.

1.3 La modelación matemática como metodología para el aprendizaje del cálculo escolar

La investigación de Mejía, Gallo y Quintana (2022) revela un incremento significativo en el desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos de precálculo y cálculo mediante la aplicación de la modelación matemática como estrategia didáctica en la asignatura de Matemática. Este enfoque efectivo se traduce en un fortalecimiento equitativo de las dimensiones de interacción, matematización y modelo matemático, sin observarse diferencias significativas en los resultados de las evaluaciones. Estos hallazgos sugieren que la modelación matemática puede ser una metodología eficaz para abordar conceptos clave del cálculo escolar.

El trabajo de Bravo y Rodríguez (2020), centrado en la formación del concepto de integral doble mediante modelación matemática, refuerza la idea de que esta estrategia facilita la asimilación de contenidos. La encuesta aplicada a estudiantes destaca la implicación y motivación mejorada de los estudiantes en actividades relacionadas con la formación del concepto de integral. Este aspecto resuena con la noción presentada por Peña y Morales (2016), quienes abogan por la modelación matemática como una vía para desarrollar competencias matemáticas, sociales y comunicativas. La conexión entre la teoría matemática y su aplicación práctica se manifiesta como un componente crucial de este enfoque (Bravo y Rodríguez, 2020; Peña y Morales, 2016).

Molina (2017), al presentar una estrategia didáctica basada en la modelación matemática para el cálculo, enfatiza la efectividad de esta metodología al contextualizar y aplicar conceptos de integrales impropias, polinomios de Taylor, coordenadas polares y secciones cónicas. La alta satisfacción de los estudiantes subraya el valor de la modelación matemática al solucionar la problemática inicial de desconocimiento de aplicaciones concretas de los contenidos del curso.

El estudio de Zaldívar, Quiroz y Medina (2017) sobre la implementación de la modelación matemática en la formación de docentes destaca la importancia de la preparación previa, la selección adecuada de contextos y el uso de tecnología para optimizar el proceso. Estos aspectos coinciden con la necesidad señalada por otros autores de vincular la teoría matemática con contextos relevantes para los estudiantes.

En síntesis, los diversos autores convergen en la idea de que la modelación matemática emerge como una estrategia efectiva para el aprendizaje del cálculo escolar. Facilita la comprensión de conceptos clave como el límite, la derivada y la integral al contextualizarlos y aplicarlos en situaciones prácticas, propiciando así un mayor interés, motivación y comprensión por parte de los estudiantes. La conexión entre la teoría matemática y su aplicación práctica se erige como un elemento crucial en este proceso de enseñanza-aprendizaje.

Entendiendo la necesidad de incorporar la modelación matemática como una herramienta del profesor para su actividad en el aula escolar, se debe reconocer la formación inicial docente como una oportunidad para esta incorporación.

1.4 La modelación matemática en la formación inicial de profesores de matemática

El estándar D "Límites, Derivadas e Integrales" delineado por el Ministerio de Educación de Chile (CPEIP, 2021) establece las competencias esperadas para los profesores de matemática asociadas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo escolar. Desde una perspectiva disciplinaria, se espera que los docentes adquieran un conocimiento profundo de las nociones de límite, continuidad, derivadas, integrales y series, incluyendo la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo. Este dominio les capacita para diseñar y gestionar actividades de aprendizaje que posibiliten que los estudiantes integren estos conceptos en la resolución de problemas y la modelación de fenómenos naturales y sociales. Se espera también que el docente explique y aplique las nociones de límite de sucesiones y funciones, resolviendo problemas y estableciendo conexiones entre ellas. También se espera que aborde problemas de continuidad y derivabilidad, utilizando teoremas como el del valor intermedio y del valor medio, y estableciendo relaciones lógicas. El uso de representaciones gráficas y algebraicas para analizar funciones, incluyendo puntos críticos y comportamientos asintóticos, es esencial. Además, el docente debe modelar fenómenos que involucren tasas de cambio, maximización o minimización de funciones, utilizando medios digitales para verificar y comprender estos modelos.

Desde el punto de vista didáctico, se espera que el profesor planifique proyectos que involucren activamente a los estudiantes, conectando las derivadas e integrales con nociones físicas como posición, velocidad y aceleración de un móvil. La utilización de diversas representaciones se destaca como una estrategia para superar las dificultades comunes relacionadas con las nociones de convergencia de sucesiones y límite de funciones. La anticipación de preguntas para estimular el aprendizaje y la guía en actividades colaborativas de modelación de fenómenos naturales o sociales son competencias adicionales requeridas. En este contexto, la modelación matemática emerge como un componente fundamental tanto a nivel disciplinar como didáctico. La gestión de actividades colaborativas de resolución de problemas matemáticos y el diseño de actividades que utilicen software dinámico refuerzan la aplicación práctica de los conceptos de límites, derivadas e integrales en la resolución de problemas y en la modelación de situaciones. La implementación de estrategias de evaluación formativa en actividades de modelación subraya la importancia de reconocer la diversidad de contextos de los estudiantes y su contribución al proceso de modelación.

En relación a la importancia de la incorporación de la modelación a la formación de profesores, Ortiz y Mora (2015) señalan que los profesores en formación logran avances significativos al emplear la modelación como estrategia de enseñanza. Adquieren una perspectiva funcional de la modelación, identifican dificultades durante la planificación y reconocen su utilidad para presentar la matemática de manera funcional al estudiante. En este sentido, la modelación matemática, busca dotar de significado a los conceptos matemáticos, generando así interés en los estudiantes. Asimismo, Huincahue, Borromeo y Mena (2017) proponen esclarecer la incorporación explícita de la modelación en la formación inicial, destacando la necesidad de experiencia en prácticas profesionales simultáneas. Esto potencia la formación, y el concepto de "curso de modelación matemática" puede adaptarse a demandas específicas. Forero (2020) señala que las experiencias fenomenológicas gestionadas en la formación de profesores constituyen oportunidades para cambiar prácticas de enseñanza, enfocándose en estrategias constructivas. Además, Pérez (2020) aboga por la importancia de que el profesor en formación participe activamente en procesos de modelación matemática, promoviendo su desarrollo profesional.

Mora (2015) complementa este panorama al afirmar que la formación inicial debe permitir al profesor de matemáticas vincular la disciplina con el contexto del estudiante. La modelación como estrategia de enseñanza determina el diseño de tareas y requiere una visión integral de la enseñanza. Es esencial considerar la complejidad de la enseñanza de contenidos matemáticos y diseñar tareas fundamentadas en la reflexión y análisis. Aunque el uso de la modelación puede enfrentar dificultades, su integración en la formación inicial puede superar obstáculos y fomentar la disposición del futuro profesor hacia esta estrategia de enseñanza.

En síntesis, la modelación matemática emerge como un componente crucial en la formación de profesores, ofreciendo oportunidades para desarrollar habilidades pedagógicas y vincular la matemática con la realidad del estudiante (Ortiz y Mora, 2015; Huincahue, Borromeo y Mena, 2017; Forero, 2020; Pérez, 2020 y Mora, 2015).

1.5 Problemática de investigación

La investigación sobre el cálculo escolar revela desafíos significativos en la comprensión de conceptos clave como límites, derivadas e integrales. Estos desafíos, como concepciones erróneas y obstáculos epistemológicos, resaltan la necesidad de estrategias pedagógicas efectivas que aborden estas dificultades mediante enfoques graduales y diversos registros de representación. A su vez, la complejidad intrínseca de las derivadas y la enseñanza desequilibrada entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral evidencian la urgencia de enfoques pedagógicos contextualizados y comprensivos.

Los estudios convergen en la efectividad de la modelación matemática como estrategia para el aprendizaje del cálculo escolar. Al contextualizar límites, derivadas e integrales en situaciones prácticas, la modelación facilita la comprensión y aplicación de estos conceptos, generando mayor interés y motivación en los estudiantes. Este enfoque integrador se posiciona como un componente crucial en la formación de profesores, proporcionando oportunidades para desarrollar habilidades pedagógicas y vincular la matemática con la realidad del estudiante.

El Programa de Estudio "Matemática: Límites, Derivadas e Integrales" en Chile organiza su contenido en torno a unidades que abordan aspectos fundamentales del cálculo, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas, representaciones diversas y resolución colaborativa. La modelación se destaca como un elemento central, impulsando a los estudiantes a aplicar conceptos matemáticos en contextos prácticos y tomar decisiones fundamentadas.

La problemática radica en la necesidad de diseñar una formación de profesores que no solo aborde los desafíos disciplinares y didácticos asociados a límites, derivadas e integrales, sino que también incorpore la modelación matemática como estrategia de aprendizaje y objeto matemático para modelar la realidad. Así, se busca no solo superar las dificultades comunes en la enseñanza del cálculo escolar, sino también fortalecer la conexión entre la teoría matemática y su aplicación práctica, preparando a los docentes para enfrentar estos desafíos en el aula.

1.5 Pregunta orientadora

1.5.1 Objetivo General: Evaluar y analizar las características del diseño de un curso de formación inicial de profesores, focalizado en la integración de la modelación matemática escolar y la evaluación de tecnologías.

2. Marco Teórico/referentes teóricos

2.1 Modelación matemática

La modelación matemática, según Villa, Sanchez y Parra (2022), se presenta como un proceso integral destinado a resolver problemas del mundo real, comprendiendo, explicando, controlando y anticipando situaciones y fenómenos mediante la manipulación de variables bajo condiciones específicas. La modelación, en términos generales, implica un proceso que se desarrolla a través de fases, desde el reconocimiento de un fenómeno de interés hasta la validación del modelo, pasando por etapas como la observación, selección de variables, formulación de hipótesis y análisis matemático (Blum y Niss, 1991; Villa, Sanchez y Parra, 2022).

De este modo Acuña, Rojas, Babb y Rocha (2023), señalan que la modelación matemática busca promover las herramientas necesarias para aplicar las matemáticas en contextos reales, para enfrentar situaciones complejas en diversos campos, como la ingeniería y las ciencias. Por otra parte, Cevikbas, Kaiser y Schukajlow (2022) reconocen que los modelos y aplicaciones son componentes fundamentales de las matemáticas, y la capacidad de aplicar el conocimiento matemático en situaciones del mundo real se considera fundamental para la alfabetización matemática.

En la actualidad, existen diversas perspectivas de modelación, así como también, diferentes objetivos que determinan su rol en las aulas. Por ejemplo, el uso de tecnologías en los procesos de modelación permite conexiones disciplinares que impactan en el desarrollo de competencias esenciales para la educación matemática. (Cevikbas, Kaiser y Schukajlow, 2022).

2.2 Perspectiva de modelación matemática

Hoy en día, se observa un crecimiento en la cantidad de estudios llevados a cabo sobre la modelación matemática en Latinoamérica, los cuales abordan una variedad de temas y perspectivas innovadoras, destacándose la tendencia a realizar investigaciones que enfocan las influencias sociales y culturales (Peña et al., 2023).

En este reporte en particular, se considera la perspectiva de modelación de Arrieta y Díaz (2015), quienes indican que los procesos de modelación existen en relación con la actividad humana.

En este sentido, el modelo matemático depende siempre de quien realiza la práctica de modelación y se entiende como tal cuando se utiliza como herramienta para abordar un fenómeno específico. Desde esta óptica, el modelo no existe de manera independiente, sino que surge en la actividad del modelador, quien, al articular el modelo y lo modelado, conforma un dipolo modélico.

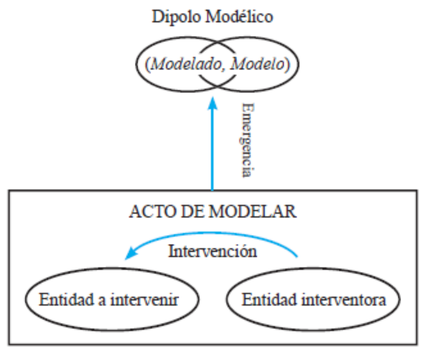


Figura 1. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico (Arrieta y Díaz, 2015, p.36)

Así, en el acto de modelar, se conforman redes de dipolos modélicos que comprenden la construcción de modelos desde el estudio y experimentación del fenómeno. En este sentido Pérez y Carrasco (2018) señalan que la articulación entre diversos modelos, como el modelo tabular, gráfico y algebraico, permiten configurar una red de modelos asociada al fenómeno en estudio, lo que implica necesariamente la interpretación del sujeto que vivencia la modelación.

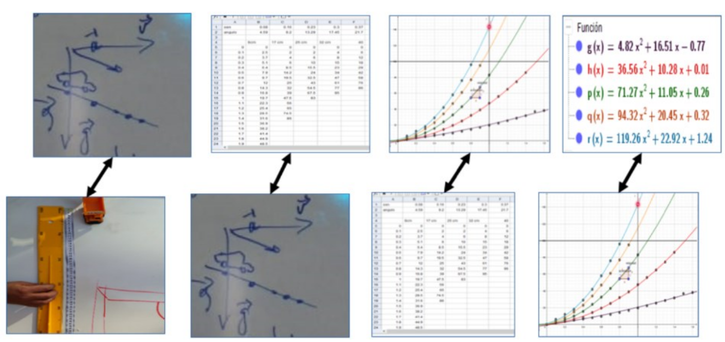


Figura 2. Red de dipolos modélicos desplazamiento inclinado (Pérez, 2020, p.192)

Durante la experiencia reportada en Pérez (2020) se observa cómo la creación de cada nuevo dipolo da sentido a diferentes elementos del fenómeno, mostrándose de forma progresiva y permitiendo el desarrollo un modelo general que integra la información de cada dipolo individual y de la red en su conjunto. Identificamos en esta red, en la construcción de los diversos modelos, el rol de la tecnología como mediadora y sustento de la experimentación, la toma de datos y el proceso de modelación.

2.3 Evaluación de tecnologías en un contexto de modelación

Según Rodríguez y Quiroz (2016), la integración de tecnologías en contextos de modelación matemática corresponde a un factor importante en cuanto a la vinculación entre lo analítico (respuestas matemáticas) y los datos proporcionados por la tecnología (respuestas físicas). De este modo, el uso de tecnologías, cuando se implementa estratégicamente durante el proceso de modelación, se convierte en un recurso valioso que facilita la conexión entre distintos aspectos del ciclo de modelación matemática. Además, el uso de tecnología en la modelación no solo resulta importante, sino incluso indispensable para generar relaciones significativas entre diversos dominios como el real, el físico y el matemático, brindando un apoyo sustancial a la vivencia de experiencias prácticas.

Para evaluar el uso de tecnologías en contextos de experimentación en el aula, se considera la perspectiva de Artigue (2002), quien plantea la evaluación en términos pragmáticos, como eficiencia, coste y campo de validez, y también destaca que las tecnologías deben evaluarse en términos de un valor epistémico, que vele por el conocimiento disciplinar matemático en experiencias de su integración en el aula. Esto pues, las tecnologías contribuyen significativamente a la comprensión de los objetos matemáticos que involucran, convirtiéndose así en una fuente de cuestionamientos sobre la construcción de este conocimiento.

Gaona (2018) aporta definiendo seis dimensiones: el valor pragmático, el valor epistémico, la alineación curricular, los costos y flexibilidad de los recursos, y la participación. Su análisis se enfoca en la toma de decisiones con respecto a la integración de las tecnologías en el aula, y destaca que el valor epistémico no es intrínseco a la tecnología en sí misma, sino que se puede analizar a partir de las tareas mediadas por ella. En este sentido, es importante que la tecnología dialogue de manera disciplinar en implementaciones de aula, tanto en términos matemáticos como científicos, utilizando, por ejemplo, notación y elementos estructurales de la disciplina en cuestión, que permitan generar un diálogo constante.

3. Metodología y propuesta

3.1 Paradigma metodológico

La elección metodológica para esta investigación se fundamenta en el paradigma de la Investigación-Acción, ya que ofrece oportunidades significativas en el ámbito educativo al integrar la reflexión crítica y la acción directa para mejorar la propia práctica. Este enfoque permite a los educadores no solo identificar desafíos dentro de su entorno, sino también participar activamente en la resolución de problemas, promoviendo un aprendizaje continuo y una adaptación efectiva a las necesidades cambiantes de los estudiantes y las comunidades educativas (Pérez, 2019).

La Investigación-Acción no solo se limita a identificar problemas y proponer soluciones; también fomenta la innovación y la reflexión constante. A través de la aplicación de ciclos de investigación y acción, los docentes pueden experimentar con nuevas prácticas, evaluar sus impactos y ajustar en consecuencia. Este proceso iterativo no solo mejora la calidad de la enseñanza, sino que también contribuye al desarrollo profesional continuo, cultivando comunidades de aprendizaje donde la mejora es una práctica arraigada (Guevara et al., 2020).

En el desarrollo de un curso, la Investigación-Acción emerge como un marco metodológico valioso, pues permite al docente diseñar, implementar y evaluar innovaciones pedagógicas en tiempo real, incorporando ajustes y mejoras continúas basadas en la retroalimentación directa de los estudiantes. Este enfoque dinámico facilita el perfeccionamiento constante del proceso educativo, asegurando que las estrategias y contenidos sean más efectivos y relevantes para las necesidades específicas del grupo estudiantil (Pérez, 2019 y Bancaván y Vega, 2020).

La Investigación-Acción emplea una variedad de instrumentos y herramientas que potencian la recopilación de datos y la toma de decisiones informadas. Técnicas como mapas sociales, entrevistas semiestructuradas, grupos focales y análisis participativo de fuentes secundarias se han destacado como eficaces para capturar la complejidad de los contextos educativos. Estos métodos permiten una comprensión más profunda de las experiencias y percepciones de los participantes, fundamentales para orientar las acciones correctivas y transformadoras (Espinoza, 2020).

3.2 Sobre la propuesta y su diseño

Se propone, con el fin de generar un curso de formación inicial de profesores de matemática, de carácter semestral, dividir el desarrollo del curso en dos ejes temáticos. Inicialmente, una fase que fortalezca lo disciplinar en un contexto de modelación matemática escolar, que involucre la evaluación de diversas tecnologías que potencien o refuercen la discusión epistémica de los objetos matemáticos involucrados. Posteriormente, se propone una fase que permita articular la didáctica disciplinar de forma específica sobre el diseño de una situación de aprendizaje en un contexto de modelación con uso de tecnologías.

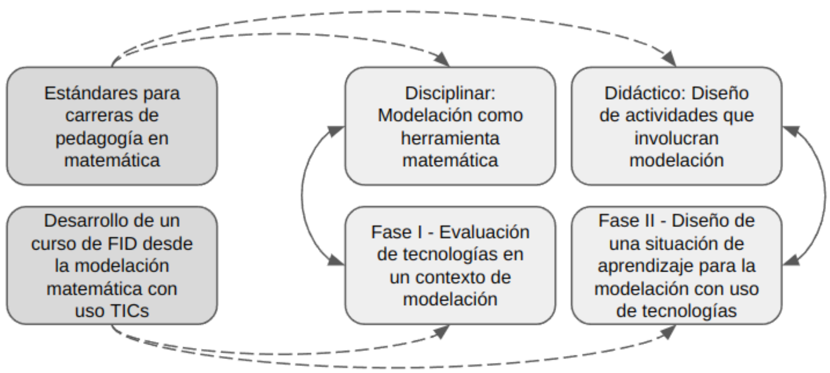


Figura 3. Articulación estándares con curso FID. Elaboración propia.

Para la fase I, "Evaluación de tecnologías en un contexto de modelación" se propone articular la modelación desde la perspectiva de Arrieta y Díaz (2015), ya que esta se genera en un contexto de modelación con tecnología, en la que emergen de forma consistente los modelos gráficos, algebraicos y tabulares. A nivel de evaluación de tecnologías, se realiza desde la mirada de Artigue (2002) y Gaona (2018), principalmente por tener la característica de fundamentar la evaluación de la tecnología en concordancia con su rol en el aprendizaje de la matemática.

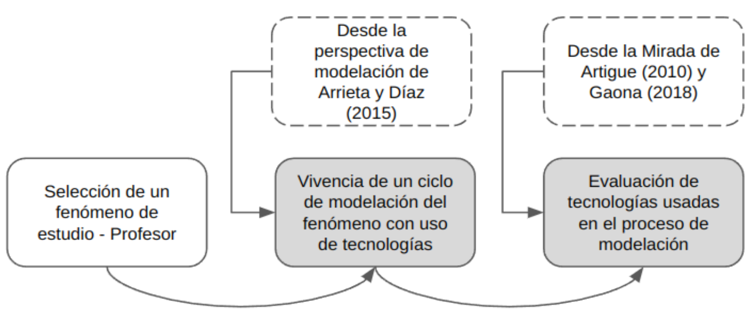


Figura 4. Fase I - Evaluación de tecnologías en un contexto de modelación. Elaboración propia.

En términos de la Fase II "Diseño de una situación de aprendizaje en un contexto de modelación con uso de tecnologías" se mantienen las posturas con respecto a modelación matemática escolar y evaluación de tecnologías utilizadas en la Fase I; sin embargo, es necesario establecer una postura sobre el diseño de situaciones de aprendizaje en un contexto de modelación matemática escolar con uso de tecnologías. Para lograr este propósito, se utilizan las estructuras propuestas por Balda (2022) que considera cinco fases para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico, (1) introducción, (2) exploración, (3) procedimental, (4) consolidación, (5) ejercitación.

Como este proyecto se fundamenta en el diseño de actividades de aprendizaje usando tecnología en un contexto de modelación matemática escolar, se tomó la propuesta de Balda (2022) y se adecuó de la siguiente manera: (1) la profundización en el fenómeno a partir de la literatura (2) diseño de la experimentación para la toma de datos, (3) vivencia de un ciclo de modelación, (4) mirada escolar del fenómeno y (5) institucionalización de los objetos matemáticos puestos en juego. Esta adecuación a las fases propuestas por Balda (2022) representa sin duda un valor agregado.

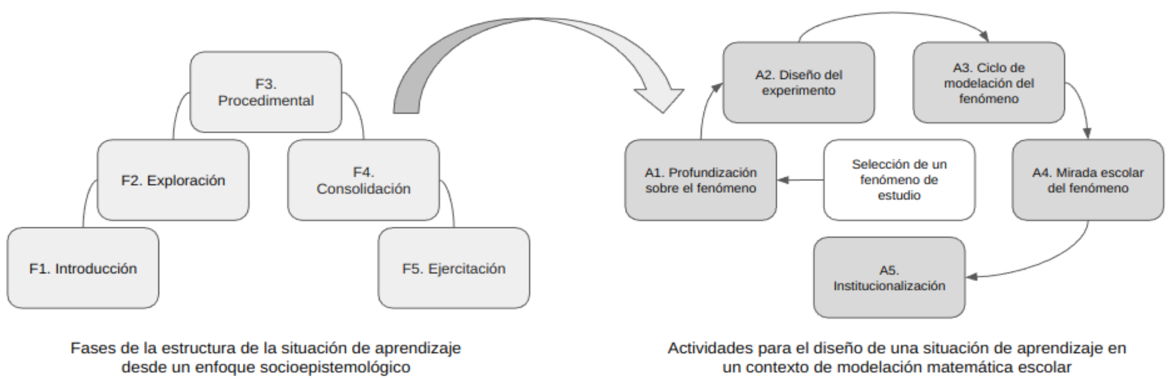


Figura 5. Estructura de una situación de aprendizaje en un contexto de modelación con uso de tecnologías.

Se decide que en la fase II, al finalizar el ciclo de modelación de cada uno de los fenómenos propuestos, los equipos presenten sus avances, en modalidad poster, al resto de la comunidad. Esta actividad de comunicación científica cumple el rol de fortalecer los diálogos internos de cada equipo con el fin de consolidar el trabajo realizado y permitir un tránsito positivo hacia el diseño de una situación de aprendizaje que involucre al fenómeno que han estudiado.

En cada una de sus actividades se considera un desarrollo temporal que permita de forma adecuada generar las discusiones necesarias por parte de los estudiantes, para lograr el objetivo de diseñar una situación de aprendizaje en un contexto de modelación con uso de tecnologías. Este diseño se entiende como el gran producto del curso FID.

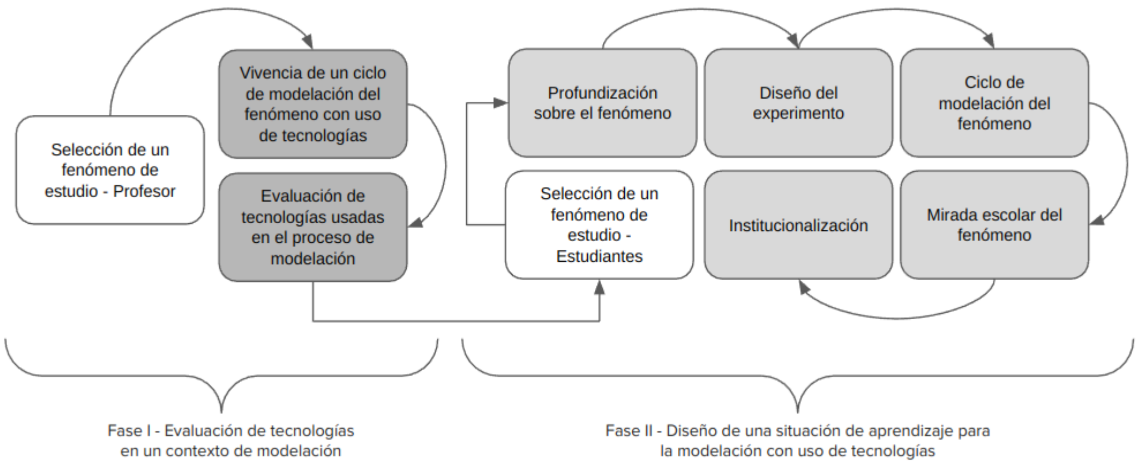


Figura 6. Estructura general de un curso FID en un contexto de modelación con uso de tecnologías.

3.3 Sobre la implementación

La implementación de la propuesta se realizó en la carrera de licenciatura en educación matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE) durante el segundo semestre de 2023, abarcando los meses de agosto a noviembre. El curso se encuentra en el sexto semestre de formación de los futuros profesores de matemática y tiene por nombre "TICs para la Enseñanza de la Matemática I" de código MMAT604, curso que tiene por competencias principales a desarrollar (1) la evaluación de tecnologías y (2) el diseño de situaciones de aprendizaje con uso de tecnologías, lo que propicia una alta articulación con la propuesta que se espera desarrollar. Participan un total de 18 estudiantes en 14 semanas. El estudiantado que participa, al encontrarse MMAT604 en el 6to semestre, ha aprobado de forma previa los cursos de Cálculo Integral y Cálculo Diferencial, además de los cursos previos de Tecnologías, Fundamentos TICs y TICs para el Aprendizaje de la Matemática.

Los principales instrumentos de recolección de información fueron las (1) reflexiones y análisis del estudiantado en formatos de informe con periodicidad semanal, (2) Observación de los participantes y (3) diario de campo del investigador, quien cumple además con la labor de ser el profesor del curso y quien lidera la implementación de la propuesta.

4. Resultados

Los resultados de esta experiencia se presentan en tres episodios. El primer episodio aborda la fase I del proceso, enfocado en la modelación de la colisión inelástica y la evaluación de tecnologías. El segundo episodio, con foco en las primeras actividades de la fase II, (1) la profundización del fenómeno en la literatura, (2) el diseño de la experimentación y (3) vivencia de un ciclo de modelación. Para finalizar, en el episodio tres, se presentan (4) la mirada escolar del fenómeno y (5) la institucionalización de los objetos matemáticos puestos en juego.

4.1 Episodio 1

Este episodio se llevó a cabo durante las semanas 1, 2 y 3 del curso "Tecnologías para la Enseñanza de la Matemática I", utilizando una pelota plástica de tenis de mesa y una regla graduada para medir alturas. Se propusieron dos estrategias de toma de datos: grabación y análisis con Tracker (software de análisis de video) , y uso del sensor de colisión inelástica de Phyphox (sensor de teléfono móvil). En Tracker, los estudiantes recopilaron datos manualmente, marcando la posición de la pelota fotograma por fotograma. Por su parte, PhyPhox proporcionó alturas máximas automáticamente, limitado a cinco alturas máximas y sus respectivos tiempos.

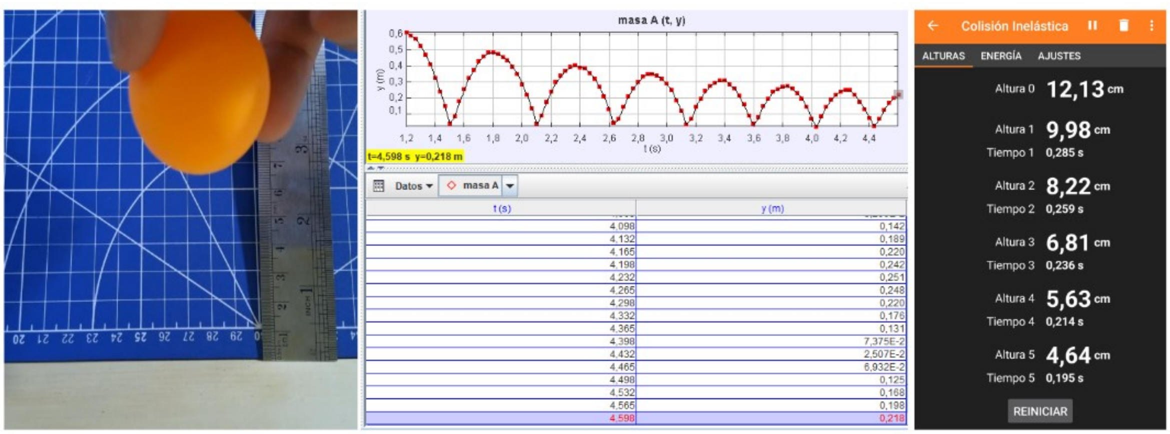


Figura 7. Experimentación y toma de datos con Tracker y Phyphox

Un primer análisis de los datos se realizó en Python mediante Colab, en el que se utilizaron diversos ajustes polinómicos para modelar las alturas máximas obtenidas con el sensor, sin facilitar el análisis de la trayectoria completa. El segundo análisis, realizado en GeoGebra, permitió explorar diversos ajustes, incluyendo modelos lineales, polinómicos y exponenciales.

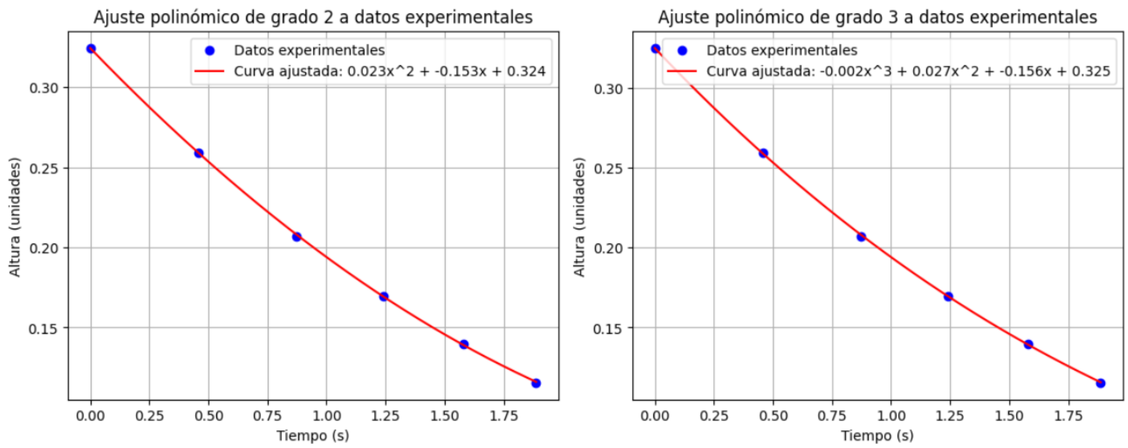


Figura 8. Tratamiento de datos con Python en Google Colab

Otra exploración realizada por las y los estudiantes, fue realizar múltiples ajustes de grado dos, para cada trayectoria en torno a una altura, lo que permitió al grupo observar el comportamiento individual de cada rebote.

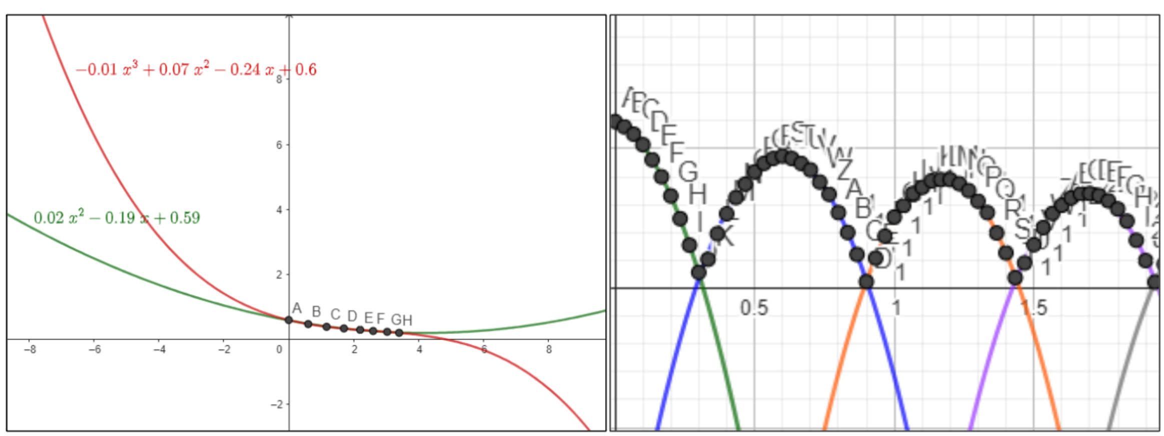


Figura 9. Tratamiento de datos con Geogebra

En el informe final del proceso de modelación de la colisión inelástica, al estudiantado se le planteó lo siguiente: “El experimento se llevó a cabo en dos ocasiones y se analizó en igual número de oportunidades, dividiéndose en dos duplas tecnológicas: la primera conformada por Tracker y Geogebra, y la segunda por PhyPhox y Python. ¿Cuál de estas duplas presenta un mayor valor pragmático y por qué?”

El análisis de las respuestas de los estudiantes revela diferentes percepciones sobre el valor pragmático de las herramientas tecnológicas utilizadas en la experimentación de la colisión inelástica. La mayoría de los estudiantes considera que la dupla Tracker y Geogebra posee un mayor valor pragmático en comparación con PhyPhox y Python. Argumentan que Tracker y Geogebra ofrecen una visualización más clara y una manipulación más intuitiva de los datos, lo que facilita una interacción más profunda con el fenómeno estudiado. Destacan la precisión y flexibilidad de Geogebra, así como la capacidad de exportar datos a otras plataformas. En contraste, PhyPhox y Python son percibidos como menos intuitivos, aunque algunos estudiantes reconocen la simplicidad de PhyPhox para obtener datos y la versatilidad de Python. Sin embargo, la preferencia general se inclina hacia Tracker y Geogebra por su capacidad para proporcionar una comprensión más completa del experimento y su facilidad de uso. Estas percepciones resaltan la importancia de la claridad visual, la precisión de los datos y la facilidad de manipulación como criterios clave para evaluar el valor pragmático de las herramientas tecnológicas en el contexto de la experimentación científica.

4.2 Episodio 2

El segundo episodio se realizó en las semanas 4, 5, 6, 7 y 8 del curso, con foco en las primeras actividades de la fase II, integrando elementos de la comunicación científica por medio de pósters que evidenciaron los procesos desarrollados en (1), (2) y (3).

Figura 10. Profundización, experimentación y modelación de un fenómeno de la física escolar. Elaboración propia.

Este episodio de resultados se centra en relatar los primeros pasos propuestos y ejecutados en el diseño de una situación de aprendizaje para la modelación con uso de tecnologías. La selección de fenómenos de estudio fue realizada en modalidad de taller-seminario, en el que el estudiantado y el profesor de asignatura aportaron con libros de texto de física escolar. Uno de los requerimientos solicitados, fue la selección de fenómenos altamente replicables en su experimentación con el fin de obtener datos de alta calidad y además pensar en su reproducción en el aula escolar. Los experimentos seleccionados por los grupos fueron: la caída libre, el estiramiento del resorte, el péndulo clásico y el péndulo balístico, el movimiento parabólico con dos experimentos distintos, la catapulta y el cohete de agua.

Una vez seleccionados los fenómenos, los estudiantes comenzaron una revisión bibliográfica en la literatura científica especializada de cada uno de ellos. La finalidad principal de esta revisión bibliográfica era adquirir un conocimiento profundo de los fenómenos seleccionados y, al mismo tiempo, identificar características esenciales relacionadas con su replicabilidad, estudio y modelación. Esta revisión permitió, por ejemplo, identificar las variables relevantes en juego, las constantes involucradas, las limitaciones del fenómeno y los elementos teóricos presentes, como ecuaciones o funciones que la literatura científica ofrecía para orientar el trabajo en términos de modelación.

Luego, cada equipo tuvo la responsabilidad de diseñar el experimento para llevar a cabo la toma de datos. Este paso resultaba fundamental, ya que la calidad de la toma de datos incidía directamente en el éxito del proyecto. En caso de no lograr una toma de datos adecuada, los equipos se veían obligados a regresar al punto de partida, seleccionando nuevamente el fenómeno de estudio y realizando una nueva revisión de la literatura. A pesar de la complejidad que presentaron algunos experimentos en su ejecución, todos se llevaron a cabo con éxito. Una vez formulado el diseño experimental, se dio inicio al proceso de modelación matemática. Este proceso implicaba la ejecución del experimento de manera que los datos obtenidos fueran susceptibles de ser analizados dentro de un marco de modelación. Seguidamente, se llevó a cabo el procesamiento de los datos con el objetivo de obtener gráficos, funciones o ecuaciones que describieran el fenómeno, generando las bases para realizar un ciclo de modelación.

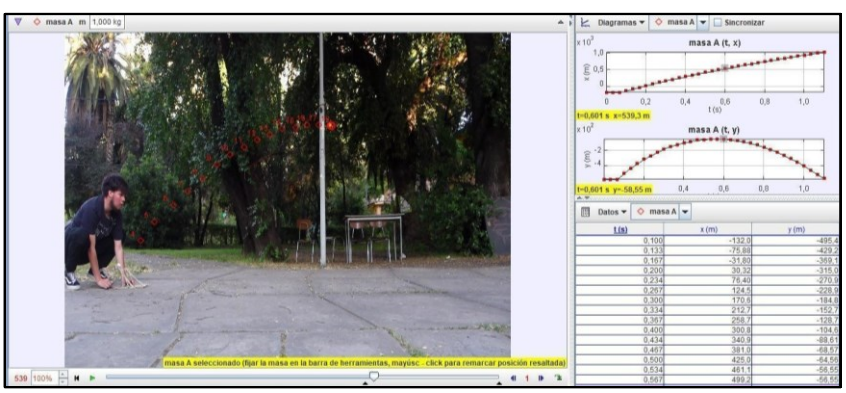


Figura 11. Ejemplos de experimentación y toma de datos.

El aporte de la revisión bibliográfica, proporcionó información sobre las ecuaciones y funciones que modelaban los fenómenos estudiados, permitiendo establecer conexiones significativas entre el conocimiento experimental y teórico. Esto facilitó la generación de ajustes basados en datos empíricos y la experiencia adquirida por los estudiantes. Por ejemplo, en los experimentos que involucraban desplazamientos, los estudiantes identificaron la posibilidad de modelar el fenómeno utilizando herramientas cuadráticas. Al reconocer esto, realizaron la toma de datos, modelaron gráficamente mediante una parábola, desarrollaron la función de segundo grado y analizaron el comportamiento del fenómeno. Finalmente, contrastaron sus hallazgos con la teoría respaldada por la revisión bibliográfica inicial. Este enfoque permitió la realización de un ciclo de modelación coherente que fue documentado en un informe específico para cada fenómeno. Todos los equipos participantes contribuyeron a la creación de informes detallados sobre la modelación de los respectivos fenómenos, consolidando así el proceso de investigación y modelación llevado a cabo durante el curso.

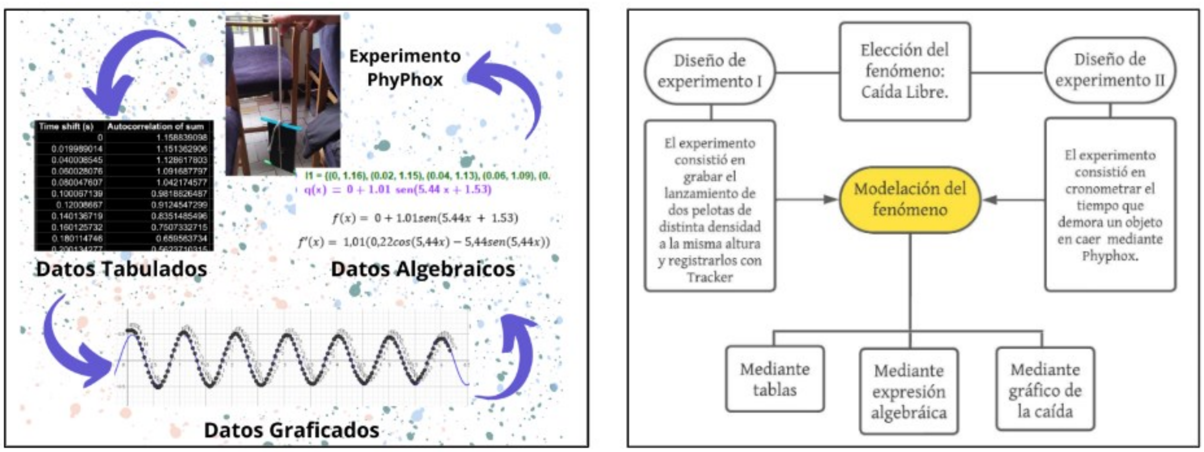


Figura 12. Ejemplos de ciclos de modelación propuestos. Producción de estudiantes.

El proceso que abarca las etapas 1, 2 y 3 de la fase dos, fueron reportadas en Feria Matemática FerMat organizadas por el departamento de Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, el estudiantado reportó sus avances en formato de póster científico, los que fueron presentados ante los aproximadamente 300 estudiantes pertenecientes a los últimos dos años de educación secundaria del sistema escolar chileno.

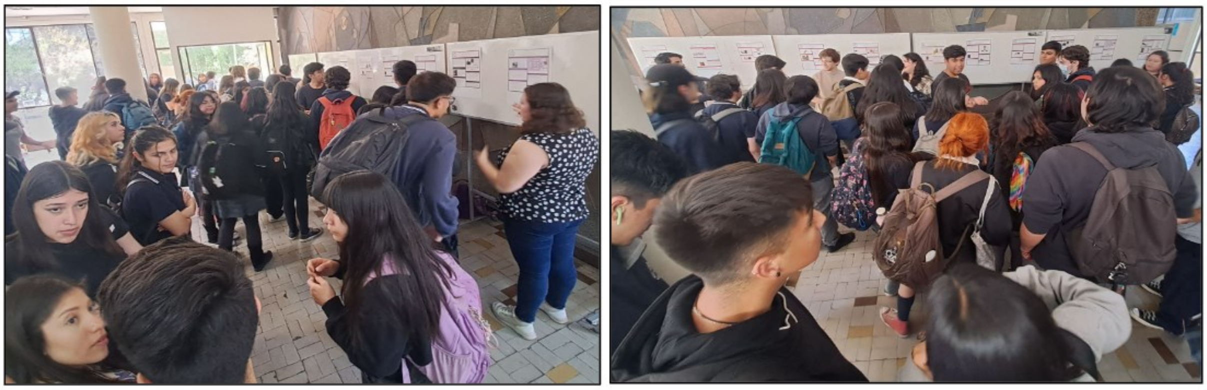


Figura 13. Presentación de póster en FerMat UMCE 2023

4.3 Episodio 3

En este episodio se relata el desarrollo de las actividades 4 y 5 de la fase II, “mirada escolar del fenómeno y las posibilidades de enmarcar curricularmente la exploración” e “institucionalización de los objetos matemáticos puestos en juego en el proceso de modelación”. Se realiza una revisión del programa diferenciado de límites, derivadas e integrales correspondiente al currículo de cálculo escolar de tercero y cuarto medio en Chile. El objetivo principal fue identificar los objetos matemáticos propuestos en dicho programa que permitiera analizar o intervenir los fenómenos estudiados en el ciclo de modelación. Por ejemplo, se evaluó si el concepto de límite podría aplicarse en el estudio de un péndulo, o si la derivada sería útil para analizar un desplazamiento específico.

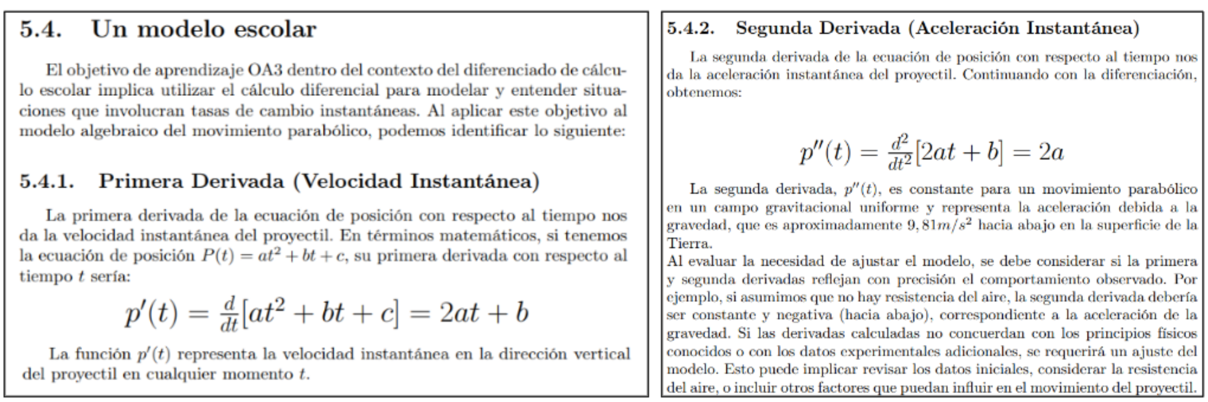
Identificamos los diversos objetivos de aprendizaje dentro del programa de cálculo escolar asociados al objeto matemático seleccionado para intervenir el fenómeno, de esta manera, buscamos determinar cuál de los objetivos del programa se lograría de manera más efectiva mediante el proceso de modelación matemática que estábamos llevando a cabo.

En este sentido, desde el análisis de cada grupo, se seleccionó la derivada como objeto matemático para intervenir los fenómenos estudiados, teniendo como fuerte relación la selección del objetivo de aprendizaje 3 que propone “modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido” y en menor medida el objetivo de aprendizaje 4 “Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función”.

En el caso del límite, en ningún caso se establece como herramienta exclusiva para realizar un análisis, pero sí fue escogida junto con la derivada para analizar el plano inclinado y uno de los análisis realizados sobre el péndulo. En términos de objetivos de aprendizaje, el seleccionado fue el 4 "Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad".

La integral no fue presentada por ninguno de los grupos como parte de sus análisis, en general fue discutida de manera informal en las presentaciones semanales. Esto cobra sentido en las discusiones de los estudiantes al asociarse con el cálculo de áreas, pero fue descartada ya que los espacios estaban a disposición y se podían medir directamente, sin necesidad de la aproximación que entrega la integral. Por ejemplo, cuando se requiere conocer la medida de una superficie, es posible calcularlo a través de integrales, pero los estudiantes decidieron que era más fácil medirla. En este sentido, es importante no forzar el uso de la herramienta matemática.

Observamos que, una vez que los grupos han seleccionado su objeto matemático y objetivo de aprendizaje, intentan identificar las características del objeto matemático que le permiten relacionarse con la matemática escolar propuesta en el objetivo curricular.



5.4. Un modelo escolar

El objetivo de aprendizaje OA3 dentro del contexto del diferenciado de cálculo escolar implica utilizar el cálculo diferencial para modelar y entender situaciones que involucran tasas de cambio instantáneas. Al aplicar este objetivo al modelo algebraico del movimiento parabólico, podemos identificar lo siguiente:

5.4.1. Primera Derivada (Velocidad Instantánea)

La primera derivada de la ecuación de posición con respecto al tiempo nos da la velocidad instantánea del proyectil. En términos matemáticos, si tenemos la ecuación de posición $P(t) = at^2 + bt + c$, su primera derivada con respecto al tiempo t sería:

$$p'(t) = \frac{d}{dt}[at^2 + bt + c] = 2at + b$$

La función $p'(t)$ representa la velocidad instantánea en la dirección vertical del proyectil en cualquier momento t.

5.4.2. Segunda Derivada (Aceleración Instantánea)

La segunda derivada de la ecuación de posición con respecto al tiempo nos da la aceleración instantánea del proyectil. Continuando con la diferenciación, obtenemos:

$$p''(t) = \frac{d^2}{dt^2}[2at + b] = 2a$$

La segunda derivada, $p''(t)$, es constante para un movimiento parabólico en un campo gravitacional uniforme y representa la aceleración debida a la gravedad, que es aproximadamente $9,81 m/s^2$ hacia abajo en la superficie de la Tierra.
Al evaluar la necesidad de ajustar el modelo, se debe considerar si la primera y segunda derivadas reflejan con precisión el comportamiento observado. Por ejemplo, si asumimos que no hay resistencia del aire, la segunda derivada debería ser constante y negativa (hacia abajo), correspondiente a la aceleración de la gravedad. Si las derivadas calculadas no concuerdan con los principios físicos conocidos o con los datos experimentales adicionales, se requerirá un ajuste del modelo. Esto puede implicar revisar los datos iniciales, considerar la resistencia del aire, o incluir otros factores que puedan influir en el movimiento del proyectil.

Figura 14. Ejemplo de modelo escolar. Elaboración de estudiantes.

Durante el proceso de institucionalización, cuyo propósito es articular el conocimiento generado en el proceso de modelación con la matemática escolar propuesta en el currículum desde los objetivos de aprendizaje, la propuesta tiende a centrarse inicialmente en aspectos procedimentales sin dialogar con el fenómeno, sin embargo, nuestra propuesta es profundizar en lo procedimental dialogando y poniendo en juego nociones que son características del fenómeno, el experimento y su modelación. Es posible que esto suceda debido a la necesidad de reconocer un alto valor en lo procedimental como una base para discusiones que impliquen la conceptualización del objeto matemático.

5.5. Institucionalización

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Encuentra la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x.

$$g(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

Calcula la derivada de $g(x)$ respecto a x.

$$h(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2$$

Determina la derivada de $h(x)$ con respecto a x.

$$p(x) = x^5 + 4x^3 - 2x$$

Encuentra la derivada de la función $p(x)$ con respecto a x.

$$q(x) = -2x^4 + 5x^2 - 1$$

Calcula la derivada de $q(x)$ respecto a x.

Contexto: Física - Movimiento de un Vehículo

Considere un automóvil que se desplaza en línea recta, cuya posición en función del tiempo, $s(t)$, está dada por la siguiente ecuación polinómica:

$$s(t) = 4t^3 - 9t^2 + 6t$$

donde $s(t)$ está en metros y t en segundos.

Se pide:

1. **Calcular la Velocidad Instantánea en un Tiempo Específico:** Encuentre la derivada de $s(t)$ para obtener la función de velocidad, $v(t)$. Luego, calcule la velocidad instantánea en $t = 3$ segundos.
2. **Interpretar la Velocidad Instantánea:** Una vez que haya calculado $v(3)$, discuta qué significa este valor en términos del movimiento del automóvil.
3. **Exploración Adicional (Opcional):** Investigue en qué momento(s) el automóvil se detiene (es decir, cuando $v(t) = 0$) y qué implica esto para el movimiento del automóvil.

Figura 15. Ejemplo de propuesta de institucionalización. Elaboración de estudiantes.

5. Análisis y conclusiones

5.1 Rol de la modelación matemática escolar en la FID.

Si bien, la consideración de la modelación es parte de la propuesta de estándares para profesores de matemática vigentes actualmente, las oportunidades que presenta su incorporación en la formación inicial docente de profesores de matemática potencia muchas más aristas no abordadas a nivel de la propuesta. Inicialmente la posibilidad de que futuros profesores vivencien experiencias de modelación en su propio proceso de formación les permitirá poner en juego las herramientas matemáticas que se estudian en el cálculo escolar, significando y en algunos casos resignificando los objetos matemáticos desde el uso de cada uno de ellos.

Lo anterior, vivenciar procesos de modelación, genera un acercamiento de los profesores de matemática en FID a la actividad asociada a la ciencia matemática, permitiendo diálogos entre lo científico y lo escolar, la matemática puesta en uso permite entender e intervenir la realidad y los fenómenos que se encuentran en ella, tanto físicos como sociales.

La revisión de la literatura llevada a cabo sugiere que el uso exclusivo de un solo registro o modelo, especialmente el algebraico, para abordar estos elementos matemáticos, limita la comprensión conceptual del estudiante. Ante esto, la modelación ha de permitir desarrollar en los profesores en FID las herramientas necesarias para discutir y profundizar lo conceptual en torno a los objetos asociados al cálculo escolar, especialmente en lo que respecta a límites, derivadas, integrales y otros conceptos, generando una alternativa en pos de superar los obstáculos reportados.

Finalmente, en términos de la FID, la inclusión de la modelación, debe ser un proceso consciente, experimental, formal y exploratorio, que se consolide en un diseño de aprendizaje individual. Este proceso, aunque requiere un desarrollo mucho más complejo que la exposición teórica o lo procedimental, ofrece una experiencia y una discusión mucho más enriquecedora que el tratamiento clase a clase de los objetos como se propone en el currículum tradicional.

5.2 Modelación como metodología y estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje

Como se señaló en el apartado anterior, la incorporación de la modelación matemática debe ser consciente, experimental, formal y exploratoria. Necesariamente para que esto ocurra se deben generar las estructuras didácticas y metodológicas que permitan su implementación. Con certeza, se manifiesta la necesidad de una constante revisión de los obstáculos, errores y dificultades relacionadas al aprendizaje de los objetos matemáticos asociados al cálculo escolar. Sin embargo, esto se debe contrastar frecuentemente con la puesta en escena. Por ello, este escenario requiere de una vigilancia permanente, que permita el diálogo teórico-práctico y se vaya actualizando constantemente, sin que su construcción se vuelva estática.

Esta permanente vigilancia, ha de permitir que la modelación, como una metodología de trabajo en sí misma, proporcione los espacios necesarios para reflexionar con el fin de superar los obstáculos. Por ejemplo, en la revisión bibliográfica se remarca la necesidad de romper con el modelo algebraico, y a nivel teórico-metodológico el ciclo de modelación que seleccionamos impulsa a generar el diálogo entre los registros gráficos, algebraico y tabular. Por tanto, sistematizar un proceso de modelación en el aula debería generar, por su propia naturaleza, una estructura metodológica con capacidad de adaptarse a las necesidades de entendimiento de cada fenómeno y de quienes realizan el proceso de modelación.

5.3 Evaluación de tecnologías en un contexto de modelación matemática

La incorporación de criterios que permiten establecer e identificar el rol de las tecnologías en un proceso de modelación es fundamental dentro de la dupla modelación-tecnología, porque conecta el dominio de las matemáticas con los fenómenos del mundo real y permite el diálogo entre los registros gráficos, algebraico y tabular, elementos que permiten la construcción de aprendizajes más sólidos. Si bien es posible realizar procesos de modelación sin tecnología, su adecuada incorporación permite relacionar a la matemática con su valor epistémico, permitiendo desde su pragmatismo profundizar y enriquecer la discusión matemática, reconociendo que es precisamente durante el proceso de modelación, donde convergen estos elementos. La calidad, velocidad y procesamiento de los datos es de un carácter altamente pertinente si las tecnologías utilizadas han sido previamente seleccionadas y evaluadas dentro de un conjunto de posibilidades disponibles, entendiendo que la tecnología debe procurar hacer lo que dice que hace, y desde esa claridad apoyar el alcance de los objetivos que se han propuesto.En esta experiencia, se exploraron algunas tecnologías en la primera fase, para la segunda fase se reduce el número de tecnologías utilizadas, de acuerdo al criterio de los profesores en formación basados en su experiencia, el sustento teórico y el objetivo trazado, entendiendo que no existe un camino único, y que la naturaleza del estudio a realizar es parte fundamental de la orientación y herramientas tecnológicas que se seleccionan para sostener el proceso.

5.4 Lo curricular, lo escolar y procedimental del conocimiento matemático

Mirar lo curricular en un contexto de diseño e implementación de experiencias de modelación es una tarea que debe ser realizada de forma sistemática, la capacidad de identificar el uso de un objeto matemático en particular en un contexto de modelación no es una tarea automática, sino que solo se posibilita mediante una constante experimentación con diversidad de fenómenos y de distinta naturaleza. Sin embargo, en la particularidad de este trabajo, al tratarse en su mayoría de fenómenos que implican desplazamiento, la derivada emerge como un objeto matemático que ha de proporcionar mucha información del fenómeno. Ante esto, surge la pregunta: ¿En qué momento se aprende a derivar? Quizás las posibilidades de la modelación pasan por significar lo procedimental, entonces, si los estudiantes son capaces de derivar polinomios de grado n, pero no logran identificar que se trata de una razón de cambio o de una aceleración en un desplazamiento ¿es posible afirmar que saben derivar? En este trabajo se evidencia que la modelación aporta con significados en los objetos matemáticos, permitiendo establecer un puente entre lo matemático y la realidad, obligando a la matemática de la escuela a transformarse en la matemática de la ciencia.

5.5 Investigación acción en un contexto de modelación matemática escolar

Desde que se planteó la mirada de la investigación acción en este trabajo, se generó una profunda interacción entre la actividad investigativa y el quehacer docente, permitiendo diálogos entre lo teórico y lo práctico de forma permanente, permitiendo tomar decisiones en pos de lograr una experiencia de incorporación de la modelación en la formación inicial docente. Este trabajo, desarrollado a nivel de intervención durante un semestre, por su naturaleza de implementación y contexto sociocultural, exigió revisiones constantes del cómo proceder, impactando tanto en lo metodológico del curso y de igual forma en lo investigativo. Además, la propia naturaleza de la modelación posibilitó capturar la riqueza de las discusiones surgidas en los procesos realizados, debido a la variedad de instrumentos utilizados y la gran cantidad de aristas que emergen al trabajar con diversos fenómenos. El rol del profesor-investigador y su versatilidad en términos del tránsito con el diálogo entre los diversos actores, así como el sustento teórico de la investigación, fortalecieron el proceso de enseñanza-aprendizaje, posibilitando finalmente en el contexto de este curso, la adquisición de las herramientas asociadas a la modelación matemática por parte de los profesores de matemática en formación.

Referencias

Acuña, F., Rojas, A., Babb, A., y Rocha, A. (2023). Comparación de Tendencias sobre la Modelización Matemática entre Latinoamérica y el Resto del Mundo: Una Revisión Bibliográfica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 532-554. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a08

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *18*(1), 19–48. https://doi.org/10.12802/relime.13.1811

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *7*, 1-24. https://doi.org/10.46618/iime.148

Bancayán, C. y Vega, P. (2020). La investigación acción en el contexto educativo. *Paideia XXI*, *10*(1), 233–247. https://doi.org/10.31381/paideia.v10i1.2999

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Bravo, J., y Rodríguez, L. (2020). Formación del concepto de integral doble mediante la modelación matemática en la carrera de ingeniería informática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 400–409. Recuperado de https://www.clame.org.mx/actas.html

Cevikbas, M., Kaiser, G. y Schukajlow, S. (2022). A Systematic Literature Review of the Current

Discussion on Mathematical Modelling Competencies: State-of-the-Art Developments in Conceptualizing, Measuring, and Fostering. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 205–236. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10104-6

CPEIP, C. de P., Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática* (Ministerio Educación de Chile).

Espinoza, E. (2020). Reflexiones sobre las estrategias de investigación acción participativa. *Revista Conrado*, *16*(76), 342–349. https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/1494

Forero, A. (2020). Procesos de modelación matemática en formación de profesores de matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias*, *9*(2), 66–79. https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v9n2.86884

Gaona, J. (2018). Integrar tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, factores claves. *REGIES: Revista de Gestión de la innovación*, *3*(1), 75–93. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7306682

González, A., Muñiz, L. y Rodríguez, J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, *47*(4), 449–462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Guevara, G., Verdesoto, A. y Castro, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *RECIMUNDO: Revista Científica de la Investigación y el Conocimiento,* *4*(3), 163-173. ISSN-e 2588-073X. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7591592

Gutiérrez, L., Buitrago, M., y Ariza, L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, *15*(20), 137–153. http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170

Hernandez, C., Prada, R. y Ramírez, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Revista Perspectivas*, *2*(2), 73–83. https://doi.org/10.22463/25909215.1316

Huincahue, J., Borromeo, R. y Mena, J. (2017). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(1), 99–115. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277

La Plata, C. y Malaspina, U. (2019). Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), pp. 441-450. https://www.clame.org.mx/documentos/alme32_1.pdf

Martínez, M. y García, D. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. *Formación universitaria*, *13*(5), 177–190.

https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Mateus, E. (2022). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*, 1593–1615. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

Medina, A. y Rojas, C. (2015). *Obstáculos cognitivos en el aprendizaje de las matemáticas: El caso del concepto de límite* (R. Flores, Ed.; Vol. 28, pp. 330–336). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/10791/

Mejía, L.., Gallo, C.. y Quintana, D. (2022). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *6*(26), 2204–2218. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i26.485

MINEDUC Chile, U. de C. y E. (2021). *Límites, Derivadas e Integrales* (Unidad de Currículum y Evaluación). Recuperado de https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/14312

Molina, J.-A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, *31*(2), 19–36. http://dx.doi.org/10.15359/ru.31-2.2

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea: El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *8*(2), 219–235. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33580207

Mora, A. (2015). Modelación matemática en la formación de profesores. *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación (1)*, 1-13. http://funes.uniandes.edu.co/8352/1/Cap%C3%ADtulo_1__Modelaci%C3%B3n_Matem%C3%A1tica_AMZ.pdf

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *3*(2), 131–170. http://funes.uniandes.edu.co/9599/

Ortiz, J. y Mora, A. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional*, *54*(1), 110–130. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.54-Iss.1-Art.281

Peña, F., Solares, A., Preciado, A. y Ortiz, A. (2023). Comparación de Tendencias sobre la Modelización Matemática entre Latinoamérica y el Resto del Mundo: Una Revisión Bibliográfica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 532–554. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a08

Peña, M. y Morales, J. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería*, *11*(21), 64–71. https://doi.org/10.26507/rei.v11n21.637

Pérez, I. y Carrasco, E. (2018). Análisis de ciclos epistémicos de figuración en base a dipolos modélicos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), 1536–1543. http://funes.uniandes.edu.co/13732/

Pérez, I. (2020). Una significación de los coeficientes de una función cuadrática: Una experiencia de modelación en formación de profesores. *Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica*, *23*, 177–194. https://doi.org/10.25074/07195532.23.1657

Pérez, M. (2019). La investigación acción en la práctica docente. Un análisis bibliométrico (2003-2017). *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *12*(24), 177–192. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-24.ncev

Rodriguez, R. y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99–124. https://doi.org/10.12802/relime.13.1914

Villa, J.., Sánchez, J. y Parra, M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. En *Educación matemática Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (Universidad Nacional de General Sarmiento, Vol. 2). Ediciones Universidad Nacional de General Sarmiento. https://hdl.handle.net/10495/36947

Zaldívar, D., Quiroz, S. y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, *8*(15), 87–110. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2448-85502017000200087&script=sci_arttext