La Enseñanza del Cálculo. El modelo matemático del tiempo y la Recta real.

Teaching Calculus. The Mathematical Model of Time and the Real Line.

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Rubén Flores Espinoza
rubenfloresespinoza@gmail.com
Universidad de Sonora
Hermosillo, Sonora. México

Vicente Carrión Miranda
vcarrion@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV

Recibido: 23 de mayo 2024

Aceptado: 13 de junio de 2025

Autor de Correspondencia:

Rubén Flores Espinoza

Resumen: En este artículo presentamos algunas ideas para introducir en base a nuestra experiencia con el transcurrir del tiempo y con los fenómenos de cambio continuo, las estructuras y conceptos del cálculo diferencial para la descripción del movimiento continuo y las leyes que lo gobiernan. En particular, presentamos la estructura del Sistema de los números reales como un modelo matemático del tiempo con sus propiedades de orden y duración. Este enfoque, nos permite mostrar, el origen y significado de los conceptos fundamentales del cálculo como son los de función real de variable real, de límite y continuidad, de derivada etc. Consideramos que es importante para una mejor enseñanza y aprendizaje del cálculo, relacionar directamente sus conceptos y resultados con nuestras percepciones y vivencias de la realidad y sus manifestaciones.

Abstract: In this article we give some ideas to introduce based on our experience with the passage of time and with the phenomena of continuous change, the structures and concepts of differential calculus involved in the description of continuous motion and the laws that govern it. In particular, we present the structure of the System of real numbers as a mathematical model of time with its properties of order and duration. This discussion allows us to explain the meaning of the fundamental concepts of calculus such as those of real function of real variable, limit and continuity, derivative etc. We consider that it is important for a better teaching and learning of calculus, to directly relate its concepts and results with our perceptions and experiences of reality and its manifestations.

Palabras clave: instantes e intervalos de tiempo, orden y duración temporal, Recta y número real

Keywords: instants and time intervals, temporal order and duration, line and real number

1. Introducción

El conocimiento matemático, como todo conocimiento, tiene su fuente en la experiencia. En el caso del Cálculo, su motivación y desarrollo se origina en nuestra vivencia del transcurrir del tiempo y el contacto con los fenómenos de movimiento y cambio continuo. Los fenómenos de cambio continuo que han sido objeto de representación y análisis matemático son aquellos que involucran relaciones de dependencia entre objetos o variables con valores en números pertenecientes a un sistema numérico especial llamado El Sistema de los números reales. Este sistema posee propiedades algebraicas y geométricas que permiten formular los conceptos y métodos matemáticos para la descripción de los procesos dinámicos y las leyes que los gobiernan.

El desarrollo y fundamentación del Cálculo se inicia en el siglo XVII con los trascendentes trabajos de Isaac Newton en Inglaterra y Gottfried Wilhelm Leibnitz en Alemania. Se prolonga durante los dos siglos posteriores con las contribuciones de Leonhard Euler y Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII y de Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann y Karl Weierstrass en el siglo XIX. Hacia finales del siglo XIX ya se tiene la formulación rigurosa de los principales conceptos y resultados incluyendo la construcción del Sistema de los números reales, esto último como producto de los trabajos de Georg Cantor, Richard Dedekin y Edward Heine, basados en los conceptos de límite y continuidad establecidos previamente por Augustin Cauchy. En el siglo XX se da otro desarrollo importante de la fundamentación del Cálculo con los trabajos de A. Robinson sobre análisis non-standard y en México con los trabajos de C. Imaz sobre los llamados números hyperreales.

La construcción del Sistema de los números reales se considera en general un tópico avanzado del análisis matemático. Su construcción mediante la idea de "cortaduras" debido a Richard Dedekind (1831-1916) o en términos de sucesiones de Cauchy por Georg Cantor (1845-1918), proporcionan los fundamentos de los conceptos y operaciones propias del Cálculo. Para una exposición amplia y rigurosa de las construcciones de Cantor y Dedekin, se puede consultar el artículo de A.K. Jabbar, et al.

Una construcción del Sistema de los números reales más cercana a nosotros es la basada en el modelo de Cantor dada en términos de expansiones decimales. En el libro de texto Fundamentos del Cálculo de Flores R. et al. se presenta esa construcción en términos de expansiones decimales o sucesiones infinitas de dígitos o símbolos del cero al nueve; se definen sus operaciones de suma y producto y se introduce el concepto de orden entre expansiones decimales dando lugar a una estructura de campo numérico con un orden completo y arquimediano. Después, de acuerdo con esa estructura se introducen los conceptos fundamentales de variable y función real, así como los conceptos de límite y continuidad que permiten definir las operaciones de derivación e integración propias del Cálculo.

El propósito de este trabajo es motivar la construcción del sistema de los números reales a partir de nuestra experiencia y lenguaje en relación con el transcurrir y la duración del tiempo. Consideramos que una discusión en estos términos es útil e importante para una mejor comprensión y aprendizaje del Cálculo a nivel superior.

El orden temporal.

En la vida diaria, consideramos el tiempo como el conjunto ***R*** de lo que llamamos instantes de tiempo o ahoras. En ese conjunto percibimos un orden especial que nos permite decir para cada par de instantes distintos A, B, cuál de ellos es anterior al otro o equivalentemente cuando el otro es un instante posterior al primero. Esta relación refleja un orden en el tiempo con la propiedad de ser una relación de orden transitiva, en el sentido que si A es anterior a B y B es anterior a C, entonces A es anterior a C. Además, para cada instante A anterior a un instante B, existen una infinidad de instantes posteriores a A y anteriores a B.

Por otro lado, cada instante de tiempo A, separa o divide a la totalidad del tiempo en dos conjuntos ajenos y no vacíos que denominamos el pasado de A (denotado "pas A") formado de todos los instantes anteriores a A y el futuro de A (denotado "fut A") formado de los instantes posteriores a A. Note que en el pasado y el futuro del instante A no se incluye el mismo instante A. El orden entre los instantes define una dirección en el fluir del tiempo que en cada instante va de su pasado a su futuro. Ese instante se identifica como el instante presente.

Si ***A*** es un conjunto de instantes y C es un instante tal que su futuro no contiene instantes de ***A***, se dice que C constituye una cota de ***A*** al futuro o cota superior de ***A*****.** En ese caso, diremos que ***A*** es un conjunto temporalmente acotado al futuro o un conjunto acotado superiormente. Si un conjunto de instantes ***A*** es acotado al futuro por un instante C, entonces cada instante del futuro de C pertenecerá al futuro de cada instante de ***A*****.**

Pero el orden temporal tiene una propiedad especial que lo caracteriza, y que es su propiedad de continuidad o completez. Esta propiedad es la que determina que el paso del tiempo se dé continuamente "sin cortes ni interrupciones". Esa propiedad se establece en los siguientes términos:

Introduciremos primero un concepto clave asociado a un conjunto ***A*** de instantes acotado superiormente. El concepto en cuestión es el de "la cota superior de ***A*** anterior a todas las demás cotas superiores de ***A***". A ese instante se le llama la "mínima (o más anterior) de las cotas superiores de ***A***" o " el supremum de ***A***" y la denotamos "sup ***A***".

Tomando en cuenta el concepto anterior, una manera de afirmar que el orden temporal sea continuo y sin interrupciones o saltos es aceptando la validez del siguiente postulado de existencia:

> " Para cada conjunto ***A*** de instantes acotado superiormente, EXISTE siempre el
>
> instante sup ***A***"

Cuando una relación de orden satisface el postulado anterior, se dice que define un orden continuo. Observe que el instante S=sup ***A*** conecta continuamente los instantes de ***A*** con su futuro ya que, al postular la existencia de S, estamos asegurando que para cada instante C anterior a S hay instantes de ***A*** posteriores a C y por otro lado después de S todos los instantes pertenecen al futuro de ***A***, luego el instante S actúa como límite de los instantes de ***A*** conectándolos suavemente con su futuro.

De manera análoga a lo establecido para conjuntos de instantes acotados en el futuro, tenemos el concepto de conjunto de instantes acotado en el pasado o acotados inferiormente" y el concepto de " infimum de *A*" como aquel instante I que siendo cota inferior es posterior a toda otra cota inferior. Note que si un conjunto de instantes de ***A*** es acotado al futuro, el instante sup **A** coincide con el instante inf(fut ***A***).

Al expresar que el conjunto ***R*** de los instantes de tiempo posee una relación de orden continuo en los términos presentados arriba, estamos postulando que el total del tiempo ***R*** no puede separarse o desconectarse en dos subconjuntos ajenos ***A*** y ***B*** de instantes donde todos los instantes en ***A*** son anteriores a los elementos en ***B*** ya que siempre existirá un instante que conectará a los instantes de ***A*** con los instantes de ***B***.

La definición de la propiedad de continuidad del tiempo es una definición propia del análisis matemático. La introducción y comprensión de la continuidad del orden temporal representa una de las mayores dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Este concepto es la base de la fundamentación del cálculo.

La medida del tiempo y la Recta real.

En nuestra experiencia y lenguaje sobre el tiempo, los otros conceptos importantes son los de "intervalo de tiempo" y " duración o magnitud de un intervalo de tiempo". Dados dos instantes distintos de tiempo I y J con J posterior a I, al conjunto de instantes anteriores o iguales a J y posteriores o iguales a I le denominamos el intervalo de tiempo [I, J]. A los instantes I, J les llamamos los extremos del intervalo. Al conjunto de instantes anteriores al instante J y posteriores al instante I le denominamos el intervalo abierto (I, J).

Cada intervalo de tiempo contiene un conjunto denso e infinito de instantes y se pueden concatenar dos intervalos de la forma [I, J] y [J, K] dando lugar al intervalo [I, K] que incluye a los todos los instantes de cada intervalo y da lugar con ello a una operación de suma o agregación del tiempo.

Por otro lado, a cada intervalo de tiempo [I, J] le asociamos lo que llamamos "su duración o magnitud" en términos de unidades de tiempo (segundos, horas o días) que se establecen en base a nuestra experiencia con los "ciclos" de fenómenos de tipo periódico como el latir del corazón, el orbitar de los astros o el oscilar de un péndulo. La percepción de esos eventos periódicos nos proporciona unidades de duración temporal con las que podemos "medir" o comparar" la duración de un evento temporal dado.

Tomando como unidad de medida de la duración de una oscilación de un péndulo, a la longitud del arco de circunferencia que recorre ese péndulo durante esa oscilación, podemos identificar cada instante del intervalo de tiempo transcurrido con el punto del arco de circunferencia que ocupa en ese instante la masa del péndulo y tomar también, la longitud del arco recorrido como medida de la duración del intervalo de tiempo que ha transcurrido. La correspondencia anterior, nos permite identificar y medir los intervalos de tiempo con la longitud de un segmento de recta medido desde un punto identificado con el instante presente.

La identificación y medida de los intervalos de tiempo mediante la longitud de segmentos de recta, permite denotar los intervalos del tiempo con la representación decimal de los puntos de la recta y extender al conjunto de esos intervalos las operaciones de suma y producto entre expansiones decimales. Toman así sentido las operaciones de sumar y multiplicar intervalos de tiempo en términos de las operaciones entre las expansiones decimales que los identifican.

En la correspondencia entre intervalos de tiempo y expansiones decimales, se asignan expansiones con signo negativo a intervalos de tiempo dados en el pasado del instante presente y se traslada el orden temporal y sus propiedades al conjunto de los puntos de la recta, dando lugar a una nueva estructura numérica con un orden continuo que constituye el Sistema de los números reales o la Recta real. En la correspondencia entre instantes de tiempo y puntos de la recta, el orden temporal se traduce al orden entre puntos de la recta donde un punto P es posterior a otro Q si su posición se encuentra a la derecha en la recta. La propiedad de continuidad del orden en la recta identifica cada expansión decimal infinita L con el supremum del conjunto de puntos cuyas expansiones corresponden a truncamientos finitas de la expansión decimal L. Un truncamiento de una expansión decimal L es una expansión que consta de los mismos dígitos que L hasta un cierto lugar en el orden, seguida de ceros para los lugares siguientes a la derecha.

Una propiedad del orden en la Recta real que es importante señalar, consiste en que dados dos intervalos de tiempo [0, X] y [0, Y] correspondientes a expansiones decimales positivas y tales que X es posterior a Y, existe un numero natural n tal que la concatenación repetida un numero n de veces del intervalo de duración unitaria es mayor o rebasa la duración del intervalo [0, X]. Lo anterior significa que la concatenación o suma repetida del intervalo de duración unitaria alcanza a cualquier instante de tiempo futuro. A esta propiedad se le denomina la Arquimedianidad del orden temporal.

De la manera anterior se construye el llamado modelo lineal del tiempo dotado de una estructura algebraica y una relación de orden completo y arquimediano que permite una descripción rigurosa y lógicamente consistente del movimiento continuo y sus leyes. A partir del modelo lineal es posible definir un modelo del tiempo con orden acotado que se denomina modelo circular del tiempo. Estos son los dos modelos posibles con un orden continuo para el tiempo.

Para una reflexión de tipo filosófico sobre el tiempo y su descripción, se recomienda el trabajo del filósofo español Xavier Zubiri y el libro de Saunders Mac Lane.

El Cambio continuo.

El concepto general de cambio es un concepto asociado a una relación entre dos o más cantidades o propiedades que puedan tomar distintos valores y que estén unidas por una relación de dependencia funcional. Esto último significa que el valor de una de las variables está determinado por el valor de la otra que se denomina la variable independiente. En ese caso, si una de esas variables modifica o cambia su valor, la relación de dependencia determina la variación en el valor de la otra variable o variable dependiente. La relación entre las variaciones de las variables resulta así una expresión o medida de la relación de cambio implícita en la relación funcional inicial.

A las propiedades de los objetos o propiedades que pueden representarse con números reales se les denomina variables reales. Por ejemplo, la posición de un automóvil sobre una carretera, la temperatura de un líquido, el área de un rectángulo, etc. constituyen variables reales pues toman valores en los números reales.

Como ejemplo de lo anterior, consideremos el fenómeno de caída libre de un objeto sobre la superficie de la tierra. En este caso las variables relacionadas son la posición p del objeto sobre el suelo y el tiempo transcurrido t desde que se suelta ese objeto. Esas variables toman sus valores en números de la recta real y están asociadas en una relación funcional de dependencia que fue descubierta por Galileo y que se expresa diciendo que si el valor del tiempo transcurrido es el numero t segundos, el valor de la posición correspondientes es

$$p = h - \frac{1}{2}gt^2$$

donde h es la altura de donde se suelta el objeto y g un número fijo asociado a la fuerza de gravedad.

Cuando las variables en una relación de dependencia toman valores numéricos, las variaciones en los valores de las variables se expresan como la diferencia numérica entre el valor final y el valor inicial de esas variables y la medida del cambio en la relación producido por esas variaciones se expresa como el cociente numérico de la variación de la variable dependiente dividida entre la variación de la variable independiente. Ese cociente se denomina la razón de cambio correspondiente a las variaciones ocurridas entre las variables relacionadas.

Los fenómenos de cambio continuo que son objeto de descripción matemática son aquellas que se presentan en relaciones de dependencia funcional entre variables reales o variables del tipo de la variable tiempo. A esas relaciones se les denomina funciones reales de variable real y son el objeto principal de estudio del Cálculo. Por otro lado, las funciones reales de variable real en las que tiene sentido el concepto de cambio instantáneo o puntual son aquellas donde la dependencia funcional entre las variables preserva el orden continuo de los valores que toman esas variables en la Recta real. Esas funciones se denominan funciones continuas y son aquellas para las cuales en general tienen sentido las operaciones de derivación e integración y con esas, los conceptos de cambio o velocidad instantánea y ley dinámica.

En el ejemplo de la caída libre de un objeto, la relación de cambio implícita en la relación funcional entre la variable tiempo t y la variable posición p es la relación entre la variación de la variable independiente t y la variable p de posición. Si en un determinado tiempo t_0 se considera una variación en el tiempo de magnitud Δt, la relación funcional entre el tiempo y la posición de la partícula implica que la variación correspondiente en la posición vendrá dada por la diferencia

$$p(t+\Delta t)-p(t_0)=(1/2)g[(t_0+\Delta t)^2-t_0{}^2]$$

y la razón de cambio por unidad de variación en el tiempo a partir del tiempo t_0 denotada $((\Delta p)/(\Delta t))(t_0)$ vendrá dada por el cociente

$$((\Delta p)/(\Delta t))(t_0)=\ g[t_0+(1/2)\Delta t]$$

Observe que la medida del cambio dado depende tanto del tiempo t_0 en el que ocurre el cambio como del valor de la variación Δt.

Finalmente, a partir del ejemplo anterior, vemos que la medida del cambio producido por las variaciones de la variable tiempo depende del valor presente del tiempo y de la duración del intervalo que define la variación de ese tiempo inicial. Así también, se observa que el valor del cambio ocurrido por esas variaciones es cada vez más cercano al valor gt_0 cuando las variaciones en el tiempo t_0 son cada vez más pequeñas y tienden a lo instantáneo. Lo anterior nos lleva a considerar al valor gt_0 como una medida del cambio instantáneo en la relación funcional en el instante t_0. La existencia de un número real para representar el cambio instantáneo es consecuencia de la propiedad de completez del orden en los valores de las variables. El concepto de cambio instantáneo se establece formalmente así, en base a las propiedades del Sistema de números reales.

Bibliografia

Flores R., García M.G. Valencia M.A., Fundamentos del Cálculo, Pearson Educación, México. 2014

A.K. Jabbar, CH. Kumar, S. Balavidhya, Real Analysis of Real Numbers-Cantor and Dedekin Real Number Structuring, Journal of Mathematics, Vol. 13,Issue 5. Sept-Oct. 2017, pp, 32-40

Saunders Mac Lane, Mathematics, form and function, Springer Verlag, New York, 1986

Zubiri X. Espacio, Tiempo, Materia, Editorial Alianza, Madrid. 2008