Secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria

Daniel Rubal Valencia, Guadalupe Villaseñor Gándara
daniel.ruvalencia@gmail.com, gviga@mat.uson.mx
Universidad de Sonora
México

Resumen: En este trabajo se presentan avances de la propuesta de diseño de una Secuencia de Actividades Didácticas, cuyo propósito es promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria en estudiantes de nivel superior. Partimos de la problemática detectada en algunas investigaciones, principalmente en el proyecto Inquiry-Oriented Differential Equations (IO-DE) y en los trabajos de Perdomo, respecto a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales, la cual está basada en promover un aprendizaje memorístico de definiciones y procedimientos matemáticos. Fundamentamos nuestro trabajo con la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) y la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS).

Palabras Clave: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Representaciones Semióticas, Contextos Reales, Derivada.

Abstract: This paper presents an advance in the proposal design of a sequence of didactic activities, which purpose is to promote the construction of the notion of ordinary differential equation in upper level students. We start from the problem detected in some investigations, principally in the project Inquiry-Oriented Differential Equations (IO-DE) and in the works of Perdomo, regarding the teaching of Differential Equations, which is based on promoting a rote learning of mathematical definitions and procedures. Our work is based in the theory of Realistic Mathematics Education (RME) and the Theory of Semiotic Representations (TSR).

Keywords: Ordinary Differential Equations, Semiotic Representations, Real Context, Derivative.

1. Introducción

El área de Ecuaciones Diferenciales cuenta con muy pocas investigaciones desde el punto de vista de la Educación (Rasmussen, 2016). En particular, uno de los aspectos que se destaca en este trabajo, es la importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en el nivel superior. Así como el uso de la tecnología, pues como menciona Perdomo (2011) el usar herramientas tecnológicas en las EDO, facilita el proceso de aprendizaje del estudiante.

En específico, nuestro interés está centrado en abonar a una de las problemáticas detectadas en la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, relacionada con la memorización de definiciones y procedimientos matemáticos. Referido a esto, Perdomo (2011) menciona que el enfoque de enseñanza habitual en el que se introduce el concepto de EDO a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución suponen un aprendizaje que no perdura en el tiempo si este no se refuerza con razonamientos que produzcan dichos métodos. Además, Nápoles (2003) menciona que, en la enseñanza de las EDO, los conceptos que rodean al tema son evadidos o

  Fecha de recepción: 13/01/18, Fecha de aceptación: 02/04/18

disfrazados con una fórmula o algoritmo, lo que no permite su comprensión, y hace creer a los estudiantes y en ocasiones a los profesores, que la fórmula es el concepto mismo.

Asimismo, se menciona el problema que existe por parte de los estudiantes de poder relacionar una ecuación diferencial ordinaria con la derivada de una función. Con respecto a esto, Perdomo (2011) menciona que gran parte de los estudiantes muestran dificultades para poder establecer una conexión entre estos dos conceptos.

A partir de ello, el objetivo de nuestro trabajo es diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria de forma integrada con la noción de derivada. La secuencia se aplicará a estudiantes de ingeniería y estará basada en la resolución de problemas, la cual, a su vez será mediada con el uso de tecnología.

2. Antecedentes de investigación

Para el desarrollo del trabajo, se hace una revisión de varios artículos, los cuales hacen mención de los aspectos a tratar aquí, en específico, de la problemática detectada. En uno de ellos, Dullius (2009) resalta la importancia que se le ha dado a la representación algebraica en los cursos de ecuaciones diferenciales, de tal manera que los estudiantes llegan a dominar los métodos de solución de éstas, pero no la concepción que hay detrás.

Uno de los referentes importantes en nuestro trabajo es el Proyecto Inquiry-Oriented Differential Equations (IO-DE), el cual tiene su fundamento en la Educación Matemática Realista. El equipo de investigación que participa en este proyecto es numeroso, uno de los principales miembros es Rasmussen (2016). Trabajan en torno a tres objetivos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Esos objetivos son:

- Reinvención por parte de los estudiantes de muchas de las ideas y métodos matemáticos fundamentales.
- Tareas desafiantes, que reflejen situaciones reales.
- Balance entre el tratamiento de los enfoques analítico, numérico y gráfico.

3. Consideraciones teóricas

Teniendo como referente el proyecto (IO-DE), consideramos como elementos teóricos que dan sustento a este trabajo a la Educación Matemática Realista (EMR) basada en las ideas de Freudenthal (1968), así como a la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS) de Duval (1993).

3.1 Educación Matemática Realista

De la Educación Matemática Realista se toman los seis principios fundamentales que menciona Alsina (2009):

- De Actividad: En este principio, la idea fundamental de Freudenthal es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. Con relación a ello, Freudenthal (1968) menciona que “matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma” (p. 7).

- De Realidad: La característica más importante que se aborda en este principio es que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, y por contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. Para ésto, Freudenthal (1991) dice, "yo prefiero aplicar el término "realidad" a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario" (p. 17).
- De Reinvención Guiada: En este principio, se entiende como reinvención guiada al proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal. Freudenthal (1991) menciona que "la reinvención guiada significa encontrar un balance entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar" (p. 48).
- De Niveles: La EMR admite que el estudiante pasa por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1991) son: situacional, referencial, general y formal.
    - En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
    - En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.
    - El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.
    - En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

  La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1991).
- De Interacción: En la Educación Matemática Realista, se considera el aprendizaje de la matemática como una actividad social. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados (Bressan, 2010).
- De Interconexión: La Educación Matemática Realista no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo. Freudenthal (1991) menciona que la resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

3.2 Teoría de Representaciones Semióticas

De la Teoría de Representaciones Semióticas se toman lo que son las representaciones semióticas que Duval (1993) define como las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (p. 175).

Además, agrega que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro.
- La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

4. Aspectos metodológicos

En este apartado, se abordan las principales consideraciones para el diseño de una secuencia de actividades didácticas, contemplando tanto la implementación de la propuesta como el análisis a posteriori de ésta. Para ello, se consideran la Educación Matemática Realista y la Teoría de las Representaciones Semióticas, como las guías fundamentales para el desarrollo de las tres etapas: diseño, implementación y análisis.

4.1 Etapa 1: Diseño

En esta etapa, se hace apoyo del principio de realidad y de actividad que se destacan en la Educación Matemática Realista y se aúnan a estos, los tratamientos y conversiones en y entre los distintos tipos de representaciones semióticas de la Teoría de las Representaciones Semióticas, así como el uso de recursos tecnológicos los cuales permiten una exploración dinámica de las conexiones entre los diferentes registros de representación.

Se busca que el diseño cumpla con el principio de reinvención guiada que es fundamental para la EMR, para eso se desarrollan las siguientes fases, las cuales estarán presentes en cada una de las actividades elaboradas, aunque en diferente medida:

- Fase 1: Búsqueda y selección de contextos

Zolkower, Bressan y Gallego (2006) afirman que “los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos” (pp. 11-33). Además, Freudenthal (1991) señala que “un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno para ser matematizado” (p. 73).

- Fase 2: Emergencia de modelos

Zolkower, Bressan, Gallego y Pérez (2016) afirman que “los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones” (p. 4).

- Fase 3: Trabajar con los diferentes tipos de representación semiótica

Duval (1993) señala que cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo.

- Fase 4: Promover el uso del software matemático GeoGebra

Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, y Ballés (2014) señalan que “GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas” (p. 2169).

- Fase 5: Trabajo individual y colectivo

Heuvel-Panhuizen (2002) afirma que “la educación debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de compartir sus estrategias e inventos entre sí” (p. 13).

4.2 Etapa 2: Implementación

Para esta etapa, la implementación de la propuesta, se siguen los principios de reinvención guiada y de interacción, que se plantean en la Educación Matemática Realista. Por tanto, el profesor tendrá un papel de suma importancia en el desarrollo de esta parte del trabajo.

Zolkower, et al. (2006) señalan que los docentes deben fomentar la interacción entre estudiantes de tal manera que eso ayude a generar la participación, el debate genuino y la reflexión de éstos. En adición a ello, añaden que “el docente debe ser capaz de analizar el trabajo oral y escrito de sus alumnos, atendiendo a aquellos momentos clave donde se aprecian discontinuidades en el aprendizaje” (p. 15).

4.3 Etapa 3: Análisis

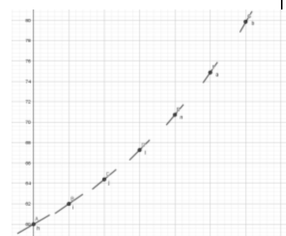
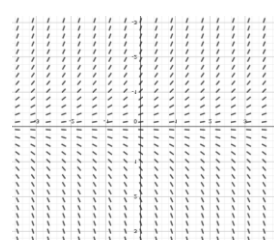
Para finalizar, en esta etapa relacionada con el análisis de las respuestas de los estudiantes a la secuencia, se utiliza el principio de los niveles de la EMR. Para esto se realizaron un par de tablas, en la primera de ellas se describe cada una de las etapas del principio de estos niveles.

Nivel	Descripción
Situacional	Para lograr este nivel, el estudiante comprende el contexto que se le plantea de forma general, de tal manera que puede extraer de éste información que le sea útil. A partir de ello, el estudiante puede proporcionar respuestas a distintas cuestiones que le son planteadas en diferentes tipos de representación (lengua natural, gráfica, tabular o algebraica) haciendo uso de la matemática de manera cualitativa. Es importante que en sus argumentaciones el estudiante sea preciso con el lenguaje matemático que utiliza.
Referencial	Situamos en este nivel a aquel estudiante que además de comprender el contexto que le es planteado de manera particular. utiliza estrategias para la resolución del problema, las cuales están apoyadas en el uso de las distintas representaciones (lengua natural, gráfica, tabular o algebraica), ya sea trabajando en un tipo en particular (tratamiento) o moviéndose entre ellas (conversión). En este nivel, los contextos planteados poseen datos específicos, por lo cual las estrategias utilizadas por el estudiante para la resolución del problema tendrán que estar orientadas al trabajo de la matemática en forma cualitativa y cuantitativa.
General	Para este nivel, el estudiante es capaz de identificar aquellos elementos trabajados en los niveles anteriores y de someterlos a un análisis que requiere de un mayor grado de complejidad. Aquí, ya no trabaja con casos particulares, si no que se plantea un caso general que a su vez da respuesta a aquellos casos construidos en el nivel anterior. El trabajo matemático es más preciso, requiere el uso del lenguaje matemático de manera general.
Formal	En este nivel, el estudiante es capaz de plantear en términos puramente matemáticos definiciones, proposiciones y demás aspectos de la matemática formal.

Tabla 1. Descripción del Principio de niveles de la EMR

La siguiente tabla que se elaboró se basa en la Tabla 1, pero aplicada específicamente al tema de las Ecuaciones Diferenciales, con esta tabla se busca valorar lo hecho por los estudiantes en las actividades que fueron desarrolladas en este trabajo.

Notación	Nivel	Descripción	Valoración	Representaciones Semióticas
NS	Situacional	El estudiante puede identificar que en los contextos están involucradas magnitudes variables que están relacionadas entre sí (magnitud variable dependiente con respecto a la magnitud variable independiente) y a partir de ello, el estudiante responde los diferentes cuestionamientos relacionados a los distintos tipos de cambio (crecimiento cada vez más rápido, cada vez más lento y constate, decrecimiento cada vez más rápido, cada vez más lento y constante), abordados desde diferentes tipos de representación, realizando descripciones asociadas al contexto y utilizando en ellas términos matemáticos asociados a la derivada de manera cualitativa.	NS bajo: El estudiante presentó problemas en la identificación de las magnitudes variables y no asoció su descripción con los diferentes tipos de cambio.	Lengua natural: La rapidez con la que se descalcifica un hueso es cada vez más lenta.
			NS medio: El estudiante entiende el contexto, puede identificar las magnitudes variables involucradas en éste, pero no puede asociarlas con los diferentes tipos de cambio.	Gráfica: 
			NS alto: El estudiante entiende el contexto, puede identificar las magnitudes variables involucradas en éste y a partir de ello, puede describir de manera adecuada los diferentes tipos de cambio.	
NR	Referencial	El estudiante a partir de una situación particular comúnmente planteada en la lengua natural, en la cual identifica las magnitudes variables involucradas y cómo están cambiando,	NR bajo: El estudiante presenta problemas al representar algebraicamente la ecuación diferencial de una situación particular que le es planteada en la lengua natural y por tanto no puede continuar.	Lengua natural: Una población de peces, si se les deja aislados, aumenta con rapidez de cambio del 20% al año. Se permite que al año se pesquen 10 millones de peces.
		relaciona la rapidez de cambio de la función con la derivada y puede plantear una ecuación diferencial	NR medio: El estudiante extrae de una situación particular (planteada en lengua	Algebraica: $\frac{dP}{dt} = 0.2P - 10$

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td rowspan="2"></td>
<td rowspan="2">(representación algebraica) que modele dicha situación, así como describir y representar gráficamente funciones que son solución de la ecuación diferencial. A partir de las reflexiones generadas por los diversos cuestionamientos, puede llevar a cabo la construcción puntual del campo de pendientes.</td>
<td>natural) puede representar la ecuación diferencial que modela dicha situación (representación algebraica), pero presenta problemas al construir puntualmente su campo de pendientes (representación gráfica).</td>
<td>Tabular:
<table><tr><th>T</th><th>P</th></tr><tr><td>0</td><td>60</td></tr><tr><td>1</td><td>62</td></tr><tr><td>2</td><td>64.4</td></tr><tr><td>3</td><td>67.2</td></tr><tr><td>4</td><td>70.6</td></tr></table>T: Tiempo
P: Población de peces</td>
</tr>
<tr>
<td>NR alto: El estudiante logra representar algebraicamente la ecuación diferencial de un contexto particular y puede llevar a cabo la construcción puntual del campo de pendientes.</td>
<td>Gráfica:
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">NG</td>
<td rowspan="3">General</td>
<td rowspan="3">A partir del desarrollo de actividades con un contexto particular en el nivel anterior y de la reflexión realizada en ellas, el estudiante es capaz de plantear en forma algebraica ecuaciones diferenciales, encontrar diferentes soluciones para ellas (familia de soluciones), a partir del trabajo en la misma representación (tratamiento) o de la construcción global del campo de pendientes de éstas (conversión).</td>
<td>NG bajo: El estudiante presenta problemas al representar algebraicamente la ecuación diferencial de una situación general que le es planteada en la lengua natural y por tanto no puede continuar</td>
<td>Lengua natural: Una población de insectos crece con una rapidez de cambio proporcional al tamaño de la población.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">NG medio: El estudiante extrae de un contexto general (planteado en lengua natural) la ecuación diferencial (representación algebraica), pero presenta problemas al construir globalmente su campo de pendientes (representación gráfica)</td>
<td>Algebraica:
$$\frac{dy}{dx} = ky$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Gráfica:
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>NG alto: El estudiante logra representar algebraicamente la ecuación diferencial de un contexto general y a partir de ello y de la</td>
</tr>
</table>

			reflexión generada por los distintos cuestionamientos, puede realizar un análisis que lo llevan a la construcción global del campo de pendientes.	
NF	Formal	Aunque en las actividades no se promueve explícitamente este nivel, el estudiante puede llegar a desarrollarlo con algunas de las preguntas asociadas, en las cuales se le pide realizar conjeturas sobre el comportamiento de gráficas (campos de pendientes) o sobre la solución de ecuaciones diferenciales (numérica, particular y general). Además, hay momentos donde se le pide que realice una serie de argumentaciones que están encaminadas a que describa, quizás no con la formalidad del uso del lenguaje matemático formal, pero si con precisión en sus palabras, sobre las matemáticas que ha aprendido.	NF bajo: El estudiante no logra expresar sus ideas de manera adecuada o los términos utilizados no se asocian al lenguaje formal de las matemáticas.	
			NF medio: El estudiante expresa ideas relacionadas con los términos formales de Ecuaciones Diferenciales, pero el lenguaje matemático utilizado no es el adecuado.	
			NF alto: El estudiante expresa ideas relacionadas a los términos formales de Ecuaciones Diferenciales y el lenguaje matemático utilizado es el adecuado.	

Tabla 2. Criterios de valoración para Ecuaciones Diferenciales

5. Descripción de secuencia de actividades

En esta sección se presenta la descripción del diseño de la propuesta de secuencia de actividades didácticas que ha sido desarrollada bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista y la Teoría de Representaciones Semióticas. Esta secuencia de actividades se divide en una secuencia de inicio, una de desarrollo y una de cierre, las cuales tienen la intención de promover la construcción por el estudiante de la noción de ecuación diferencial ordinaria. Para mostrar el trabajo que se ha realizado en las actividades de las secuencias desarrolladas, en la sección de Anexos se incluyen algunos ejemplos de ellas.

En la secuencia de inicio, consta de siete actividades, las cuales tienen como objetivo de reforzar en los estudiantes la noción de derivada, debido a la relación que ésta tiene con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas actividades están enfocadas en trabajar con la derivada, desde un punto de vista geométrico, numérico y físico. Además, teniendo como referente a la Educación

Matemática Realista el orden que llevan las actividades propuestas siguen el planteamiento del principio de los niveles, es decir, en las actividades 1 y 2, se trabaja en el nivel situacional, en el cual solo se habla de un contexto sin profundizar en lo matemático, en las actividades 3 y 4, se promueve el trabajar en el nivel referencial, en el cual se busca que a partir de situaciones planteadas el estudiante pueda extraer la matemática y trabajar con ella, en las actividades 5, 6 y 7, se promueve el nivel general, a partir de lo hecho en las actividades anteriores, se busca que el estudiante reflexione lo realizado y pueda trabajar con casos donde se fomenta la generalización de la matemática, por último, el nivel formal no está involucrado directamente con nuestras actividades, aunque si se promueve de manera indirecta ya que al finalizar las últimas actividades se pide a los estudiantes que describan aquellas relaciones encontradas entre las funciones y su derivada, lo cual podría llevar al estudiante a realizar conjeturas que se aproximen a los términos formales de las matemáticas.

En la secuencia de desarrollo se realizaron nueve actividades, para la cual se busca introducir a los estudiantes a las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya con lo visto en las actividades pasadas el estudiante cuenta con herramientas que pueden ayudarle a iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales de forma natural. Al igual que la secuencia de inicio, en esta secuencia se siguen los diferentes principios de la Educación Matemática Realista. Además, en las actividades se promueve en diferente medida el uso de los distintos tipos de representación semiótica.

En la secuencia de cierre solo se realizó una actividad, en la cual se busca afianzar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en las secuencias anteriores. Para el desarrollo de esta actividad, se buscó un contexto extra-matemático que resultara de interés para los estudiantes y que además incluyera los elementos trabajados en la secuencia anterior. Además, para la elaboración de esta actividad y al igual que en las anteriores, se promueve el uso de los distintos tipos de representación semiótica de la Teoría de Representaciones Semióticas, así como los diferentes principios pertenecientes a la Educación Matemática Realista.

6. implementación y análisis de resultados

En estos momentos, la secuencia de actividades didácticas se encuentra en la etapa de implementación y de análisis de resultados.

La implementación de las actividades se está llevando a cabo con estudiantes de Ingeniería en Mecánica e Ingeniería en Sistemas de cuarto semestre del Instituto Tecnológico de Hermosillo (ITH). Para las actividades de la secuencia de inicio se ocupó un total de 5 horas de clase. Aún no se concluye con la aplicación de las actividades de la secuencia de desarrollo y, por tanto, aún falta aplicar la secuencia de cierre.

El proceso del análisis de resultados aún no se ha realizado. Para tener un criterio en la valoración del desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades de las secuencias, nos estaremos basando en la Tabla 2.

7. Reflexiones finales

La importancia de este trabajo consiste en resaltar la importancia que tiene el tema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el nivel superior, ya que, tal y como menciona Perdomo (2011) “las EDO están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en los currículos de nivel universitario" (p. 113). Es por eso que las actividades están enfocadas a que el estudiante construya la noción de ecuación diferencial ordinaria.

También, buscamos que el estudiante relacione el concepto de derivada con el de ecuación diferencial ordinaria, pues Perdomo (2010) afirma que los estudiantes no pueden establecer una conexión entre los conceptos de EDO y de derivada de una función. Para eso, dedicamos las actividades de la secuencia de inicio exclusivamente a reforzar el concepto de derivada, que es importante para comenzar a trabajar en la secuencia de desarrollo que a su vez introduce al estudiante al concepto de ecuación diferencial ordinaria.

Además, la forma en la cual promovemos la construcción de estas nociones, es trabajando con los diferentes tipos de representación de ambas, puesto que Nápoles, González, Genes, Basabilbaso y Brundo (2004) señalan el predominio que se tiene hoy en día en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales del uso de las representaciones algebraicas, sobre las geométricas o las numéricas mismas y afirman que "esto ha traído, como consecuencia, que se tenga una visión muy parcial de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales, pues frecuentemente en el estudio de los modelos determinísticos se requiere establecer articulaciones entre los diferentes acercamientos" (p. 46).

A partir de los resultados obtenidos con la implementación y el análisis de las respuestas a las actividades de la secuencia de actividades didácticas, se realizarán modificaciones que sean pertinentes al diseño de la secuencia, con tal de tener un producto final más refinado.

8. Referencias

Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado.* Recuperado de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIIIAngelAlsina.pdf

Bressan, A. (2010). Los principios de la educación de la Matemática Realista. Recuperado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-mate-matica-realista.pdf

Dullius, M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*. Tesis inédita de Doctorado, Universidad de Burgos, España.

Duval, R, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer, Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L. & Ballés, H. (2014). GeoGebra y los sistemas de representación semióticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*, 2169-2176.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. *Common sense in mathematics education*, 1-43.

Nápoles, J. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias: Un enfoque histórico. *Educación y Pedagogía*, *15*(35), 165-181.

Nápoles, J.; González, A.; Genes F.; Basabilbaso, F.; Brundo J. (2004). El Enfoque Histórico Problémico en la Enseñanza de la Matemática para Ciencias Técnicas: El Caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. *Acta Scientae. 6*(2), 41-59.

Perdomo, J. (2010). *Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas*. Tesis inédita de doctorado, Universidad de la Laguna, España.

Perdomo J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Revista de la didáctica de las matemáticas*, *78*, 113-134.

Rasmussen C. (2016). *The Inquiry Oriented Differential Equations Project: Addressing Challenges Facing Undergraduate Mathematic Education.* MatRIC Modelling Colloquium.

Zolkower, B., Bressan, A. & Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. Recuperado de https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Yupana/article/download/247/333

Zolkower, B., Bressan, A., Gallego, F. & Pérez, S. (2016). Educación Matemática Realista. Bases Teóricas. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wpcontent/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

8. Anexos

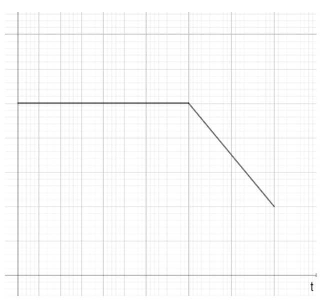
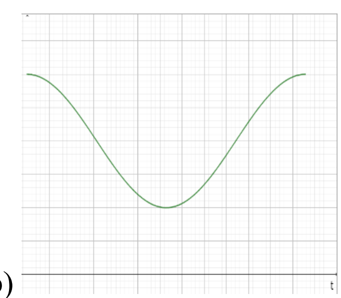
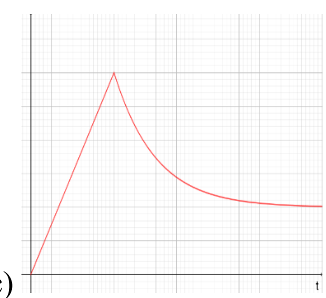
8.1 Anexo A: Secuencia de inicio

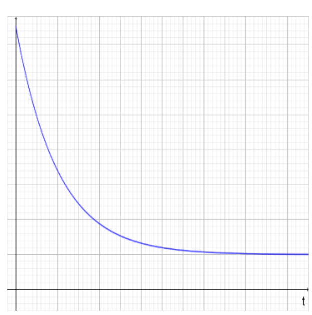
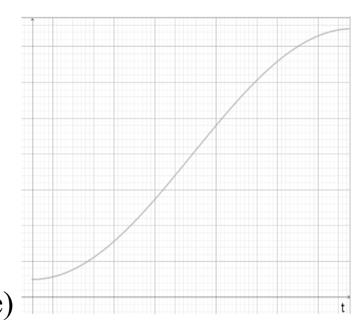
Actividad 1. Las matemáticas en la vida diaria

Modalidad: Individual

❖ Haga corresponder las gráficas con las descripciones siguientes:

A. La población de una nueva especie introducida en una isla tropical.
B. La temperatura de un lingote de metal colocado en un horno y a continuación sacado de él.
C. La velocidad de un carro que viaja a velocidad uniforme y después frena uniformemente.
D. La masa del carbono-14 en una muestra antigua.
E. La concentración de polen de una planta en el aire en el curso de un año.

a)  ( ) b)  ( ) c)  ( )

d)  ( ) e)  ( )

❖ De forma individual, responde las siguientes preguntas asociadas a la actividad anterior.

1. Argumenta cual fue el proceso que utilizaste para asociar cada una de las situaciones planteadas con su respectiva gráfica:

A. ____
____
____

B. ____
____
____

C. ____
____
____

D. ____
____
____

E. ____
____
____

2. ¿Qué comportamiento tendrían las curvas de cada una de las gráficas si éstas se prolongaran en el tiempo?
   I. Bosqueje lo que sucederá
   II. Haz una descripción de ese proceso

A. ____
____
____
____

B. ____
____
____
____

C. ____
____
____
____

D. ____
____
____
____

E. ____
____
____
____

Actividad 3. La fiebre

Modalidad: Equipo de 2

La **fiebre** es un síndrome (conjunto de síntomas y signos) cuyo signo principal es la hipertermia, aunque no es imprescindible, pues puede haber fiebre sin hipertermia.

El organismo en condiciones normales mantiene la temperatura corporal dentro de un rango estrecho, independientemente de las variaciones del medio ambiente. Normalmente la temperatura es un poco mayor en la tarde, cerca de las 20 horas, y más baja en la madrugada. Esta es una variación de tipo circadiano. La temperatura que se registra en un paciente sano oscila entre 36,2ºC y 37ºC.

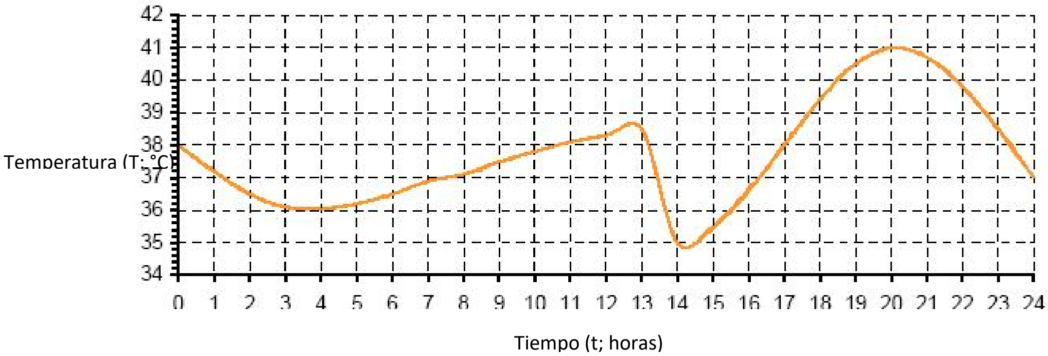
Se considera que una persona presenta:

- un **estado subfebril**: cuando la temperatura oscila entre 37 y 37,5 ºC.
- **hipotermia**: cuando la temperatura es menor de 35,0ºC.
- **hipertermia**: cuando la temperatura es mayor de 41ºC.

Se desglosa la siguiente información relacionada con las temperaturas:

- **34 °C**: se llama hipotermia cuando la temperatura es menor a 35 °C. Hay temblor grave, pérdida de capacidad de movimiento en los dedos, cianosis y confusión. Puede haber cambios en el comportamiento.
- **35 °C**: temperatura levemente baja. La temperatura normal del cuerpo humano oscila entre los 36 y 37 °C
- **37 °C**: temperatura normal del cuerpo; esta puede oscilar entre 36 y 37 °C
- **38 °C** (febrícula): temperatura superior a 37 °C pero inferior a 38 °C durante 24 horas
- **39 °C** (pirexia): existe abundante sudor acompañado de rubor, con taquicardias y disnea. Puede surgir agotamiento. Los epilépticos y los niños pueden sufrir convulsiones llegados a este punto.
- **40 °C**: mareos, vértigos, deshidratación, debilidad, náuseas, vómitos, cefalea y sudor profundo.
- **41 °C** (urgencia): todo lo anterior más acentuado; también puede existir confusión, alucinaciones, delirios y somnolencia.
- **42 °C**: además de lo anterior, el sujeto puede tener palidez o rubor. Puede llegar al coma, con hipertensión o hipotensión y una gran taquicardia.

A continuación, se presenta la representación gráfica de la temperatura de un caso de fiebre en un paciente:



Gráfica 1. Temperatura de un paciente con fiebre en el paso del tiempo

❖ Responde lo que se pide.

1. Describe detalladamente que es lo que está sucediendo con el paciente según la Gráfica 1

____

____

____

2. Calcula para los siguientes intervalos de tiempo, el cambio en la temperatura (ΔT)

(t_1, t_2)	$\Delta T, °C$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$	Interpretación
$(0,4)$			
$(4,11)$			
$(13,15)$			
$(17,20)$			
$(20,24)$			

Tabla 1.

   a. Completa la tercera columna de la Tabla 1 calculando la rapidez de cambio promedio (razón de cambio promedio)
   b. Interpreta estos resultados obtenidos para cada intervalo de tiempo

3. En la Gráfica 1 representa la rapidez de cambio promedio en los intervalos indicados
   a. Describe lo que hiciste y argumenta tu respuesta

4. Atendiendo lo hecho anteriormente:
   a. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más rápido?

   ____

   b. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más lento?

   ____

   c. ¿Cómo llegaste a esa conclusión? Justifica tu respuesta

   ____
   ____

5. Con la información obtenida. Explica la evolución de la temperatura del paciente

____
____
____
____

8.2 Secuencia de desarrollo

Actividad 5. Solución general de una ecuación diferencial

Modalidad: Equipo de 2

Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 0.3y$$

❖ Responde lo que se pide a continuación.

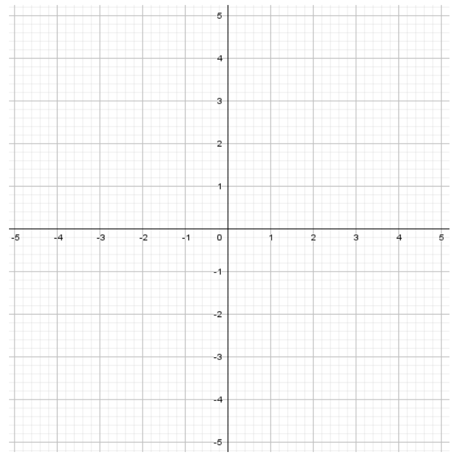
1. Escribe una función que satisfaga la ecuación diferencial. Argumenta tu respuesta.

____
____

2. Para corroborar que la función que propusiste es correcta, sustituye ésta en la ecuación diferencial.
   a. Lado izquierdo $\frac{dy}{dx} =$______________
   b. Lado derecho $0.3y =$ ______________
   c. ¿Es correcta la función propuesta?, ¿Por qué?

   ____

   d. Compara con tus compañeros de grupo, las funciones que propusieron
   e. En la siguiente cuadrícula y con ayuda de GeoGebra traza la gráfica de cuatro funciones que satisfagan esta ecuación diferencial



Generalizando:
La función que satisface esta ecuación diferencial es la siguiente:

$$y = ce^{0.3x}$$

La solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciones.

Actividad 7. Campos de pendientes

Modalidad: Equipo de 2

En esta actividad se analizará la representación gráfica de una ecuación diferencial a la cual se le denomina campo de pendientes, así como también campo de direcciones.

Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

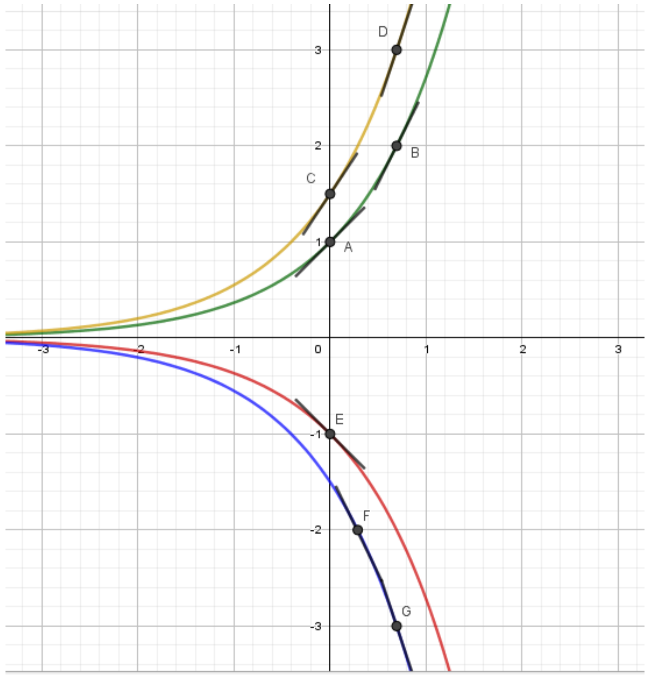
❖ Responde lo siguiente.

1 Escribe la expresión analítica o fórmula de la familia de funciones que es solución de esta ecuación diferencial

____

a. Comprobación:____
____

A continuación, se muestra la gráfica de cuatro curvas que son solución de esta ecuación diferencial en las cuales se han trazado pequeños segmentos de recta en cada uno de los puntos marcados para mostrar la pendiente de la recta tangente (m) en ese punto de la curva



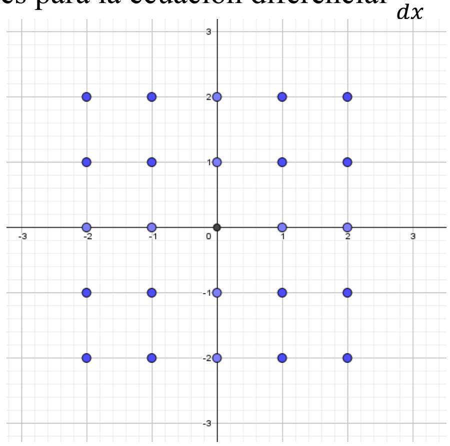
2 Escribe el valor de la pendiente (m) de la línea tangente en los puntos marcados

a. Punto A, $m =$ _____
b. Punto B, $m =$ _____
c. Punto C, $m =$ _____
d. Punto D, $m =$ _____
e. Punto E, $m =$ _____
f. Punto F, $m =$ _____
g. Punto G, $m =$ _____

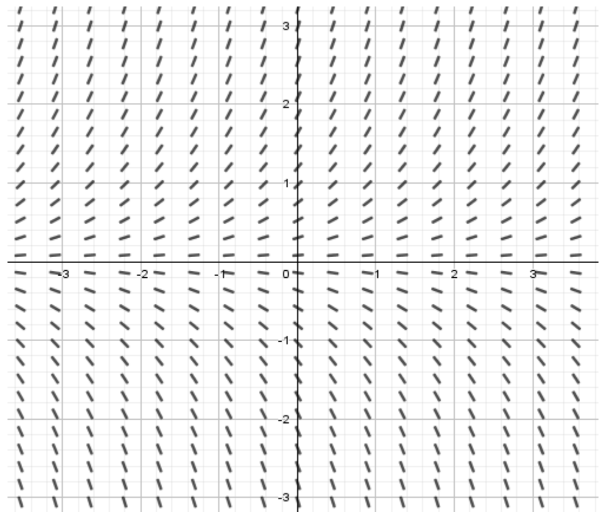
3 Esta ecuación diferencial dice que cualquier solución de ésta, tiene la propiedad de que la pendiente en cualquier punto del plano es igual a: _________

Si se trazan muchos de estos segmentos de recta, pero no se muestran las curvas, así es como se obtiene el campo de pendientes o campo de direcciones.

4 Traza el campo de pendientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$ en los puntos indicados.



En la siguiente figura, se tiene una panorámica del campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$



5 Realiza y reporta un análisis detallado con la justificación correspondiente del comportamiento de estas pendientes

____

____

____

____

Podemos observar que en el campo de pendientes se deja reconocer el espectro de la familia de curvas solución de la ecuación diferencial.

Ahora, dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

❖ Responde lo siguiente.

1 Descarga el archivo Act 8-6.ggb y ábrelo con GeoGebra. Observa las siguientes expresiones algebraicas e indica cuál de ellas es solución de la ecuación diferencial planteada

a. $y = \frac{x^2}{4}$, es solución? ______ ¿Por qué?

b. $y = x^2$, es solución? ______ ¿Por qué?

c. $y = \frac{x^2}{2}$, es solución? ______ ¿Por qué?

2 Descarga el archivo Act 8-7.ggb y ábrelo con GeoGebra. Mueve el deslizador $x1$:

a. ¿Qué pasa con $f(x)$?

____

b. ¿Qué valor toma la pendiente (m) para los puntos

i. A? __________

   ii. B? __________
   iii. C? __________

c. ¿Cuál será el valor de la pendiente (m) de los puntos
   i. D? __________
   ii. E? __________
   iii. F? __________

d. ¿A qué crees que se deba ésto?

____

____

3 Descarga el archivo Act 8-8-1.ggb y ábrelo con GeoGebra. Mueve el deslizador $x1$:

a. ¿Qué sucede al mover $x1$?

____

b. ¿Qué representan esos segmentos de recta?

____

Ahora abre el archivo Act8-8-2.ggb. Mueve el deslizador $x1$:

c. ¿Qué sucede al mover $x1$?

____

d. ¿Cuál es el espectro que deja el campo de pendientes?

____

4 Escribe la expresión analítica o fórmula de la familia de funciones que es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$

____

a. Comprobación:____

____