# Solución a problemas de optimización usando proporciones

# Solution to optimization problems using ratios

***El Cálculo y su Enseñanza***

*ISSN: 2007-4107 (electrónico)*

Juan de Dios Hernández Garza

jgarza@upn.mx

Universidad Pedagógica Nacional - Ajusco

**Recibido:** 05 de abril de 2024

**Aceptado**: 29 de junio de 2024

Autor de Correspondencia:

Juan de Dios Hernández Garza

**Resumen:** En este trabajo se propone el uso de la proporción como concepto fundamental que permite al alumno relacionar y aplicar los conocimientos adquiridos en sus cursos de Geometría y Álgebra en la resolución de problemas de optimización. Se presentan varios ejemplos que muestran el uso de la proporción como herramienta matemática alternativa para abordar problemas contextualizados en la determinación de máximos y mínimos. El uso de la proporción como concepto básico permite mejorar la comprensión de los estudiantes y ampliar sus estrategias heurísticas sin el uso de la derivada, como contraparte al pensamiento rígido y la fijación por los procedimientos estandarizados del Cálculo Diferencial, como los criterios de máximos y mínimos, donde es necesario buscar una vinculación entre la función a optimizar y su función derivada.

**Palabras clave:** proporción, optimización, estrategias heurísticas, máximos y mínimos.

**Abstract:** In this work, the use of proportion is proposed as a fundamental concept that allows the student to relate and apply the knowledge acquired in their Geometry and Algebra courses in the resolution of optimization problems. Several examples are presented that show the use of proportion as an alternative mathematical tool to address contextualized problems in the determination of maximums and minimums. . The use of proportion as a basic concept allows students to improve their understanding and expand their heuristic strategies without the use of the derivative, as a counterpart to rigid thinking and fixation by the standardized procedures of Differential Calculus, such as the criteria of maximums and minimums, where it is necessary to seek a link between the function to be optimized and its derived function.

**Keyword:** proportion, optimization, heuristic strategies, maximums and minimums.

## Introducción

Según Lacasa (2019) optimizar es encontrar de entre un conjunto de posibilidades aquella que es mejor bajo un criterio concreto.

En la resolución de problemas de optimización (máximos o mínimos), el Cálculo Diferencial es una de las mejores herramientas conceptuales, más utilizada por los docentes, en la enseñanza de este tipo de problemas, compartiendo la idea de Wenzelburger (1993): hay que encontrar relaciones entre variables y eliminar algunas para poder derivar, sin embargo, existen dificultades para buscar la relación entre la función original y su derivada.

Como alternativa al uso de los conceptos del cálculo, se propone el uso de proporciones que evitan la determinación de la función derivada, y permiten visualizar relaciones significativas entre las variables del problema, así como semejanza entre figuras geométricas planas.

De manera general, en los Planes de estudio del Bachillerato, los problemas de optimización están presentes en los cursos de Matemáticas, pero su tratamiento didáctico se da bajo las herramientas conceptuales del Cálculo Diferencial. Este procedimiento frecuentemente causa errores y dificultades en los estudiantes que se inician en el estudio del tema. Para ejemplificar estos errores y dificultades se expone la solución de un problema de optimización propuesto por Cuevas y Moreno (2004). Estos autores plantearon el siguiente problema a profesores en servicio y estudiantes de maestría e ingeniería. “Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada, sin tapa, con una lámina cuadrada de 13 $cm$ de lado, donde la base esté formada por una esquina de la lámina. La función a optimizar es $V(x) = x^2(13 - x)$. En los resultados reportan dificultades en profesores y errores conceptuales en los estudiantes: todos los profesores aplican el concepto de la segunda derivada y dieron como respuesta que el volumen máximo se encontraba cuando $x = \frac{26}{3} = 8.66\ cm$. Es decir, se tiene que partir la longitud original de la lámina (13 cm) en cuatro partes de $8.66\ cm$, imposible de realizar.

Los estudiantes, obtienen el mismo resultado que los docentes. La mayoría de los examinados aplica el criterio de la segunda derivada, pero no consideran relevante el dominio de la función ($0 \leq x \leq \frac{13}{4}$).

En los Programas de Estudio, Área de Matemáticas. Cálculo I y II del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH, 2016), en la Unidad 4 Comportamiento gráfico y problemas de optimización se sugieren las estrategias:

En cuanto los problemas de optimización, es conveniente iniciar con problemas cuyo modelo no sea difícil de representar como una función real de variable real, y utilizar en primera instancia, su gráfica para hacer predicciones de acuerdo al contexto del problema. Lo cual permitirá al alumno reforzar sus conocimientos acerca del dominio y contradominio de funciones.

En los problemas que resuelvan el profesor y los estudiantes de manera conjunta, enfatizar la forma en que la condición que establece el problema entre las variables: ancho y largo, radio y altura, etcétera; permite que la función a optimizar se transforme en una función con una sola variable independiente. Tomás (2002) señala que el abordaje de tales problemas es delicado y árido. Los estudiantes necesitan tener un considerable grado de abstracción que, en general no poseen cuando se ponen en contacto con ellos por primera vez.

Peralta (1994) abunda que dentro de las dificultades no siempre es posible construir una función simple derivable.

Referente al enfoque didáctico, los programas del CCH sugieren: el trabajo organizado con base en la resolución de problemas posibilitará al estudiante el desarrollo de habilidades matemáticas, entre las que destaca la flexibilidad de pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos).

El abandono de los estereotipos (enfoque flexible) debe partir desde la perspectiva del docente, para ello es importante mostrar ejemplos concretos que sugieran un cambio de la estrategia basada en reglas de derivación, hacia procedimientos alternativos. Con el uso de estos procedimientos se dejaría de lado la impresión, al alumno y a algunos profesores, de que su abordaje es exclusivo del Cálculo Diferencial.

Como menciona Itelson (1985): cambiando el enfoque de la actividad se puede mostrar al alumno el mismo material bajo diferentes aspectos y educar en él distintos tipos de pensamiento.

En este cambio de estrategia, Hernández (2013) menciona que muchos problemas de este tipo se logran resolver por medio de la Geometría y el Álgebra elementales sin recurrir al uso de la derivada de una función, como alternativa a los métodos y procedimientos generales y sistematizados que se han desarrollado para resolver problemas de máximos y mínimos haciendo uso de la derivada.

Por ejemplo, en el caso del problema anterior, planteado por Cuevas y Moreno (2004), la fijación por los procedimientos generales del Cálculo, mencionados por Hernández (2013), no permite reflexionar sobre los siguientes hechos: la longitud de la lámina es de 13 cm por lado, como la base se puede construir en cualquier esquina de la lámina, la longitud restante es $3x$ por un lado y $13 - x$ por el otro, por lo que se puede formar la proporción $\frac{13}{4x} = \frac{13-x}{3x}$ que conduce a la ecuación cuadrática $4x^2 - 13x = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = \frac{13}{4}$ (solución aceptable), además, de acuerdo con las condiciones del problema, estas raíces son los extremos del intervalo de variación de la función $V(x) = x^2(13 - x)$, es decir para que se pueda construir la caja, los lados de la base cuadrada deben tener una medida entre 0 y 3.25 cm.

## Propuestas alternativas

Como ya se comentó, algunos problemas usados frecuentemente para ilustrar el cálculo de máximos y mínimos en el nivel bachillerato, se pueden resolver usando las ideas de razones y proporciones o usando estos conceptos y la función cuadrática, sin necesidad de utilizar la herramienta conceptual del Cálculo Diferencial.

Docentes como (Melchor, 1994; Benavides y Calete, 1995 y Fritzler, 1995) han planteado la alternativa de que en la Matemática del Bachillerato se resuelvan problemas de máximos y mínimos sin el auxilio del Cálculo Diferencial.

Fritzler (1995) menciona: encontrar soluciones de problemas de optimización con métodos elementales reclama un análisis profundo de todas las características específicas de las funciones correspondientes. Así, este tipo de problemas desempeña el importante papel didáctico de contribuir a la formación del concepto de función.

En relación al concepto de función, investigaciones realizadas por Cuevas y Moreno (2004); Vergel, Rincón y Zafra (2017) señalan que hay posibles dificultades en conceptos de precálculo cuando se tiende a solucionar algorítmicamente los problemas relacionados con los criterios de máximos y mínimos en problemas contextualizados de optimización. Estos investigadores reportan, una incomprensión de significados relativos al concepto de función como el dominio y sentido de las raíces en el contexto del problema, cuando se resuelven analíticamente con papel y lápiz. El problema planteado en una investigación, a docentes (modalidad en línea) es: una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón con 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba para construir la caja. Determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo ¿Cuál es este volumen? A partir de la figura presentada, los docentes determinan las dimensiones de la caja: largo $24-2x$ , ancho $9-2x$, altura $x$.

La expresión del volumen de la caja es

$V(x)=(9-2x)(24-2x)(x)$ *(1)*

Simplificando *(1)* se obtiene

$V(x)=4x^3-66x^2+216x$ *(2)*

Para encontrar el valor óptimo, los docentes utilizan el criterio de la primera derivada

$\frac{dV(x)}{dx}=12x^2-132x+216$ *(3)*

Igualando a cero la expresión *(3)* se obtiene

$0=12(x-9)(x-2)$ *(4)*

Las raíces de esta ecuación son $x=9$ y $x=2$ como no es posible un corte de 9 pulgadas, el corte óptimo debe ser de 2 pulgadas. Con este corte el volumen máximo de la caja es $V(2)=200$ pulgadas cúbicas.

En esta situación, el contexto pasa desapercibido por algunos docentes, ya que las raíces de *(1)* son $x = 4.5$, $x = 12$ y $x = 0$, por lo tanto, el dominio restringido, por las condiciones del problema, debe ser $(0 \leq x \leq 4.5)$.

Como alternativa al uso de los procedimientos estandarizados del cálculo, estos investigadores usaron un ambiente dinámico con el software GeoGebra, lo que permitió a los docentes observar la representación de conceptos no comprendidos, abordando la solución del problema sin la noción de derivada. También aclaran que el uso de las tecnologías digitales por sí mismas no facilitan la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos, para ello, es necesario diseñar una cuidadosa secuencia didáctica que guie al estudiante a la interiorización de los mismos.

Posiblemente, el temor de no terminar con el programa oficial para la enseñanza del Cálculo Diferencial, puede ser una razón para obviar este tipo de secuencias, sin embargo, puede ser compensado por la elaboración y aplicación de principios matemáticos elementales como la idea de función y dominio, que ayudan en la conceptualización del Cálculo.

Benavides y Calete (1995) escriben: de acuerdo a la historia de la Matemática, se sabe que surgió por necesidades presentes en la vida cotidiana, y ha llegado a ser una ciencia con gran influencia en las demás, por consiguiente es necesario que todo estudiante tenga una amplia comprensión de sus bases fundamentales, pero su alto nivel de abstracción y los escasos ejemplos de aplicación de estos temas a problemas concretos, provocan en los alumnos un estudio tedioso y relativamente inaccesible, ya que, es hasta el tercer año del bachillerato, al introducirse en el estudio del Cálculo Diferencial, cuando se muestran algunos ejemplos interesantes de la aplicación de la Matemática y se hace evidente la relación con las otras ciencias.

Navarrete (2019) menciona algunas necesidades prácticas surgidas con el descubrimiento de América: medición del tiempo para llevar el registro de la duración de los viajes o de las diferencias horarias en puntos remotos y considerablemente distantes, el estudio del movimiento de los astros para la orientación en navegación, es decir, el desarrollo del cálculo infinitesimal estuvo ligado a la observación de la naturaleza y a la resolución de problemas prácticos.

Imaz y Moreno (2009) escriben: para abordar problemas prácticos, matemáticos de la talla de Fermat, Cavalieri, Descartes, Wallis y muchos otros (Edwards, C. 1979), diseñaron estrategias ad-doc para resolver casos especiales de variación y acumulación. Con respecto a este punto, Navarrete (2019) alude que en los siglos XVI y XVII matemáticos como Simón Stevin (1548-1620), Thomas Harriot (1560-1621), John Wallis (1643-1689), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Evangelista Torricelli (1608-1647), se preguntaron: ¿Qué pasaría si supusiésemos que una línea es una cadena de puntos diminutos o infinitamente pequeño? Y de manera similar ¿que un plano se compone se compone de líneas colocadas una al lado de la otra y un sólido de planos apilados uno encima de otro? Los resultados que se encontraron con rapidez fueron espectaculares. Ayudados por esta suposición problemática pudieron calcular fácilmente las longitudes de las curvas geométricas y sus pendientes, las áreas de figuras geométricas y los volúmenes de sólidos, resultados que serían extremadamente difíciles de obtener o simplemente imposible utilizando la geometría tradicional.

Estos precursores de los nuevos métodos infinitesimales sabían muy bien que su enfoque se basaba en fundamentos lógicos precarios, pero a la mayoría no le importaba. Siempre y cuando el método condujera a resultados correctos, razonaron, debía ser fundamentalmente sólido (Navarrete, 2019).

De acuerdo con Imaz y Moreno (2009), estos precursores fueron acercándose, problema por problema, a métodos cada vez más generales mediante los casos particulares, pero sin lograr desentrañar la relación oculta entre la variación y la acumulación. Hubo que esperar el trabajo de Newton y Leibniz para que cristalizara lo que se venía gestando: el teorema fundamental del cálculo, que establece una relación profunda entre la derivada y la integral.

## Ejemplos del uso de proporciones

Si se desea atender, de manera práctica, la labor del docente para incidir en aprendizajes significativos en los estudiantes, de acuerdo con orientaciones alternativas en la resolución de problemas de optimización, es necesario realizar una mayor difusión interpretativa sobre la orientación sugerida. Con este propósito, se incluyen ejemplos de modelos que retoman el concepto de proporción para ilustrar su empleo en el aula, como antecedente al cálculo de máximos y mínimos evadiendo el uso de la derivada de una función

## Ejemplo A

Se quiere construir dos chapas cuadradas de materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivos de \$20 y \$30 por centímetro cuadrado. ¿Cuáles deben ser las longitudes de los lados de los cuadrados si se desea que el costo total sea mínimo y si además queremos que la suma de los perímetros de las chapas sea de 100 cm? (Martínez, 2023)

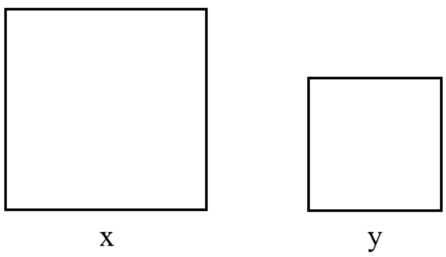


*Figura 1.* Chapas cuadradas

Solución

El perímetro de los cuadrados es $4x + 4y = 100$ o $x + y = 25$

El área de los cuadrados es $x^2 + y^2$

El costo del material es $20x^2 + 30y^2$

Como los cuadrados son semejantes, se forma la proporción

$\frac{30y^2}{y} = \frac{20x^2}{x}$ …………..(1)

Esta proporción es equivalente a

$30y = 20x$ …………….(2)

La ecuación (2) se puede transformar en

$\frac{x}{y} = \frac{30}{20}$ ……………….(3)

La simplificación de (3) conduce a

$\frac{x}{y} = \frac{15}{10}$ ………… (4)

De la proporción (4) se obtiene $x = 15$ y $y = 10$: 15 $cm$ y 10 $cm$ son las longitudes de las chapas cuadradas.

**Ejemplo B**

Considérese el cuadrado $ABCD$. A partir de sus vértices se determinan los segmentos iguales $Aa$, $Bb$, $Cc$ y $Dd$ y se construye el cuadrado $abcd$ , uniendo los puntos $a, b, c,$ y $d$ ¿Para qué valores de $Aa$ tiene área mínima el cuadrado $abcd$ ? (Natansón, 1977).

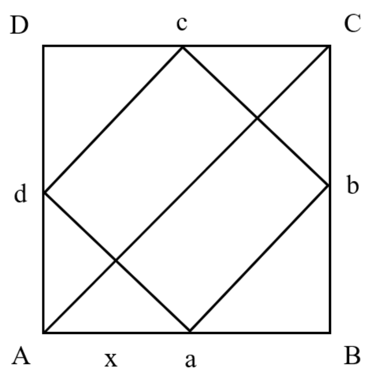


*Figura 2.* Cuadrado $abcd$ inscrito

Solución

Sea el segmento $AC$ paralelo al segmento $ab$, $AB = l$, $Aa = Bb = x$ y $aB = l - x$. Por la semejanza de los triángulos rectángulos $ABC$, $aBb$ y usando el teorema de Pitágoras se construye la proporción

$\frac{l}{l-x} = \frac{\sqrt{2l^2}}{\sqrt{(l-x)^2+x^2}}$ …………(1)

Eliminando los radicales en (1) se obtiene

$\frac{l^2}{(l-x)^2} = \frac{2l^2}{(l-x)^2+x^2}$………..(2)

La simplificación de (2) conduce a $x = \frac{1}{2}$ Para obtener el área mínima, los puntos $a, b, c$ y $d$ deben colocarse en los puntos medios del cuadrado $ABCD$.

**Ejemplo C**

Se tiene una superficie rectangular con un área de 18 unidades cuadradas ($u^2$), sabiendo que en su interior existe otra superficie rectangular, de manera que la separación entre los márgenes horizontales es de $0.75\,u$ y entre los márgenes verticales hay una separación de $0.5\,u$. Encontrar las dimensiones de la superficie rectangular de manera que el área entre los rectángulos sea máxima (Hernández, 2021).

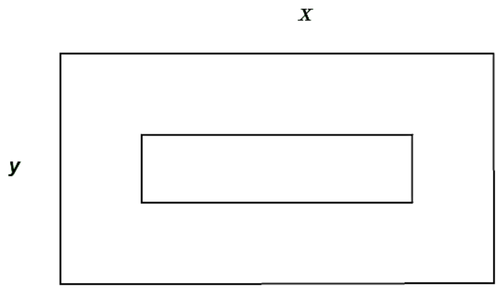


*Figura 3.* Rectángulos separados por área máxima

Solución

Como xy = 18 …………….(1)

Entonces $y = \frac{18}{x}$ ……………(2)

Asumiendo semejanza entre los rectángulos se construye la proporción

$\frac{x}{x-1.5} = \frac{y}{y-1}$ ……………….(3)

Sustituyendo (2) en (3), se transforma en

$\frac{x}{x-1.5} = \frac{\frac{18}{x}}{\frac{18}{x}-1}$ ……………(4)

Simplificando (4) se obtiene

$x^2 = 27$ (5)

Por lo que $x = 3\sqrt{3}$ y $y = 2\sqrt{3}$.

Para que el área entre los rectángulos sea máxima, las dimensiones deben ser: $x = 3\sqrt{3}\,u$ y

$y = 2\sqrt{3}\,u$.

**Ejemplo D**

Considérese el triángulo $ACB$, ¿dónde debe construirse una recta paralela a la base $AB$, de manera que el área del rectángulo $abcd$ sea máxima? (Natansón, 1977).

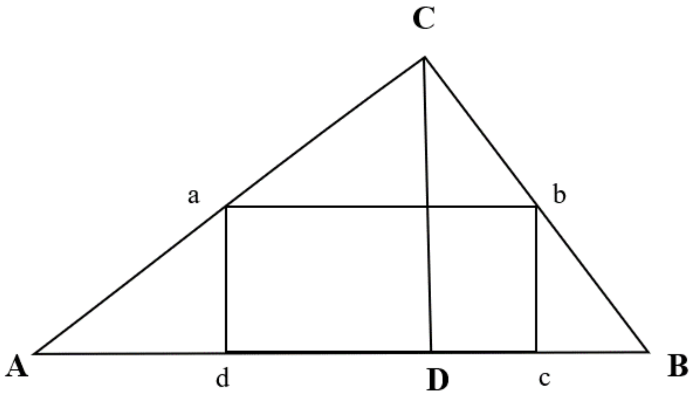


*Figura 4.* Rectángulo inscrito

Solución

Sean $AB = X$, $ab = x$, $CD = y$, y $bc = h$. Por semejanza de los triángulos $ACB$ y a Cb, se deduce la proporción

$\frac{X}{x} = \frac{y}{y-h}$. (1)

Despejando $x$ de (1) se obtiene

$x = \frac{X(y-x)}{y}$ (2)

El área del rectángulo es

$A = xh$ (3)

Sustituyendo (2) en (3) se obtiene

$A = \left[\frac{X(y-x)}{y}\right] h$ (4)

(4) se puede transformar en

$A = -\frac{Xh^2}{y} + Xh$ (5)

(5) es una función cuadrática de la forma

$y = -ah^2 + bh$ (6)

El valor de h que maximiza esta función es $h = -\frac{b}{2a}$ por lo que $h = -\frac{X}{2\frac{X}{y}}$

Simplificando (8) se encuentra $h = \frac{y}{2}$. El área máxima se obtiene cuando la altura del rectángulo es la mitad de la altura del triángulo.

**Ejemplo E**

Se tienen postes telefónicos distanciados entre sí a $70$ metros, a lo largo de una carretera recta. ¿A qué distancia ($x$) debe colocarse un hombre ($H$) frente al primer poste y en forma perpendicular a la carretera, para que el ángulo subtendido por los postes números 4 ($P_4$) y 5 ($P_5$) sea máximo? (Benavides y Calete, 1995).

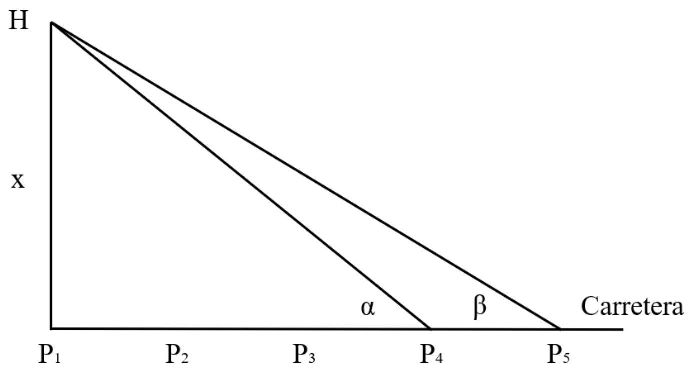


*Figura 5*. Postes $P_1, P_2, \ldots, P_5$.

Solución

Por las condiciones del problema, si llamamos $\alpha$ y $\beta$, respectivamente a los ángulos subtendidos por los postes 4 ($P_4$) y 5 ($P_5$), tenemos:

$$tg\alpha = \frac{x}{210} \qquad (1)$$

$$tg\beta = \frac{x}{280} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene

$$210(tg\alpha) = 280(tg\beta) \qquad (3)$$

(3) se puede expresar como

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{280}{210} \qquad (4)$$

(4) es equivalente a

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = 1.33 \qquad (5)$$

De (5) se deduce que los ángulos buscados son diferentes de $45^0$ $\left(\frac{tg45°}{tg45°} = 1\right)$ por ejemplo, con $\beta = 40^0$ y $\alpha = 50^0$, se obtiene $\frac{tg50^0}{tg40^0} = 1.42$ Ensayando otros valores, se llega a que los ángulos son aproximadamente: $\alpha = 50^0$ y $\beta = 42^0$.

Utilizando $tg\alpha = \frac{x}{210}$, se obtiene; $x_1 = 250.27m$

Utilizando $tg\beta = \frac{x}{280}$, se obtiene; $x_2 = 252.11m$

La solución estimada para $x$ (en promedio) es:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{250.27 + 252.11}{2} = 251.19\ m$$

**Comentario final**

Los docentes debemos reflexionar sobre el siguiente hecho: en la temática de resolución de problemas de optimización, puede ser que algunos estudiantes se les facilite más utilizar la derivada, sin embargo, otros estudiantes pueden abordar este tipo de problemas, usando ideas intuitivas simples o heurísticas que les ayudan a promover su pensamiento numérico, geométricos o algebraico. Dentro de estas heurísticas, el alumno puede construir figuras, tablas o diagramas que le permitan encontrar relaciones entre los números o entre las figuras. Otra idea alternativa que puede surgir es la de proporción. Como se ejemplificó, la proporción permite abordar los problemas de optimización, sin el uso de la derivada. Por lo tanto, hay que considerar la posibilidad de que en las heurísticas de los estudiantes se presente la proporción, como resultado de otras ideas matemáticas previas. La posible presencia del concepto de proporción permitiría, por una parte, relacionar las ideas intuitivas en el desarrollo del cálculo con sus conceptos formales y, por otra, que los estudiantes tengan otra visión de la matemática.

**Referencias**

Benavides, A., & Calete, J. (995). La matemática del bachillerato en los problemas de optimización. *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática*. Simposio llevado a cabo en la UNAM. Ciudad de México.

Cuevas, C. y Moreno, S. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. Revista Educación Matemática, 16(2), 93-104. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516205

Fritzler, W. (1995). Principios elementales para la solución de problemas geométricos de optimización. *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática*. Simposio llevado a cabo en la UNAM. Ciudad de México.

Hernández, J. D. (2021). *Habilidades matemáticas en el nivel medio*. México: Universidad Pedagógica Nacional.

Hernández, L. (2013). Determinación de máximos y mínimos sin necesidad del cálculo diferencial. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.),VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 371-378. Montevideo, Uruguay.

Itelson, B. (1985). Psicología de los tipos básicos de aprndizaje y enseñanza. En A. Petrovsky, Psicología Evolutiva y Pedagógica. México : Cartago-Letras.

Martínez Mediano, J. M. (2023). *Matemáticas II Funciones:optimización*. Obtenido de academia.edu: https://www.academia.edu/8997050/Matemáticas_II_Funciones_optimización

Melchor, T. C. (1994). Naturaleza del concepto de función. La proporción como relación privilegiada. *Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa*. San José , Costa Rica.

Natansón, I. P. (1977). *Problemas elementares de máximo y mínimo*. Suma de cantidades infinitamente pequeñas (Lecciones populares de matemáticas). Moscú: MIR.

Peralta, J. (1994). Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución. *Educación Matemática*, 6(2), 56-71. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/9729/1/Problemas1994Peralta.pdf

Tomás Blanquer, F. R. (Junio de 2002). Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial. *Suma*, *40*, 87-90. Obtenido de https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/40/087-090.pdf

UNAM. (2016). *Programas de estudio. Área de Matemáticas. Cálculo I-II*. Colegio de Ciencias y Humanidades. Recuperado el 13 de junio de 2023, de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/Cálculo_I_II.pdf

Lacasa, L (2019). *Optimización matemática. En busca de la mejor opción. Grandes ideas de las matemáticas*. EMSE EDAPP, S. L. y Prisanoticias Colecciones. España

Navarrete, H, (2019). *Cálculo infinitesimal. Grandes ideas de las matemáticas*. EMSE EDAPP, S. L. y Prisanoticias Colecciones.

Imaz, C y Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza*, 1(1), 99-112. https://doi.org/10.61174/recacym.v1i1.168