Gauss Vs Cramer

El Cálculo y su Enseñanza
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Humberto Madrid de la Vega
Universidad Autónoma de Coahuila
hmadrid@gmail.com

Recibido: 17 de octubre de 2023
Aceptado: 20 de diciembre de 2023

Autor de Correspondencia:
Humberto Madrid de la Vega

Resumen. El método de eliminación de Gauss proporciona la solución numérica de un sistema $Ax = b$. La Regla de Cramer, proporciona una fórmula para encontrar la solución del sistema cuando A es $n \times n$ y la solución es única. Además, la Regla de Cramer se usa para derivar una forma para la inversa de una matriz. A su vez el método de eliminación de Gauss se puede usar para calcular la inversa de una matriz. ¿Qué tan efectiva es la Regla de Cramer comparada con la eliminación Gaussiana?

Palabras clave: Eliminación Gausiana; Regla de Cramer, Sistema de ecuaciones lineales.

Abstract. The Gauss elimination method provides the numerical solution of a system Ax=b. Cramer's Rule provides a formula to find the solution of the system when A is n×n and the solution is unique. Additionally, Cramer's Rule is used to derive a form for the inverse of a matrix. In turn, the Gaussian elimination method can be used to calculate the inverse of a matrix. How effective is Cramer's Rule compared to Gaussian elimination?

Keyword: Elimination Gauss; Cramer's rule; System of linear equations.

1. Solución de $\boldsymbol{Ax = b}$

El método de eliminación de Gauss es el método preferido para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$Ax = b$$

Desde el punto de vista teórico, este método tiene el defecto de no proporcionar una forma explícita de la solución, en otras palabras, solamente nos proporciona el valor numérico de la solución, pero no una fórmula para calcularla.

El método de la Regla de Cramer permite encontrar la solución de $Ax = b$ mediante una fórmula.

Para sistemas de ecuaciones lineales de orden pequeño, para algunas personas les resulta más cómodo usar la Regla de Cramer para encontrar la solución. Pero conforme el orden crece resulta cada vez más oneroso la aplicación de este método. Nuestro objetivo es mostrar por qué el método de Gauss es el favorito.

Primero vamos a recordar brevemente ambos métodos y posteriormente los compararemos.

1.1. El método de Gauss

El Método de Eliminación de Gauss consiste en dos partes.

- **Primera parte**. Es la fase de eliminación que consiste en utilizar las operaciones elementales para transformar el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, en otro equivalente (con las mismas soluciones) pero que sea triangular, esto es $Ux = c$ donde U es triangular superior.

- **Segunda parte**. Es resolver el sistema triangular $Ux = c$ por sustitución hacia atrás.

Recordemos las operaciones elementales

- Intercambiar dos ecuaciones
- Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero
- Sustituir una ecuación por la suma de ella misma con un múltiplo de otra ecuación

Ejemplo

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + \ \ z = \ \ 0 \\ -2x + 3y + \ \ z = \ \ 7 \\ 2x + \ \ y - 3z = -5 \end{array} \xrightarrow[-2F_1+F_3]{2F_1+F_2} \begin{array}{r} x - 2y + \ \ z = \ \ 0 \\ -\ \ y + 3z = \ \ 7 \\ 5y - 5z = -5 \end{array} \xrightarrow[-F_2]{5F_2+F_3} \begin{array}{r} x - 2y + \ \ z = \ \ 0 \\ y - 3z = -7 \\ 10z = 30 \end{array}$$

Resolviendo este sistema se obtienen los valores de las incógnitas: $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, por lo que le sistema tiene solución y es única.

1.2. La Regla de Cramer

La Regla de Cramer es un método para encontrar, de una forma explícita, la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, este método proporciona fórmulas para las componentes del vector solución. Para ello hace uso de determinantes. Para mayor claridad veremos primero varios casos particulares. Supondremos que las ecuaciones tienen el mismo número de ecuaciones que el número de incógnitas y que la solución es única.

Regla de Cramer para sistemas 2×2

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad &= b_2 \end{aligned}$$

Esta es la Regla de Cramer para un sistema 2×2.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

$\Delta \neq 0$ ya que la solución es única. Δ es conocido como el determinante del sistema.

Regla de Cramer de un sistema de 3 × 3

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad &= b_3 \end{aligned}$$

La Regla de Cramer dice que la solución es

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \Delta \neq 0$$

Dónde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

éste es llamado el determinante del sistema. El lado derecho se obtiene mediante la expansión por cofactores respecto al primer renglón. Recordemos que la expansión puede hacerse respecto a cualquier renglón o columna.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ahora la expansión es con respecto a la primera columna.

De forma análoga definimos

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Volvamos al sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & -5 \end{array}$$

Para resolver primero calculamos el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

Se calculan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

Así que

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3$$

Regla de Cramer para un sistema $n \times n$

Si A es una matriz $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ y si el sistema $Ax = b$ tiene solución única, la solución $x \in \mathbb{R}^n$ se puede obtener mediante la Regla de Cramer. Los elementos de x se pueden expresar cómo

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

dónde Δ es el determinante del sistema y Δ_i es el determinante que resulta de sustituir la i–sima columna de Δ por el vector b.

Los determinantes involucrados son orden, veremos cómo calcularlos.

Determinantes de orden n

Una forma de definir un determinante de orden n es en forma recursiva.

Para $n = 2$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Para $n = 3$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Para definir $|A|$ en el caso general conviene definir el cofactor de el elemento a_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

donde M_{ij} es el determinante de orden $(n-1)$ que resulta de remover el i–esimo renglón y la j–esima columna de la matriz A.

Entonces

$$\Delta = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, M_{1j}$$

el lado derecho es llamado expansión por cofactores a lo largo del primer renglón. La expansión puede ser a lo largo de cualquier renglón o a largo de cualquier columna. Este método también es conocido como expansión de Laplace.

La ineficiencia de la expansión por cofactores

La aplicación de la Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones de orden n, requiere el cálculo de $n+1$ determinantes de orden n.

Para calcular un determinante de orden n, a final de cuentas requiere del cálculo de muchos determinantes de orden 2. Por lo tanto, analizamos el costo del cómputo de un determinante de orden n mediante de la expansión por factores.

Si denotamos por $P(n)$ el número de productos que se requieren un determinante de orden n. Vamos a encontrar un valor una aproximación a $P(n)$.

Un determinante de orden 2 requiere 2 productos. Un determinante de orden 3 requiere de 3 determinantes de orden 2, es decir $3 \cdot 2$ productos. Más en general

Orden	Determinantes orden 2	Productos
2	1	2
3	$3 \cdot 2$	$3! = 6$
4	$4 \cdot (3 \cdot 2)$	$4! = 24$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n(n-1) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2$	$n!$

Un determinante de orden n requiere más de $n!$ productos, es decir $P(n) > n!$.

Como $n!$ crece rápidamente conforme n crece, el valor de $P(n)$, el número de multiplicaciones también crece mucho. Quizá esto no debería preocuparnos, a final de cuentas la tarea se la podemos dejar a la computadora.

Un experimento computacional

Hagamos un experimento computacional casero. Calculamos el tiempo que tarda una laptop en calcular el determinante de una matriz generada al azar para varios valores de n.

n	tiempo
8	0.29 segs
10	16.076 segs
12	44.01 minutos !!

Entonces si quisiera evaluar un determinante de orden 13, que necesita del cálculo de 13 determinantes de orden 12, requeriría de aproximadamente $13 \times 44 = 572$ minutos, esto es, 9 horas con 32 minutos.

Podemos hacernos de una idea de cuánto tiempo tardaría esta laptop en resolver un sistema de ecuaciones lineales de orden 20. En teoría mi laptop puede realizar hasta 200 GPLOPS (Demon, 2023), esto es, 2×10^{11} operaciones por segundo. Ahora bien, $20!$ es un número enorme, aproximadamente 2.4329×10^{18}, así que para calcularlo se llevaría 1.2165×10^{7} segundos, lo cual equivale a ¡más de 23 años!

Como curiosidad tratemos de ver cuánto tardaría, una supercomputadora como la Big Red 200 (Knowledge Base, 2023), en calcular un determinante de orden 40. Esta computadora puede realizar cerca de 7 petaFLOPS, esto es, 7×10^{15} operaciones por segundo. El factorial de 40 es aproximadamente 8.1592×10^{47}, entonces el tiempo de cálculo es aproximadamente ¡2.2176×10^{26} años! Como referencia la edad del universo se calcula en 14×10^{9} (Zenil, 2005).

Con lo anterior queda claro que el método de expansión por cofactores para el cálculo de determinantes es sumamente ineficiente, salvo para determinantes de orden modesto.

Una pregunta pertinente es si existe una forma económica de calcular un determinante. La respuesta es positiva y quizá sorprendente. Nos referimos al uso de la eliminación de Gauss, para llevar una matriz a una matriz triangular superior. Para ello es importante conocer algunas propiedades importantes de los determinantes.

1.4. Gauss al rescate

Calcular el determinante de una matriz triangular superior es fácil.

Determinante de una matriz triangular

Tomemos este determinante de orden 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

Observemos que el valor del determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal e independiente del valor de a_{12}.

Calculamos ahora el determinante de una matriz triangular superior de orden 3, realizando la expansión a lo largo de la primera columna.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

De igual manera se puede ver que en general el determinante de orden n es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Reiteramos que lo sorprendente es que solamente cuentan los valores de la diagonal principal, así que para su cálculo se requieren solamente de $n-1$ productos.

Lo interesante es que cualquier determinante puede ser transformado a un determinante de una matriz triangular. Para ver esto necesitamos de otras propiedades de los determinantes.

Otras propiedades del determinante

Las siguientes propiedades las ilustramos con determinantes de orden 2.

Multiplicación por un escalar.

Si en un determinante $|A|$ se multiplica un renglón (o columna) por un número α el resultado es $\alpha|A|$

$$\alpha\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Intercambio de renglones o columnas

Al intercambiar dos renglones (columnas) el determinante cambia de signo.

Multiplicar un reglón (columna) por un escalar y sumarlo a otro

Al multiplicar un renglón por un escalar y sumárselo a otro renglón, el valor del determinante no cambia.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{22} \end{vmatrix}$$

Esta propiedad es clave para transformar un determinante a otro de forma triangular superior. Vale la pena ver algunos ejemplos.

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

Si multiplicamos por -2 el primer renglón y lo sumamos al segundo renglón, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

En este ejemplo hemos transformado un determinante a otro que tiene forma triangular, por lo cual su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Otro ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -40 \end{vmatrix} = (2)(1)(-40) = -80$$

En el primer paso se multiplica el primer renglón por 2 y se le suma al tercer renglón. En el segundo paso de multiplica el segundo renglón por -15 y se le suma al tercer renglón.

En el siguiente ejemplo se tienen que intercambiar los dos primeros renglones, cambiando el signo del determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -7 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -40 \end{vmatrix} = -(2)(1)(-40) = 80$$

Cálculo de determinantes mediante eliminación

Como se puede observar básicamente estamos usando la fase de eliminación del método de Gauss, para llevar el determinante a una forma triangular. La regla para evaluar determinantes con este método consiste en llevar el determinante $|A|$ a una forma triangular, si u_{11}, u_{22}, … , u_{nn}, entonces

$$|A| = (-1)^d u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}$$

donde d es el número de intercambios de renglones en el proceso de eliminación. Este proceso en ocasiones es llamado Método de Gauss para el cálculo de determinantes.

¿Qué tan eficiente es este método? Para muestra, en nuestra computadora, con este método un determinante de orden 40, generado aleatoriamente, se calcula en ¡0.093 segundos! Recordemos que este cálculo tardaría como 10^{26} años, si se usa expansión por cofactores. Una diferencia abismal.

1.5 Gauss Vs. Cramer. Sistemas de ecuaciones lineales

Es claro que para resolver un sistema de ecuaciones lineales el método de Cramer es el perdedor si los determinantes con calculados mediante la expansión por cofactores. Inclusive si calculamos los determinantes por el método de eliminación, el método de Cramer no compite con el método de Gauss.

2. Inversa de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, se dice que es invertible si existe otra matriz tal que

$$AB = BA = I$$

en este caso B es la matriz inversa de A y se denota por A^{-1}.

Si el sistema $Ax = b$, con A cuadrada y solución única, ésta puede expresarse como $x = A^{-1}b$, donde A^{-1} es la matriz inversa de A. Esta es la base del cálculo de A^{-1}.

Volvamos a la ecuación $AB = I$, si expresamos a B y I en términos de sus columnas, tenemos $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, $I = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, entonces

$$AB = I$$

$$A[b_1, b_2, \dots, b_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

$$[Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

lo cual representa n sistemas de ecuaciones lineales,

$$Ab_1 = e_1, \quad Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$$

Podemos resolver cada una de estas ecuaciones por el método de Cramer o el de eliminación de Gauss, las soluciones son las columnas de A^{-1}.

A^{-1} via Cramer

Usando la regla de Cramer para resolver los sistemas mencionados se puede llegar a una fórmula para la A^{-1}. Para ello es importante comenzar con casos particulares.

La inversa de una matriz de orden 2

Queremos calcular la inversa de A, B es una matriz desconocida, con la condición de que $AB = I$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto, se obtiene

$$AB = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto da lugar a dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 \quad & ay + bw &= 0 \\ cx + dz &= 0 \quad & cy + dw &= 1 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes de estos sistemas es el mismo, precisamente la matriz A. Podemos usar la Regla de Cramer para resolver este par de sistemas.

El determinante de la matriz de coeficientes A es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Estamos suponiendo que $\Delta \neq 0$, dado que el sistema tiene solución única.

Resolviendo el primer sistema,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d}{\Delta}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{c}{\Delta}$$

La solución del segundo sistema,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{b}{\Delta}, \qquad w = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a}{\Delta}$$

Así que

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = A^{-1}$$

En resumen si $\Delta \neq 0$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz de orden 3

Ahora A, B, I son matrices 3×3, queremos encontrar B tal que

$$AB = I$$

Siendo I la matriz identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera similar al caso anterior se puede reducir el problema a resolver 3 sistemas lineales de ecuaciones

$$Ab_1 = e_1, \quad Ab_2 = e_2, \quad Ab_3 = e_3$$

Siendo b_1, b_2, b_3 las columnas de B y e_1, e_2, e_3 las columnas de I.

El determinante de A es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

el cual suponemos distinto de 0. Vamos a resolver la primera ecuación, $Ab_1 = e_1$, para lo cual denotaremos b_1 como

$$b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

Usando la Regla de Cramer

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{c_{11}}{\Delta}$$

$$b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{c_{12}}{\Delta}$$

$$b_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{c_{13}}{\Delta}$$

Siendo c_{ij} es el cofactor del elemento $(i,\ j)$.

Así que

$$b_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}$$

De manera similar se encuentra que

$$b_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix}$$

De esta manera

$$A^{-1} = B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Si formamos la matriz de cofactores

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} C^T$$

C^T se llama la matriz adjunta de A

La inversa de una matriz de orden n vía Cramer

Si A es una matriz $n \times n$ con determinante $\Delta \neq 0$, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} C^T$$

Donde

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

siendo c_{ij} los cofactores de $|A|$.

El cálculo de A^{-1} con Cramer

La evaluación de A^{-1} usando la fórmula descrita anteriormente, requiere del cálculo de Δ de orden n y n^2 determinantes de orden $n-1$, a saber, las c_{ij}. Al menos que n sea pequeño, esta fórmula es claramente ineficiente.

A^{-1} via Gauss

Para calcular A^{-1} podemos resolver los sistemas de ecuaciones lineales,

$$Ab_1 = e_1, \quad Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$$

Una particularidad de este conjunto de ecuaciones es que la matriz de sistema es la misma para todas ecuaciones, lo que cambia es el lado derecho. Esto nos permite resolver simultáneamente las ecuaciones.

Claramente este método es muy eficiente

3. Observaciones

1. Como se ha señalado si $|A| \neq 0$, la solución de $Ax = b$ se puede expresar como $x = A^{-1}b$. Esto es importante desde el punto de vista teórico, pero es una forma muy ineficiente de resolver $Ax = b$.

2. En pocas ocasiones se requiere del cálculo explícito de A^{-1}. Veamos un ejemplo. Supongamos que conocemos dos matrices A y B y queremos calcular el producto $A^{-1}B$. Sea $X = A^{-1}B$ la matriz que queremos conocer. Entonces X satisface la ecuación matricial $AX = B$. Esta ecuación puede ser resuelta con eliminación Gaussiana.

3. El método Gauss–Jordan, es una variante de Gauss que se usa para la enseñanza, hace uso de la forma escalonada reducida. Este método es cómodo para matrices pequeñas, pero el método de Gauss sigue siendo el más eficiente.

4. El acceso a la tecnología computacional permite plantear y resolver problemas que no se pueden resolver a mano. Los programas de software científico para calcular $Ax = b$, $|A|$ y A^{-1} están basado en el método de eliminación de Gauss.

4. Conclusiones

La Regla de Cramer es muy importante para poder encontrar fórmulas para la solución de sistemas de ecuaciones y para la inversa de una matriz. Pero no es apropiada para calcularlas. El método de Gauss es el más conveniente para realizar los cálculos.

5. Referencias

Demon, R. (18 de septiembre de 2023). *What is the FLOPS of an Intel Core i7 processor?* Quora. Recuperado de https://qr.ae/pyIeKW

Knowledge Base (18 de septiembre de 2023). About Big Red 200 at IU. University Information Technology Services. Recuperado de https://kb.iu.edu/d/brcc

Zenil, H (24 de junio de 2005). *La edad del Universo*. Divulgación de la ciencia, UNAM. Recuperado de http://www.cienciorama.unam.mx/#!titulo/247/?la-edad-del-universo