

Dificultades de aprendizaje en el bloque de Cálculo según el profesorado de Ecuador y Colombia: su origen y estrategias didácticas para su enseñanza

Learning difficulties in Calculus according to teachers in Ecuador and Colombia: their origin and didactic strategies for their teaching

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Luis Dubarbie Fernández

luis.dubarbie@unir.net

Universidad Internacional de la
Rioja
España

Recibido: 16 de febrero de 2024

Aceptado: 14 de junio de 2024

Autor de Correspondencia:

Luis Dubarbie Fernández



Resumen. En este trabajo se presentan los resultados de un estudio realizado con docentes de Matemáticas de Ecuador y Colombia sobre las dificultades de aprendizaje que presentan sus estudiantes en relación con contenidos del bloque de Cálculo. En concreto, se profundiza en el origen de las dificultades de aprendizaje asociadas a nociones tan relevantes como función, límite, derivada o integral, observando que la complejidad inherente a la propia materia y las capacidades cognitivas de los estudiantes son consideradas las principales fuentes de estas dificultades de aprendizaje. Finalmente, las estrategias didácticas propuestas mayoritariamente para la mejora de los procesos de enseñanza son la utilización de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), la identificación de los conocimientos previos del alumnado, el diseño de planes de refuerzo y el establecimiento de vínculos entre los contenidos abordados en el aula y la vida cotidiana.

Palabras clave: dificultades de aprendizaje, estrategias didácticas, cálculo, educación secundaria.

Abstract. This paper presents the results of a study conducted with Mathematics teachers from Ecuador and Colombia on the learning difficulties that students encounter regarding the contents of Calculus. Specifically, it delves into the origins of the learning challenges associated with fundamental concepts such as functions, limits, derivatives, and integrals, highlighting that the inherent complexity of the subject itself and the cognitive abilities of the students are considered the primary sources of these learning difficulties. Lastly, the proposed didactic strategies to enhance teaching processes include the utilization of Information and Communication Technologies (ICT), identifying students' prior knowledge, designing reinforcement plans, and establishing connections between the classroom content and real-life experiences.

Keywords: learning difficulties, teaching strategies, calculus, secondary education.

1. Introducción

Identificar las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato en la asignatura de Matemáticas y diseñar estrategias didácticas que permitan superarlas, se han convertido en aspectos fundamentales en numerosas investigaciones dentro del ámbito de la Didáctica de las Matemáticas. En particular, en este trabajo nos vamos a centrar en el bloque de Cálculo, que incluye relevantes nociones matemáticas, como función, límite, continuidad, derivada, integral o infinito.

Para identificar las dificultades de aprendizaje que surgen en torno a nociones propias del Cálculo vamos a analizar de manera descriptiva, tanto cuantitativamente como cualitativamente, las respuestas proporcionadas por profesores de Matemáticas de Ecuador y Colombia a una actividad que forma parte del “Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato” que cursan en la Universidad Internacional de La Rioja (España). Así pues, en esta investigación, nos planteamos los siguientes objetivos:

- Identificar las principales dificultades de aprendizaje que presenta el alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato en el bloque de Cálculo según el profesorado de Matemáticas de Ecuador y Colombia.
- Determinar el origen o las causas de estas dificultades de aprendizaje.
- Proponer estrategias didácticas con la intención de disminuir y superar las dificultades de aprendizaje.

En concreto, para el conocimiento del origen de las dificultades de aprendizaje, vamos a seguir la clasificación propuesta por Socas (1997), en la que, básicamente, se considera que el origen de las dificultades de aprendizaje se encuentra en el microsistema educativo, es decir, en la complejidad inherente a la propia materia, en las diversas capacidades cognitivas que presentan los estudiantes y en los procesos de enseñanza implementados por los docentes en el aula.

2. Marco teórico

En este apartado, vamos a encontrar una recopilación de diversos resultados sobre las dificultades de aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato en el bloque de Cálculo, así como las principales limitaciones que presenta el profesorado en su enseñanza. Además, serán mencionadas algunas investigaciones en las que se proponen estrategias didácticas para tratar de disminuir y superar estas dificultades. Finalmente, se profundizará en la clasificación de las dificultades de aprendizaje propuesta por Socas (1997).

2.1 Dificultades de aprendizaje

El conocimiento de las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato relacionadas con nociones propias del Cálculo es un aspecto que ha sido analizado en numerosas investigaciones en los últimos años.

Por ejemplo, asociado a la noción de función, en el trabajo de Hitt (1998), se observa que, tanto alumnos como profesores, presentan dificultades para transitar entre los diversos sistemas de representación en los que se puede presentar esta noción matemática. Además, en el libro de Abrate et al. (2006), se afirma que se trata de una noción compleja por la gran cantidad de conceptos que están vinculados a ella, como variable, dominio, imagen, dependencia, crecimiento, continuidad, etc. También se indica que una misma función puede ser representada de diferentes maneras (descripción verbal, fórmula algebraica, tabla de valores, representación gráfica, etc.) y se considera que los alumnos no han interiorizado completamente esta noción hasta que no son capaces de pasar de un tipo de representación a cualquiera de las otras.

Por otro lado, Blázquez y Ortega (2001) concluyeron que el uso de distintos sistemas de representación favorece el aprendizaje del límite, facilitando la construcción por parte de los alumnos de un esquema conceptual más amplio de esta noción. A su vez, en el artículo de Vrancken et al. (2006), se identifican claramente las principales dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en relación con la noción de límite. Algunas de estas dificultades están asociadas a la complejidad inherente a la propia noción, como pueden ser que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, dificultades para interpretar los límites laterales o dificultades para comprender que los límites no siempre se calculan por sustitución. A su vez, se han identificado otro tipo de dificultades que interfieren en el proceso de aprendizaje del límite, como dificultades para aplicar los procedimientos algebraicos de resolución de límites, dificultades asociadas a la noción de función y dificultades para transitar entre los distintos sistemas de representación del límite, es decir, incapacidad para asociar el resultado del límite con su interpretación gráfica o viceversa. Finalmente, en (Nagle et al., 2017), se lleva a cabo un análisis de las concepciones que tienen los alumnos sobre la noción de límite, lo que ha permitido concluir que presentan dificultades de aprendizaje asociadas a la falta de razonamiento covariacional, es decir, dificultades en el proceso de coordinación de los cambios tanto en la variable independiente como en la dependiente.

Profundizando ahora en la noción de derivada, en (Sánchez-Matamoros et al., 2006), se estudia la construcción del esquema (según la teoría APOS) de esta noción por parte del alumnado de Bachillerato y del primer curso universitario. Como resultado de este estudio, se muestra que el desarrollo del esquema de derivada está vinculado a la capacidad de los estudiantes para relacionar elementos constitutivos del concepto durante la resolución de problemas, lo que les ha permitido clasificar a los estudiantes participantes en dicha investigación en los niveles intra, inter y trans. A su vez, estos mismos autores, en el año 2008, llevaron a cabo una revisión de la literatura relacionada con la comprensión por parte de los alumnos de Bachillerato y del primer año universitario del concepto de derivada, llegando a la conclusión de que, para poder dar forma a la derivada de una función en un punto, es fundamental manejar de manera eficiente los conceptos de razón de cambio y cociente incremental, y que el uso de distintos sistemas de representación enriquece la construcción del esquema conceptual de la noción de derivada. Además, en (González-García et al., 2018), se observa que los estudiantes adquieren con menos dificultades el concepto de derivada en el ámbito algebraico que en el geométrico, que cometen menos errores a la hora de realizar procedimientos sistemáticos con esta noción matemática y que presentan grandes dificultades en su interpretación y en su comprensión. A su vez, Briceño et al. (2018) observaron que los estudiantes del primer curso de la licenciatura en Matemáticas de México también tienen dificultades para la interpretación y la comprensión de la derivada desde un enfoque gráfico, a la vez que se evidencia una clara preferencia por el tratamiento algebraico de la derivada. Por último, en (Ozaltun-Celik, 2021), se analiza la manera en la que una estudiante de primer curso universitario relaciona la tasa de variación (media o instantánea) con la representación gráfica de la derivada. Entre las conclusiones obtenidas, se muestra la importancia de una sólida comprensión de la noción de función y de las tasas de variación media e instantánea para obtener una visión global de la derivada.

Los siguientes resultados explican el comportamiento del alumnado en relación con la integración impropia y con la integral definida en el ámbito universitario. Por un lado, González-Martín y Camacho Machín (2005) proponen algunas de las dificultades, obstáculos y errores con los que se encuentran los alumnos al interiorizar los conceptos relativos a la integración impropia; algunas de estas dificultades resultan inherentes al propio concepto de integral impropia, mientras que otras vienen propiciadas por la ausencia de significado de otros conceptos matemáticos, como función, límite, convergencia, series y sucesiones, por ejemplo. Por otro lado, en (Camacho et al., 2008), se observa que, utilizando el CAS (Computer Algebra System) Derive en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral

definida, los estudiantes la identifican con el cálculo de áreas, lo que difiere por completo con lo deducido por Llorens y Santonja (1997) en un contexto puramente algebraico del cálculo de la integral definida. Además, no muestran dificultades en el cálculo de integrales de funciones continuas, algo que no ocurre cuando se trabaja con funciones continuas a trozos y con funciones que provienen de otros contextos.

2.2 Dificultades en la enseñanza

En ocasiones, la causa de las dificultades de aprendizaje que padece el alumnado se encuentra asociada a los procesos de enseñanza utilizados en el aula. De esta manera, el profesorado y sus prácticas docentes se pueden convertir en la fuente de alguna de sus dificultades de aprendizaje.

En el libro de Abrate et al. (2006), se observó que algunas dificultades de aprendizaje surgidas en torno a la noción de función se deben a que el profesorado se centra en el paso de la representación algebraica de una función a su representación gráfica, obviando en muchas ocasiones el camino inverso, es decir, el proceso de extracción de información relevante de una función a partir de su representación gráfica. Otra fuente de dificultades de aprendizaje asociada a las prácticas docentes en el aula fue identificada por Hitt (1994), donde se muestra la clara preferencia del profesorado por representar las funciones solo mediante funciones continuas, obviando que las funciones discontinuas son otro tipo de función.

En relación con la noción de límite, Blázquez y Ortega (2001) concluyeron que el abuso del tratamiento del límite a través del registro algebraico llevado a cabo tradicionalmente por el profesorado genera una comprensión parcial de esta noción, por lo que recomiendan la utilización de distintos sistemas de representación en su proceso de enseñanza. De manera análoga, en el trabajo de Contreras de la Fuente et al. (2003), se obtiene la misma conclusión para las nociones de continuidad y derivada. Además, la integral es otra noción propia del Cálculo que suele generar dificultades de aprendizaje entre el alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato. De hecho, Llorens y Santonja (1997) ponen de manifiesto que la excesiva concepción algebraica de la noción de integral, promovida desde la enseñanza tradicional mediante el cálculo de primitivas y la aplicación de la regla de Barrow, tiene como consecuencia que los alumnos olviden la relación entre este concepto y el cálculo de áreas.

Por otro lado, en (Hitt, 2003), se aprecia cómo el infinito se puede convertir en un obstáculo de aprendizaje para el desarrollo de otras nociones del Cálculo, como la continuidad o el

límite de funciones. Además de las dificultades inherentes a la propia noción de infinito, en los estudiantes también surgen dificultades de aprendizaje promovidas por la incapacidad del profesorado para diferenciar las concepciones de infinito potencial e infinito actual. Esta misma dificultad se ve ratificada en el estudio de Montes y Carrillo (2017), en donde se añaden las dificultades que presenta el profesorado en la didáctica de esta noción matemática, es decir, en los procedimientos utilizados para transmitir este conocimiento a su alumnado. Finalmente, en (Montes et al., 2018), se menciona que, para favorecer la comprensión de esta noción por parte de su alumnado, es importante que el profesorado sea capaz de vincular el infinito con otros conceptos matemáticos.

2.3 Estrategias didácticas

Uno de los aspectos menos abordados en relación con las dificultades de aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato en el bloque de Cálculo es el diseño de estrategias didácticas con la finalidad de minimizar estas dificultades. Sin embargo, en los últimos años, se han llevado a cabo algunas investigaciones en esta dirección.

Según Ortega y Pecharromán (2014), para un correcto aprendizaje de las funciones, se propone una estrategia didáctica en la que se lleve a cabo la coordinación entre distintos sistemas de representación. Para ello, consideran que se debe partir de su representación gráfica, por ser la más intuitiva y cercana para el alumnado, e ir pasando por los distintos sistemas de representación hasta desembocar en su representación algebraica.

En (Vrancken y Engler, 2014), se lleva a cabo el diseño de una secuencia didáctica para tratar de deducir la noción de derivada con estudiantes de primer año universitario en Argentina. La secuencia didáctica comienza con el estudio de la razón de cambio media, posteriormente se profundiza en la razón de cambio instantánea y, finalmente, se trata de vincular esta última con la derivada a través del límite. Para ello, se plantean actividades relacionadas con la Física y se consideran distintas modalidades del trabajo grupal (por parejas, grupos pequeños o todos los estudiantes) para su desarrollo. El tratamiento fundamentalmente visual de las actividades, así como el trabajo oral desarrollado, favoreció la conversión entre las representaciones gráfica, numérica, analítica y verbal, lo que favorece la comprensión de la noción de derivada.

De manera general, para abordar los problemas existentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el bloque de Cálculo, en (Hitt, 2017), se proponen tres grandes líneas de actuación. En primer lugar, hacer uso de las teorías sobre representaciones, que han enfatizado en los procesos de conversión entre distintos sistemas de representación (gráfico, tabular,

algebraico y verbal). En segundo lugar, integrar en los procesos de enseñanza la utilización de las nuevas tecnologías y, finalmente, utilizar procesos de modelación matemática.

En el trabajo de Gavilán-Izquierdo et al. (2021), se constata el hecho de que el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza de la noción de derivada en Educación Secundaria y Bachillerato favorece la construcción de un adecuado esquema conceptual por parte del alumnado, ya que pueden dedicar más tiempo a la reflexión sobre los nuevos contenidos sin la necesidad de realizar excesivos cálculos.

Relacionado con la integración de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza del Cálculo en Educación Secundaria y Bachillerato, en (Barreras et al., 2022), se estudia la idoneidad didáctica de los *applets* de GeoGebra diseñados para abordar la noción de límite de una función. Pues bien, tras el análisis de 150 *applets* obtenidos del repositorio de GeoGebra en función de las cinco variables consideradas (tipo de límite, interactividad, imagen conceptual, representación y acción), se observó que la interactividad es un aspecto a tener en cuenta a la hora de seleccionar los *applets* que el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato va a utilizar en el aula, ya que permiten trabajar una mayor variedad de imágenes conceptuales del límite que los no interactivos, más enfocados al trabajo exclusivamente algebraico. Además, también se debe tener en cuenta la cantidad de sistemas de representación del límite presentes en los *applets* (en consonancia con Blázquez y Ortega, 2001), ya que se promueve la realización de varias acciones entre estos sistemas de representación.

2.4 Origen de las dificultades de aprendizaje: Socas (1997)

En esta investigación, para tratar de identificar el origen de las dificultades de aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato en el bloque de Cálculo, vamos a seguir la clasificación propuesta por Socas (1997). Inicialmente, consideró que las dificultades de aprendizaje que padecen los estudiantes tienen su origen en el microsistema educativo, es decir, están relacionadas con la materia (currículo de las Matemáticas), con el profesorado (procesos de enseñanza) y con los propios estudiantes (desarrollo cognitivo). Posteriormente, estableció cinco categorías para clasificar de manera más precisa la procedencia de las dificultades de aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato en la asignatura de Matemáticas. A continuación, se mencionan dichas categorías y se indican algunas de sus principales características:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
 - Inherentes a la complejidad de la propia materia.
 - Consecuencia de la naturaleza abstracta de las nociones matemáticas.
 - Dificultades para establecer los vínculos entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje matemático.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
 - Surgen en el desarrollo de los procesos propios del pensamiento matemático avanzado. Por ejemplo, en la evolución de la concepción operacional a la concepción estructural (Sfard, 1991) o en la construcción del esquema conceptual a partir de la definición del concepto (Tall y Vinner, 1981).
 - Debidas a la naturaleza lógica de las Matemáticas.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.
 - Asociadas a los métodos de enseñanza utilizados por el profesorado: lenguaje adaptado a las capacidades y comprensión de los estudiantes, secuenciación didáctica adecuada a la lógica interna de las Matemáticas, ritmos de trabajo adaptados a las individualidades presentes en el aula, selección correcta de la metodología y de los recursos, etc.
 - Institución escolar: materiales y recursos suficientes para el desarrollo de un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo del alumnado.
 - Relacionadas con el condicionamiento de los procesos de aprendizaje en función del desarrollo cognitivo de los estudiantes.
 - Asociadas a enfermedades o trastornos que condicionan el aprendizaje.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.
 - Respuestas emocionales negativas de los estudiantes como consecuencia de la actitud de algunos docentes, los estilos de enseñanza empleados y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas.

3. Descripción del problema y metodología

En este manuscrito, vamos a analizar las respuestas dadas a una de las actividades realizadas por los estudiantes del “Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato” de la Universidad Internacional de La Rioja (España). En concreto, esta actividad forma parte de la asignatura “Didáctica del Análisis” y lleva por

Dificultades de aprendizaje en el bloque de Cálculo según el profesorado de Ecuador y Colombia: su origen y estrategias didácticas para su enseñanza

nombre “Identificando dificultades de aprendizaje”. En la misma, se solicita a los estudiantes que redacten un informe identificando las principales dificultades de aprendizaje que surgen entre su alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato vinculadas con alguna o varias nociones propias del Cálculo, que reflexionen sobre su origen o posibles causas y, finalmente, que propongan alguna estrategia didáctica para tratar de solventarlas.

El análisis que realizaremos de las respuestas dadas por los estudiantes del Máster en esta actividad será tanto cuantitativo como cualitativo y de carácter descriptivo (Leavy, 2017). La muestra de este estudio está formada por los 63 estudiantes del Máster que han realizado esta actividad, por lo que nos encontramos ante una muestra de tipo censal.

A su vez, debido a su carácter online, esta institución tiene estudiantes de diversas nacionalidades, especialmente de España y de América Latina. Así, en la siguiente tabla, se especifican algunas características de los participantes en esta investigación:

Tabla 1
Información de los participantes

NACIONALIDAD		GÉNERO	
Colombia	Ecuador	Mujer	Hombre
13	50	33	30

Por lo tanto, en virtud de la descripción de la actividad que va a ser analizada y de las características de los participantes, el objetivo general de este estudio es el siguiente:

- Identificar las principales dificultades de aprendizaje que, a juicio del profesorado de Matemáticas de Ecuador y Colombia que cursa el “Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato” de UNIR, presentan sus estudiantes asociadas a contenidos propios del Cálculo, reflexionar sobre su posible origen y proponer estrategias didácticas para tratar de minimizar estas dificultades de aprendizaje.

4. Resultados

En un primer contacto con las actividades que forman parte de este estudio, hemos observado que algunos estudiantes del Máster no identifican adecuadamente los contenidos propios del

bloque de Cálculo. Concretamente, en algunas actividades se describen dificultades de aprendizaje relativas a contenidos del bloque de Números y Álgebra, en otras se analizan dificultades asociadas a contenidos del bloque de Geometría y también hay actividades en las que se identifican dificultades de aprendizaje sin especificar los contenidos con los que se vinculan.

Tabla 2

Bloques de contenidos analizados

Cálculo	42
Números y Álgebra	14
Geometría	3
Sin especificar	4

Por lo tanto, la tercera parte del profesorado participante en este estudio no ha identificado correctamente los contenidos pertenecientes al bloque de Cálculo. Como consecuencia, dado que nuestro interés se centra en identificar las principales dificultades de aprendizaje en este ámbito, a partir de este momento la muestra se reduce a 42 docentes de Ecuador y Colombia que cursan el correspondiente Máster en UNIR.

En concreto, dentro del bloque de Números y Álgebra, destaca la presencia de dificultades de aprendizaje relacionadas con los distintos sistemas numéricos, como las dificultades con las operaciones de números enteros y de números racionales o los problemas para identificar los elementos de cada uno de ellos. También, en relación con las sucesiones, se identifican dificultades a la hora de determinar su término general o para diferenciar entre las progresiones aritméticas y las geométricas. En el ámbito algebraico, podemos encontrar dificultades de aprendizaje asociadas a las operaciones con polinomios, las identidades notables, la resolución de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de ecuaciones lineales, e incluso con el propio lenguaje algebraico. En menor medida, también se mencionan dificultades con las potencias, los radicales, los intervalos y las desigualdades.

$$\boxed{\text{i) } (a + b)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{2) } 3x + 3x = 6x^2}$$

Figura 1. Errores frecuentes en el bloque de Números y Álgebra (participante 25)

Por otro lado, en el bloque de Geometría, los participantes en el estudio han centrado las dificultades de aprendizaje en la geometría plana (al identificar los catetos y la hipotenusa de

Dificultades de aprendizaje en el bloque de Cálculo según el profesorado de Ecuador y Colombia: su origen y estrategias didácticas para su enseñanza

un triángulo rectángulo para la aplicación del Teorema de Pitágoras), la geometría espacial, la circunferencia (definición e identificación de sus elementos característicos) y la trigonometría.

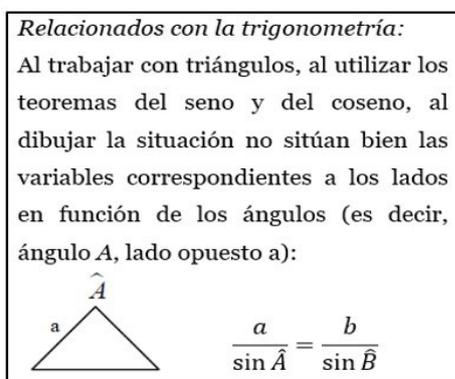


Figura 2. Errores frecuentes en el bloque de Geometría (participante 49)

Finalmente, cabe mencionar que el contexto socioeconómico en el que se desarrolla cada estudiante condiciona notablemente su proceso de aprendizaje, como así se manifiesta en uno de los comentarios realizados por un docente que ha participado en esta investigación al respecto de las dificultades de aprendizaje de su alumnado.

Para poder entender los errores más comunes en el aprendizaje del análisis matemático es complicado porque en Latinoamérica, específicamente en Colombia, en la zona donde trabajo es de postconflicto y la atención hacia el área es complicada, porque han sido lugares de guerra y miseria, donde cada estudiante se levanta cada día pensando que va a comer y trae otras problemáticas a la escuela.

Figura 3. Dificultades de aprendizaje de origen socioeconómico (participante 52)

A este respecto, en (Cervini, 2002), se analiza la influencia del origen social de los estudiantes y del entorno socioeconómico del centro educativo en el rendimiento en Matemáticas y Lengua de los estudiantes de Secundaria en Argentina.

4.1 Dificultades de aprendizaje identificadas

El siguiente paso en nuestra investigación, consiste en identificar aquellos contenidos del Cálculo en los que se han centrado los participantes a la hora de describir las dificultades de aprendizaje. Pues bien, tras la revisión de las correspondientes actividades, se han obtenido los siguientes datos:

Tabla 3***Contenidos del bloque de Cálculo***

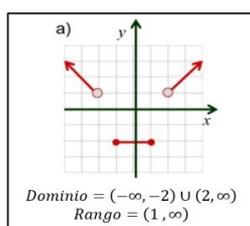
Función	21
Límite	24
Continuidad	2
Derivada	11
Integral	6
Infinito	2

La primera conclusión a la que podemos llegar es que un alto porcentaje de participantes ha incluido más de un contenido del bloque de Cálculo en su actividad. Por otro lado, se observa que, mayoritariamente, se han decantado por el estudio de las dificultades de aprendizaje relacionadas con los límites y con las funciones, mientras que contenidos como la continuidad o el infinito apenas han sido abordados.

A continuación, van a ser enumeradas, en orden decreciente de frecuencia, las dificultades de aprendizaje identificadas en relación con los contenidos del bloque de Cálculo que se recogen en la tabla 3.

1. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de *función*:

- Calcular el dominio y el recorrido o rango. Distinguir ambos conceptos.
- Determinar la variable independiente y la variable dependiente.
- Pasar de la representación algebraica a la representación gráfica.
- Establecer el vínculo existente entre los distintos tipos de representación de una función (verbal, tabular, algebraica, gráfica, etc.).
- Identificar las representaciones en el plano cartesiano que son función.
- Calcular del valor numérico de una función en un punto.
- Dificultades con las funciones definidas a trozos.
- Diferenciar entre relación y función.
- Relacionar la noción de función con la vida cotidiana.
- Identificar las principales características de una función a partir de su representación gráfica (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, continuidad, etc.).



Dada la función $f(x) = -4x + 1$. Evaluar la función en $x = -2$.
 $f(-2) = 4(-2) + 1 = -7$ **Incorrecto**

Figura 4. Dificultades asociadas a la noción de función (participantes 16 y 20)

2. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de *límite*:

- Dificultades algebraicas y aritméticas en la resolución de límites (factorización de polinomios, cálculo del valor numérico de una función en un punto, etc.).
- Asociar el límite de una función en un punto con el valor de la función en el punto (sin tener en cuenta su continuidad).
- Considerar el límite como un simple procedimiento algebraico (no dar sentido a la noción de límite).
- Falta de comprensión de la noción de límite lateral.
- Dificultades asociadas a la complejidad de la noción de límite (noción abstracta).
- Dificultades con la noción de infinito y problemas para interpretar los límites infinitos y los límites en el infinito.
- Problemas para vincular la noción de límite con la vida real.
- Asociar la presencia de una indeterminación con la no existencia del límite (dificultades para la resolución de indeterminaciones).
- Determinar límites de funciones definidas a trozos.
- Incorrecto uso de la simbología.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}
 \end{aligned}$$

Pese a que identifica que debe racionalizar, confunde la expresión $(a+b)(a-b)$ con $(a+b)^2$.

Figura 5. Dificultad de aprendizaje asociada a la noción de límite (participante 46) por deficiente habilidad algebraica

3. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de *continuidad*:

- Dificultades en la resolución de límites.
- Identificar los distintos tipos de discontinuidades.
- Dificultades asociadas a los procedimientos algebraicos. Abuso de los cálculos algebraicos, obviando el uso de la representación gráfica de una función para determinar su continuidad.
- Problemas en el estudio de la continuidad de funciones definidas a trozos.

4. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de *derivada*:

- Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Expresión de la derivada como límite del cociente incremental.
- Dificultades algebraicas en el cálculo de derivadas, ya sea en la aplicación de su definición como límite o en la utilización de las correspondientes fórmulas.
- Aplicaciones de la derivada en la vida real.
- Falta de conocimientos previos sobre nociones como función, límite o continuidad.

» Se les complica reemplazar el valor de la función $f(x)$ en $f(x+h)$ para poder resolver el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

» Dificultades con la regla de la cadena:

$$f(x) = (5x^2 - 2x)^4(3x^3 - 2)^2$$

ERROR COMETIDO:

$$f'(x) = 4(5x^2 - 2x)^3(3x^3 - 2)^2 + 2(3x^3 - 2)(5x^2 - 2x)^4$$

Figura 6. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de derivada (participante 27) por deficiente habilidad algebraica

5. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de *integral*:

- Identificar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Determinar las condiciones para la aplicación de la regla de Barrow.
- Calcular la integral definida de funciones definidas a trozos.
- Seleccionar el método de integración adecuado en cada situación.

Dificultades: Las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse.

Figura 7. Dificultad de aprendizaje asociada a la noción de integral (participante 51)

6. Dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de *infinito*:

- Considerar el infinito como un número y no como un concepto.
- Dificultades en la resolución y en la interpretación de límites en el infinito, límites infinitos e indeterminaciones en las que aparece el infinito.

4.2 Origen de las dificultades de aprendizaje

En un primer acercamiento al origen de las dificultades de aprendizaje que han sido identificadas en el ámbito del Cálculo, vamos a seguir la estrategia inicial propuesta por Socas (1997), en la que consideraba que las fuentes de estas dificultades de aprendizaje estaban asociadas a la materia, al profesorado y al alumnado.

Así, en nuestro estudio, hemos observado que el profesorado de Matemáticas de Ecuador y Colombia considera, de manera mayoritaria, que la complejidad inherente a la propia materia y las capacidades cognitivas de los estudiantes son las principales fuentes de las dificultades de aprendizaje, mientras que, en menor medida, estiman que el propio profesorado y sus procesos de enseñanza también se encuentran en el origen de estas dificultades, como se refleja en la siguiente tabla:

Tabla 4

Origen de las dificultades de aprendizaje I

Materia	Profesor	Alumno
36	18	35

Profundizando en las causas que se encuentran en el origen de las dificultades de aprendizaje relacionadas con las Matemáticas en Educación Secundaria, como ya hemos mencionado, Socas (1997) estableció cinco nuevas categorías que también son identificadas en nuestro estudio. En la siguiente tabla, se puede observar la cantidad de docentes de Matemáticas de Ecuador y Colombia que se decantan por cada una de ellas como posibles fuentes de las dificultades de aprendizaje que padecen sus estudiantes.

Tabla 5***Origen de las dificultades de aprendizaje II***

1. Complejidad de los objetos de las matemáticas	30
2. Procesos de pensamiento matemático	31
3. Procesos de enseñanza	18
4. Desarrollo cognitivo de los alumnos	30
5. Actitudes afectivas y emocionales	7

En la tabla anterior, se puede observar cómo las dificultades asociadas a la complejidad de la materia se reparten de manera prácticamente equitativa entre las asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas y las asociadas a los procesos de pensamiento matemático. Como consecuencia de ello, se aprecia que ha resultado complicado distinguir entre ambos tipos de dificultades vinculadas con la materia para los profesores participantes en este estudio. Sin embargo, no ocurre así con las dificultades cuyo origen está vinculado con el alumnado, ya que las dificultades de este tipo identificadas en la tabla 4 han sido distribuidas de manera prácticamente disjunta entre las dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos y las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas en la tabla 5.

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Dificultad para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto. - Dificultad para reconocer e interpretar límites laterales. - Dificultad para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución. - Dificultad para concebir la idea de límite en el infinito. - Dificultad para comprender que la indeterminación no quiere decir que no se puede obtener el límite. |
|--|

Figura 8. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas y a los procesos de pensamiento matemático (participante 45)

Causa
Con frecuencia, como docentes, nos centramos en la construcción de gráficas a partir de una expresión algebraica. Este proceso se hace sin una reflexión previa de las diversas formas de representar una función.

Figura 9. Dificultad asociada a los procesos de enseñanza (participante 54)

Posibles causas
<ul style="list-style-type: none"> • Presentan emociones negativas hacia la asignatura de Matemática ya sea por influencia o sentir propio (descuido). • Los estudiantes se sienten afectados por el nivel de razonamiento y concentración que conlleva el cálculo integral, a la hora de seguir algunos procesos lógicos.

Figura 10. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas y al desarrollo cognitivo de los alumnos (participante 10)

4.3 Estrategias didácticas para reducir las dificultades de aprendizaje

Por último, en la actividad analizada, también se solicita al profesorado de Matemáticas de Ecuador y Colombia la propuesta de posibles estrategias didácticas o metodológicas para tratar de disminuir las dificultades de aprendizaje identificadas anteriormente. A continuación, se muestran las estrategias planteadas por los 42 participantes en el estudio.

Tabla 6

Estrategias didácticas para disminuir las dificultades de aprendizaje

Utilización de las TIC	26
Prueba de diagnóstico	19
Plan de refuerzo de contenidos previos	19
Relacionar los contenidos con la vida cotidiana	19
Secuenciación de contenidos adecuada	9
Utilización de las TIC (GeoGebra)	9
Fomentar el aprendizaje significativo	7
Trabajo en grupos cooperativos	7
Uso adecuado del lenguaje	5
Fomentar la participación del alumnado	4
Metodologías innovadoras (sin especificar)	4
ABP (Aprendizaje Basado en Proyectos)	2
APOS (descomposición genética)	2
Flipped Classroom	2

Aprendizaje en espiral	1
Mejorar la comprensión lectora	1
Intercambiar experiencias con otros docentes	1
Factores afectivos del profesorado	1
Mejorar la formación del profesorado	1
Utilización de simulaciones	1

Para tratar de ilustrar las estrategias didácticas o metodológicas propuestas por los participantes en esta investigación, se muestra la siguiente respuesta:

Algunas propuestas para su remedio.

- “Los factores afectivos del profesorado tienen una gran influencia en los alumnos y en los logros de éstos”. (Cabello y Blanco , 2017). Los docentes de Matemáticas debemos usar metodologías innovadoras con estrategias didácticas que ayuden al aprendizaje significativo de los estudiantes.
- Aplicar la evaluación diagnóstica a los estudiantes para conocer sus dificultades, así el docente organiza estrategias generales y específicas para conducir mejor el proceso de enseñanza – aprendizaje, propiciando la participación activa del estudiante.

Figura 11. Estrategias didácticas (participante 10)

5. Discusión y conclusiones

En primer lugar, hemos observado que los docentes de Matemáticas de Ecuador y Colombia que han participado en este estudio presentan dificultades para identificar los contenidos propios del bloque de Cálculo. De hecho, la tercera parte no ha realizado una adecuada selección de los contenidos para la realización de la actividad propuesta.

Por otro lado, profundizando en las dificultades de aprendizaje identificadas, podemos afirmar que los procedimientos algebraicos se convierten en una fuente de dificultades para el desarrollo de los contenidos del bloque de Cálculo. Además, puesto que estos contenidos están conectados entre sí, las dificultades que surgen en torno a unos son heredadas por los demás. Otra preocupación que muestran los participantes en este estudio es el escaso interés por relacionar los contenidos del bloque de Cálculo con la vida cotidiana, lo que genera dificultades de aprendizaje entre el alumnado. Finalmente, merece ser mencionado que las dificultades asociadas al trabajo con funciones definidas a trozos surgen de manera recurrente.

En concreto, entre las dificultades relacionadas con la noción de función, destaca la presencia de una gran cantidad de dificultades que surgen asociadas a su definición; por ejemplo, en el

cálculo del dominio y del recorrido, en la identificación de las variables dependiente e independiente y a la hora de diferenciar entre relación y función, reafirmando lo indicado en Abrate et al. (2006). Además, también son mencionadas las dificultades de los estudiantes con las distintas maneras de representar una función (verbal, tabular, algebraica, gráfica, etc.), como ya habían identificado Hitt (1998, 2017) y Abrate et al. (2006).

Entre las dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de límite podemos destacar dos grandes categorías. Por un lado, aquellas dificultades vinculadas a la complejidad de la propia noción, que se manifiestan en la identificación del límite de una función en un punto con el valor numérico de la función en dicho punto, la incorrecta utilización de los límites laterales en el cálculo de límites o las dificultades que surgen en la resolución de las indeterminaciones. Por otro lado, el aprendizaje de la noción de límite está fuertemente condicionado por la abundante presencia de dificultades en los procedimientos algebraicos y aritméticos como, por ejemplo, al factorizar polinomios, al operar con fracciones algebraicas o en el cálculo del valor numérico de una función en un punto. Todas estas dificultades relacionadas con la noción de límite corroboran los resultados obtenidos en Vrancken et al. (2006).

En el estudio de la continuidad de una función, surgen dificultades a la hora de diferenciar los distintos tipos de discontinuidades. Además, se observa que se arrastran las dificultades de aprendizaje relacionadas con la noción de límite y queda constancia del abuso que se realiza de los cálculos algebraicos, minimizando el uso de la representación gráfica de las funciones para estudiar su continuidad, lo que encaja con la principal conclusión del trabajo de Contreras de la Fuente et al. (2003).

Por otro lado, como ya se observó en Sánchez-Matamoros et al. (2008) y en Ozaltun-Celik (2021), en este estudio también se concluye que las mayores dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de derivada surgen en torno a la utilización de la derivada como el límite del cociente incremental y a su interpretación geométrica. También queda patente que las dificultades relacionadas con nociones como función, límite o continuidad condicionan la aparición de dificultades asociadas a la noción de derivada. Finalmente, al igual que en los resultados de Briceño et al. (2018) y en González-García et al. (2018), en este trabajo se observa cómo las dificultades de origen algebraico condicionan el aprendizaje y la realización de procedimientos vinculados con la noción de derivada.

Las principales dificultades de aprendizaje vinculadas con la noción de integral se encuentran al identificar la integral definida con el cálculo de áreas y al establecer las condiciones para poder aplicar la regla de Barrow, como así habían observado Llorens y Santonja (1997). Además, también se reafirma la principal conclusión obtenida en el trabajo de Camacho et al. (2008), puesto que se aprecia que no hay excesivas dificultades en el cálculo de integrales definidas con funciones continuas, pero sí surgen con las funciones definidas a trozos.

Por último, revisando las dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de infinito que han sido identificadas en este trabajo, podemos concluir que esta noción no solo genera dificultades por su propia complejidad y su marcado carácter abstracto (Montes y Carrillo, 2017), sino que también genera dificultades cuando se encuentra presente en la resolución de límites, como ya apreció Hitt (2003).

Poniendo ahora el foco de atención en el origen de las dificultades de aprendizaje, los datos obtenidos en la tabla 4 revelan que una amplia mayoría del profesorado de Matemáticas de Ecuador y Colombia que ha participado en este estudio considera que la propia materia y las capacidades cognitivas del alumnado se encuentran en el origen de las dificultades de aprendizaje de sus estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato en el bloque de Cálculo, mientras que tan solo el 43% estima que los propios docentes también deben ser considerados como una fuente de sus dificultades de aprendizaje.

Para precisar las conclusiones obtenidas anteriormente, un análisis de los datos recogidos en la tabla 5, permite deducir que los participantes en el presente estudio se decantan claramente por aquellas fuentes de dificultades de aprendizaje relacionadas con la complejidad de la materia y con las capacidades cognitivas del alumnado (dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático y dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos). Finalmente, cabe destacar que, apenas el 17% de los participantes en este estudio, considera que las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas sean una fuente de dificultades de aprendizaje.

Entre las estrategias didácticas o metodológicas propuestas para paliar o minimizar las dificultades de aprendizaje (véase la tabla 6), destaca claramente la inclusión de las TIC (Tecnologías de la Información y las Comunicaciones) en los procesos de enseñanza-aprendizaje, propuesta por casi el 62% del profesorado participante en este estudio. Además, en 9 de las 26 ocasiones en las que se propuso la utilización de las TIC, también se concretó el uso del software matemático GeoGebra.

Dificultades de aprendizaje en el bloque de Cálculo según el profesorado de Ecuador y Colombia: su origen y estrategias didácticas para su enseñanza

En menor medida, aunque también destacadas, encontramos otras tres estrategias didácticas; realizar una prueba de diagnóstico con la finalidad de identificar los conocimientos previos del alumnado, diseñar un plan de refuerzo de los conocimientos previos y tratar de relacionar los contenidos abordados en el aula con la vida cotidiana del alumnado. Otras posibles medidas para tratar de reducir las dificultades de aprendizaje son el diseño de una adecuada secuenciación de contenidos, la búsqueda de una correcta metodología para favorecer el aprendizaje significativo y el trabajo en grupos cooperativos. Por último, aunque pasan prácticamente desapercibidas, cabe señalar la presencia de algunas medidas encaminadas a la mejora de las competencias del profesorado. De esta manera, podemos encontrar medidas como el intercambio de experiencias entre docentes, la mejora de los factores afectivos del profesorado hacia el alumnado y la mejora de su formación.

Una posible línea de investigación que se abre a partir de este trabajo es la realización de estudios, que complementen los ya existentes (véase el apartado 2.3), en los que se analice la eficacia de las estrategias didácticas propuestas para reducir las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato en el bloque de Cálculo.

6. Agradecimientos

A los revisores de la revista, por sus interesantes comentarios que han contribuido a la mejora de este trabajo.

7. Referencias

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.
- Barreras, Á, Dubarbie, L. y Oller-Marcén, A. M. (2022). Análisis de *applets* de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón, Revista de Pedagogía*, 74(4), 65-83. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.93361>
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME*, 4(3), 219-236.
- Briceño, E., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y su Enseñanza*, 10(1), 31-48. <https://doi.org/10.61174/recacym.v10i1.23>

- Camacho, M., Depool, R. y Garbin, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20(3), 33-57. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol20/3/vol20-3-03_REM_20-2.pdf
- Cervini, R. (2002). Desigualdades socioculturales en el aprendizaje de Matemática y Lengua de la Educación Secundaria en Argentina: un modelo de tres niveles. *RELIEVE - Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 8(2), 126-148. <https://doi.org/10.7203/relieve.8.2.4365>
- Contreras de la Fuente, A., Luque Cañada, L. y Ordóñez Cañada, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad. *Revista de Educación*, 331, 399-419. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:ad372b8a-1da3-4fd1-adc4-a24628f2a0ae/re3311711294-pdf.pdf>
- Gavilán-Izquierdo, J. M., García, M. y Martín-Molina, V. (2021). Characterizing the role of technology in mathematics teachers' practices when teaching about the derivative. *Computers in the school*, 38(1), 36-56. <https://doi.org/10.1080/07380569.2021.1882211>
- González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, 47(4), 449-462. <https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462>
- González-Martín, A. S. y Camacho Machín, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 81-96. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v23-n1-gonzalez-camacho/1766>
- Hitt, F. (1994). Teacher's difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(4), 10-20.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(1), 123-134. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)80064-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9)
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, F. Rivera y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 91-111). México: Fondo de Cultura Económica.
- Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *Eco Matemático*, 8, 6-15. <https://doi.org/10.22463/17948231.1374>
- Leavy, P. (2017). *Research design: Quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches*. New York, United States: The Guilford Press. <https://doi.org/10.1111/fcsr.12276>

Dificultades de aprendizaje en el bloque de Cálculo según el profesorado de Ecuador y Colombia: su origen y estrategias didácticas para su enseñanza

- Llorens, J. L. y Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 61-76. <https://www.emis.de/journals/DM/v5/art7.pdf>
- Montes, M. y Carrillo, J. (2017). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. *Bolema*, 31(57), 114-134. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a06>
- Montes, M., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 5-20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.226>
- Nagle, C., Tracy, T., Adams, G. y Scutella, D. (2017). The notion of motion: covariational reasoning and the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48 (4), 573-586. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1262469>
- Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, 12(2), 209-221. <https://revistas.uvigo.es/index.php/reined/article/view/2005/1916>
- Ozaltun-Celik, A. (2021). A calculus student's understanding of graphical approach to the derivative through quantitative reasoning. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9 (1), 892 – 916. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1663>
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3816>
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *RELIME*, 11(2), 267-296.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, L. Puig, M. Sierra y M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). ICE Universitat de Barcelona-Horsori. <https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificultades-errores-y-obstaculos-en-el-aprendizaje-de-la-matematica.pdf>

- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, 28(48), 449-468. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22>
- Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D. y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, 29, 9-19. <http://funes.uniandes.edu.co/23103/1/Vrancken2006Dificultades.pdf>