Ejemplares Físicos para Problemas de Optimización de Cálculo Elemental

El Cálculo y su Enseñanza
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Rodrigo González González

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora, México

rodrigo.gonzalez@unison.mx

Recibido: *13* de abril de 2023
Aceptado: *26* de junio de 2023

Autor de Correspondencia:
Rodrigo González González

Resumen. El CÁLCULO es una de las ramas más importantes de la matemática, cuyo rango de aplicación es amplio y variado, lo cual lo posiciona como fundamento para toda área que utilice en cualquier medida alguna parte de su contenido. En virtud de lo anterior, el estudio sucinto del Cálculo requiere el apoyo, tanto como sea posible, de recursos adicionales no tradicionales para prosperar el proceso enseñanza-aprendizaje. Una opción factible, relevante y motivadora para que los estudiantes de ciencias o ingeniería logren entender de forma eficaz, precisa y entretenida, varios conceptos y resultados de Cálculo es contar con la posibilidad de contrastar los resultados obtenidos de forma meramente matemática, con evidencia práctica y palpable utilizando artilugios tangibles sencillos. En este escrito se presentan seis problemas típicos de optimización de funciones reales de variable real, con sus respectivas soluciones y conclusiones, y se describe un *prototipo* o "ejemplar físico" adecuado para cada caso. Esta selección particular es una muestra representativa de una colección de más de veinte problemas del tema de máximos y mínimos para los que fue posible realizar materiales rudimentarios, con el objetivo de complementar el aspecto teórico de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral. Estos objetos físicos auxiliares son producto de un proyecto básico de docencia formalmente registrado, el cual fue apoyado con trabajo conjunto de estudiantes durante varios semestres.

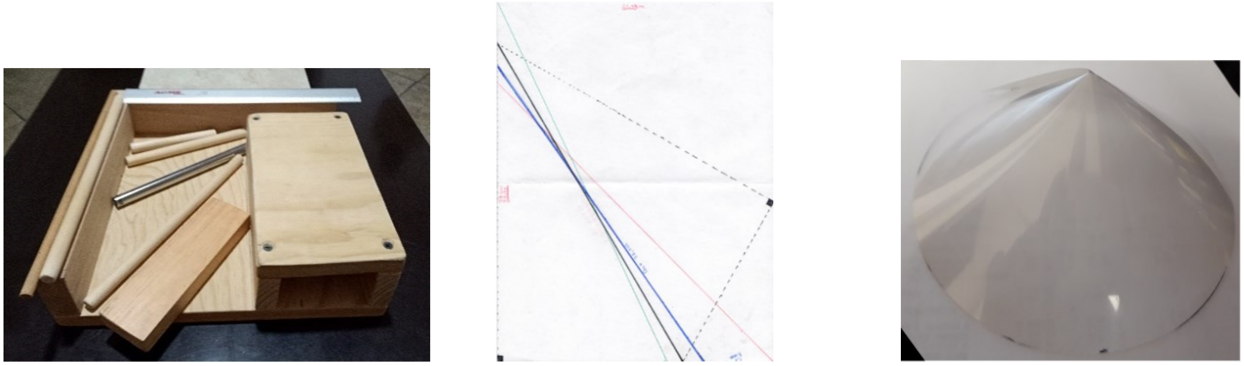
Palabras clave: Cálculo Diferencial, optimización, prototipo, aplicación del Cálculo.

Abstract. CALCULUS is one of the most important branches of Mathematics, whose range of application is wide and varied, which positions it as a foundation for any area that uses any part of its content to any extent. By virtue of the above, the concise study of Calculus requires the support, as much as possible, of additional non-traditional resources to prosper its teaching-learning process. A feasible, relevant and motivating option for science or engineering students to understand various Calculus concepts and results in an effective, precise and entertaining way is to have the possibility of contrasting the results obtained in a purely mathematical way with practical and palpable evidence using simple tangible gadgets. In this paper, six typical optimization problems of real functions of real variables are presented, with their respective solutions and conclusions, and a suitable prototype or "physical sampler" is described for each case. This particular selection is a representative sample of a collection of more than twenty problems of the maxima and minima topic for which it was possible to make rudimentary materials, with the aim of complementing the theoretical aspect of the Differential an Integral Calculus subject. These auxiliary physical objects are the product of a formally registered basic teaching project, which was supported by joint work of students during several semesters.

Keywords: Differential Calculus, optimization, prototype, application of Calculus.

1. Introducción

La idea de utilizar materiales lúdicos o manipulables en los cursos de cálculo diferencial elemental surgió hace no mucho tiempo, cuando al impartir la materia curricular de primer semestre, Cálculo Diferencial e Integral I, y a un grupo de ingeniería en la Universidad de Sonora, algunos estudiantes preguntaron si era posible tener de forma palpable los resultados obtenidos matemáticamente para ciertos problemas de máximos y mínimos. Sin imaginar el impacto que tendría, la respuesta inmediata de mi parte fue afirmativa, pues como profesor por varios años de los cursos de cálculo diferencial e integral, tenía una idea previa al respecto y, con tal cuestionamiento, se presentó la oportunidad de ponerla en práctica. En esa ocasión, fue posible construir y presentar tres ejemplos concretos, los cuales incluyó en el presente escrito, a los que he nombrado: *pasillo en escuadra, cálculo en una hoja de papel* y *cono de un sector circular* (Figura 0 *a*), *b*) y *c*), respectivamente). Estos objetos causaron sensación y asombro entre los estudiantes, sobre todo de "los preguntones". De esta forma inició la propuesta propia de complementar los cursos iniciales de cálculo con materiales físicos auxiliares, la cual en mis cursos ha tenido éxito, ya que esta opción ha sido bien aceptada por parte de los estudiantes, con un resultado satisfactorio.



a) Pasillo en escuadra   *b*) Cálculo en una hoja de papel   *c*) Cono de un sector circular

Figura 0. Prototipos precursores

Posteriormente, al impartir de nuevo el curso Cálculo Diferencial e Integral I a un grupo de nuevo ingreso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Sonora, como parte ponderada de la evaluación encomendé a los estudiantes un proyecto final en el que presentarán la solución de un problema del tema de máximos y mínimos, estratégicamente seleccionado por ellos mismos y, de forma opcional acompañado de su propio prototipo. La respuesta obtenida en esa ocasión fue favorable con una excelente participación, ya que varios de los alumnos diligentemente y con entusiasmo presentaron formalmente sus resultados y los materiales ejemplares correspondientes.

Algunos de estos prototipos se presentaron en un evento académico y se integraron a la colección referida en el resumen. En particular, un prototipo en especial de esta segunda etapa se incluye en esta exposición con una breve historia sobre el mismo y una generalización inmediata. De hecho, en esa ocasión hubo muchos comentarios positivos al respecto por parte de los estudiantes, entre los cuales reproduzco el siguiente porque me pareció importante e interesante.

> Estudiante: De esa forma el curso de Cálculo fue atractivo, entretenido y hasta divertido.

Otros comentarios como el anterior motivaron el interés de seguir realizando esta amena actividad.

En los siguientes semestres, este proceso se repitió en grupos de Cálculo Diferencial e integral I de las licenciaturas en Física y Física Médica de la Universidad de Sonora, con resultados extraordinarios, aun cuando fue durante el periodo de la pandemia. El confinamiento implicó cambios significativos de la experiencia presencial normal y presentación física de los materiales correspondientes de las respectivas asignaciones, a utilizar la modalidad virtual mediante diversas plataformas, uso de graficadores y programas de cómputo para resolver los problemas, realizar simulaciones y presentar los resultados, con el apoyo de videos grabados en casa.

Entre los principales programas utilizados destacan: Geogebra, Maple, Mathematica y Maxima. De forma simultánea, durante este periodo registré y desarrollé un proyecto básico de docencia para elaborar más prototipos de problemas de cálculo cuyas características lo permiten, tanto de una como de varias variables. Además, esta iniciativa permitió tomar la decisión y aprovechar la oportunidad de compartir la experiencia en diferentes escenarios, como presentación en eventos académicos del área, participación post-pandemia con pláticas cortas o de orientación vocacional en preparatorias del estado de Sonora, concursos, entre otros. Cabe destacar que, con uno de los prototipos realizados, con la colaboración de un ingeniero en electrónica, se obtuvo una patente. El modelo y descripción del prototipo correspondiente a este problema específico se incluyen en este artículo. Por último, también se aborda un problema diferente, que involucra contenidos tanto de cálculo diferencial como integral, y su respectivo prototipo e interpretación de resultados, utilizando Geogebra.

El proyecto está abierto para colaboración de quien desee sumarse y generalización a problemas de máximos y mínimos de funciones de varias variables del cálculo vectorial y, de forma análoga, para problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. Prototipos Precursores

Los tres prototipos presentados en la introducción (Figura 0), a los que referiré como *precursores,* fueron los que generaron esta línea de trabajo en la etapa inicial y, respectivamente, corresponden a los problemas de optimización que se plantean y desarrollan en orden en esta sección. Cabe notar que los materiales utilizados para la elaboración de estos prototipos son muy sencillos en cuanto a disponibilidad y costo, lo cual también es parte de la optimización, aunque en otro sentido.

Problema 1. Pasillo en escuadra: En una construcción, se requiere pasar un tubo de acero por un pasillo de medida $A = 3.0$ m de ancho, donde al final de este existe una vuelta en ángulo recto hacia otro pasillo que mide $a = 1.0$ m de ancho. ¿Cuál es la longitud L del tubo más largo posible que se puede transportar (¡horizontalmente, por supuesto!) por tal esquina? (ver Figura 1).

En este problema es posible considerar también la transportación por ambos pasillos de un objeto más ancho (por ejemplo, un tablón o un sillón). ¿Será la misma longitud en cada caso?

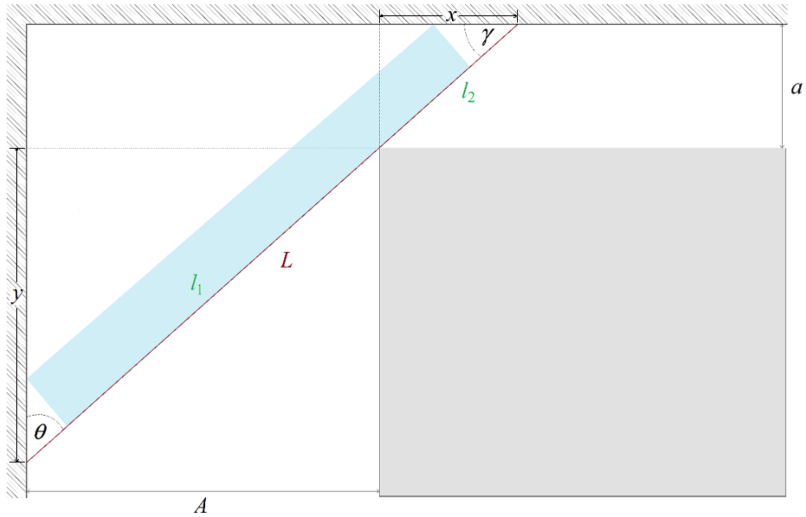


Figura 1. Transportación de un objeto largo y/o ancho a través de un pasillo en escuadra

Solución. Se tiene que $L = \sqrt{(A+x)^2 + (a+y)^2}$, con $\begin{cases} x = a \tan\theta, \\ y = A\cot\theta, \end{cases}$ $0 < \theta < \pi/2$, lo cual implica $L = L(\theta) = \sqrt{(A + a\tan\theta)^2 + (a + A\cot\theta)^2}$.

Nótese que maximizar L es equivalente a maximizar el radicando

$$r(\theta) = (A + a\tan\theta)^2 + (a + A\cot\theta)^2$$

por lo que $r'(\theta) = 2(A + a\tan\theta)[a\sec^2\theta] + 2(a + A\cot\theta)[-A\csc^2\theta]$.

Al igualar a cero esta expresión, se tiene que $\theta = \arctan\left(\sqrt[3]{A/a}\right)$ es el único valor crítico, el cual genera un máximo. Por lo tanto, la longitud máxima del tubo que se puede pasar por el pasillo es

$$L_{max} = L\left(\tan^{-1}\left(\sqrt[3]{A/a}\right)\right) = \sqrt{\left(A + \sqrt[3]{Aa^2}\right)^2 + \left(a + \sqrt[3]{aA^2}\right)^2}$$

□

Nota. Para los valores específicos de nuestra construcción $A = 3$ m y $a = 1$ m, la longitud hipotética del tubo es aproximadamente 5.405598 m. Sin embargo, para que un tubo de grosor *d* metros de diámetro (o un sillón de *D* metros de ancho) pase por el pasillo es necesario cortar dos partes adicionales en los extremos: una de tamaño $c_1 = d/\tan\theta$ y otra de tamaño $c_2 = d/\tan\gamma$, donde $\gamma = \pi/2 - \theta$.

En general, es posible tener más de una forma de modelar y resolver una determinada situación. En particular, para este problema una forma alternativa de hacerlo es considerar la función

$$L(\theta) = l_1 + l_2 = A\csc\theta + a\sec\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Además, de acuerdo al interés particular de cada usuario, se pueden considerar otras variables asociadas al problema. Por ejemplo, ¿es posible describir con una función la curva que genera (en el piso) el extremo del tubo que ingresa primero al pasillo? ¿Existirán otras relaciones funcionales de interés para este problema?

Prototipo 1. El prototipo mostrado en la Figura 0 *a*) fue elaborado por un servidor a escala 1/20, utilizando recortes de madera y triplay ordinarios para simular la esquina de la construcción en cuestión. Las medidas correspondientes de los pasillos son $A = 15$ y $a = 5$ cm, respectivamente. La longitud máxima hipotética que corresponde a esa escala es $L = 27.03$ cm. Al considerar palillos o tubitos de diferente grosor, se debe aplicar el corte apropiado descrito en la observación anterior. Por ejemplo, si se considera un tubito metálico de 0.635 cm (1/4 de pulgada) de radio, se tiene que el más largo de estos que pasa por dicha esquina es de longitud 24.3 cm (¡cualquier otro palillo del mismo grosor más largo no pasa! Esto se verifica utilizando el ejemplar utilizado).

Por otra parte, si se desea pasar una tablita de anchura casi la del pasillo más angosto (simulando, por ejemplo, un sillón que pase justo por tal pasillo), el largo máximo de esta es 16.35 cm. Así, podemos seguir jugando a pasar objetos de otras medidas tanto en el prototipo como por el pasillo real. Es importante mencionar que para determinar las medidas exactas en cada caso es necesario también aplicar los elementos de Trigonometría aprendidos en la preparatoria.

Problema 2. Cálculo en una hoja de papel: Se dobla una de las esquinas de una hoja de papel tamaño carta (21.59 cm x 27.94 cm) para llevarla hasta el borde contrario del lado más largo (Figura 2). ¿Cómo debe doblarse la hoja de modo que la longitud L_D del doblez sea mínima?

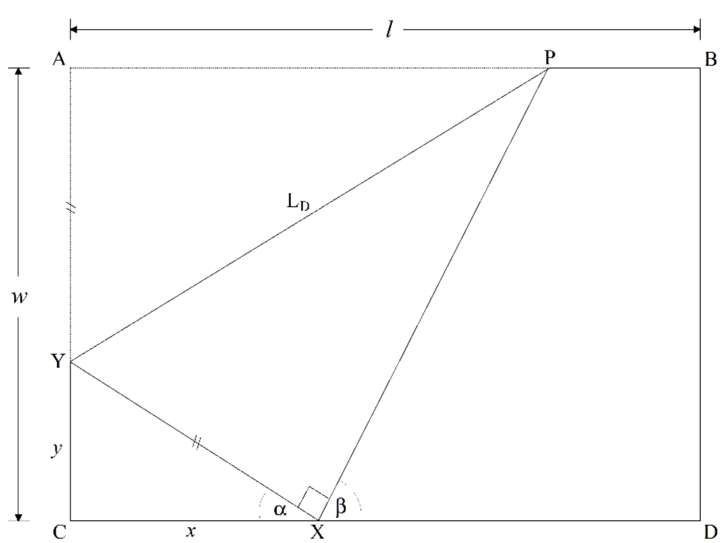


Figura 2. Doblez mínimo en una hoja de papel

Solución. De acuerdo a la situación por analizar (ilustrada en la Figura 2), los ángulos α y β originados al doblar la hoja son complementarios, lo cual implica

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{w-y}$$

donde, en este caso, $w = 21.59$ cm es la anchura de la hoja (*width* en inglés).

Por otro lado, $\mathrm{XP} = w/\operatorname{sen}\beta = \frac{w}{x}\sqrt{x^2+y^2}$. Y, al doblar la hoja, AY = YX , de donde

$$(w-y)^2 = x^2+y^2 \;\rightarrow\; w^2-2wy+y^2 = x^2+y^2 \;\rightarrow\; x^2 = w^2-2wy$$

Así,

$$\mathrm{L_D}(y) = \sqrt{\mathrm{XY}^2+\mathrm{XP}^2} = \sqrt{x^2+y^2+\frac{w^2}{x^2}(x^2+y^2)} = \sqrt{(w-y)^2+\frac{w^2}{w^2-2wy}(w-y)^2}$$

La función $\mathrm{L_D}$ se minimiza si se minimiza el radicando,

$$\mathrm{R}(y) = (w-y)^2\left[1+\frac{w}{w-2y}\right]$$

Luego, al calcular la derivada de $\mathrm{R}(y)$ e igualarla a cero,

$$\mathrm{R}'(y) = -2(w-y)\left[1+\frac{w}{w-2y}\right] + (w-y)^2\frac{2w}{(w-2y)^2} = 0$$

se tiene que un punto crítico ocurre cuando $y = w$, el cual no es de interés, ya que significa no doblar la hoja (esto es, existe un valor óptimo en uno de los extremos del dominio) y tiene otro punto crítico cuando

$$-\left(1+\frac{w}{w-2y}\right) + (w-y)\frac{w}{(w-2y)^2} = -\left(\frac{2w-2y}{w-2y}\right) + \frac{w(w-y)}{(w-2y)^2} = 0$$

esto es, para $y = \frac{1}{4}w$ y $x = w/\sqrt{2}$, de donde se tiene que la longitud mínima del doblez es

$$\mathrm{L_D^{min}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}w \approx 28.046 \text{ cm}$$

Nota. La solución del problema es independiente de lo largo de la hoja de papel, $l \geq w$. ¡Esta característica resultó de gran interés para los estudiantes! De hecho, el todo lo relacionado con el problema les maravilló. Ellos pensaban, por ejemplo, que al llamarse *cálculo en una hoja de papel* era para hacer largas operaciones sobre esta, pero no imaginaban la matemática inherente en sobre la propia hoja de papel. □

Prototipo 2. El prototipo asociado a este problema ordinario (Figura 0 *b*)) es el más sencillo posible que se puede tener ya que consiste de una simple hoja de papel bond tamaño carta (de las que se utilizan para imprimir), en la que se miden diferentes dobleces con una regla graduada en centímetros y se corrobora que, en efecto, cualquier otro doblez posible tiene mayor longitud que la solución obtenida.

Problema 3. Cono construido de un sector circular: De un círculo de radio $R = 10$ cm, se corta una sección circular cuyo ángulo central es θ y los lados de esta sección se unen para formar un cono (Figura 3). ¿Qué magnitud debe tener θ para que el volumen del cono sea máximo?

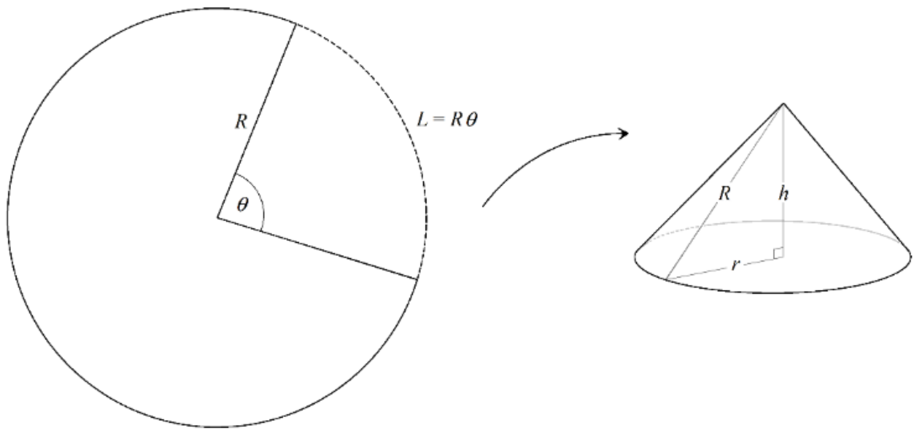


Figura 3. Cono de volumen máximo

Solución. Como se muestra en la Figura 3, la longitud del arco que subtiende el ángulo θ es $L = R\theta$, la cual es igual a la longitud de la circunferencia base del cono. Esto es, $R\theta = 2r\pi$, de donde se obtiene el radio de tal circunferencia, $r = R\theta/2\pi$.

Al tomar a θ como variable independiente y relacionar el área de la base del cono y su altura *h,* ambos en términos de θ, se obtiene el volumen del cono como función de θ:

$$V(\theta) = \frac{R^3\theta^2}{24\pi}\sqrt{4 - \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2}$$

Al derivar e igual a cero, obener los tres puntos criticos que tiene esta función y analizar con el criterio de la segunda derivada, se tiene que el ángulo que produce el máximo volumen es

$$\theta = 2\sqrt{2/3}\,\pi \text{ rad } \approx 66°3'40''$$

Nota. La solución del problema es independiente del tamaño del disco disponible. Esto resulta de gran interés porque puede aplicarse en diversas situaciones reales en la que haya necesidad de optimizar el recurso disponible,

Prototipo 3. El prototipo en este caso consiste de varios conos formados con sectores circulares de distintos ángulos obtenidos de discos del mismo tamaño cortados de acetatos (hojas de plástico transparentes que se utilizaban hace algunos años para proyectar en pantallas especiales trabajos escritos), como el que se muestra en la Figura 0. *c*). En particular, en el cono de volumen óptimo se pone azúcar o arena fina de tal forma que al tratar de vaciarla en cualquier cono de otro tamaño este no la puede contener en su totalidad, lo cual verifica de forma directa o experimental el resultado matemático obtenido.

3. Prototipos Especiales

En esta parte se presentan tres prototipos que fueron especiales cada uno por su propia historia y características particulares, pero sobre todo porque cada ejemplar físico auxiliar tuvo un impacto importante tanto en los cursos, como en otros escenarios en los que cada uno se presentó.

Problema 4. Rectángulo inscrito en una circunferencia y una generalización inmediata:

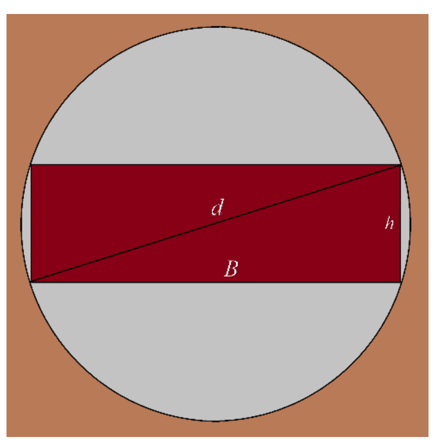
a) Un rectángulo de base B y altura h se inscribe en una circunferencia de radio r, cuyos centros coinciden. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo inscrito de área máxima?

b) Resolver el problema si en vez de circunferencia se considera una elipse con semi-ejes a y b.

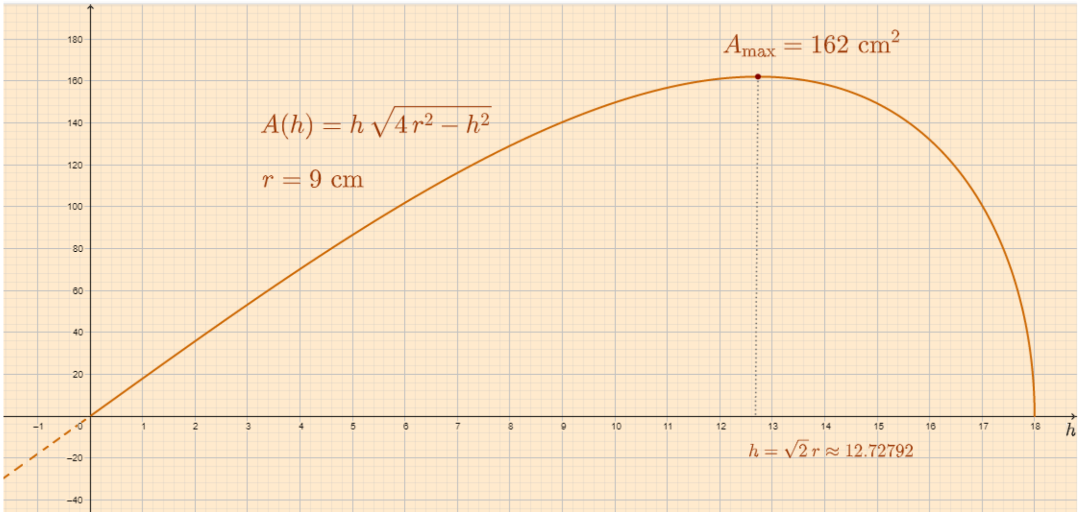
Solución. El área del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio r (Figura 4 a)), $A = Bh$, con B y h las longitudes de los lados, puede ponerse como función de cualquiera de estos, los cuales, a su vez, están relacionados con el radio de la circunferencia circunscrita por medio del diámetro (tamaño de la diagonal del rectángulo inscrito o hipotenusa de cualquiera de los dos triángulos en que este divide al rectángulo). Bajo estas consideraciones, el área del rectángulo inscrito se puede poner en función de la altura. Esto es,

$$A = A(h) = h\sqrt{4r^2 - h^2}, \text{ para } 0 < h < 2r$$

En particular, la gráfica de la Figura 4 b), cuyo análisis se realizó en Geogebra, muestra el comportamiento del área del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio r = 9 cm (medida con la que se construyó el prototipo correspondiente), respecto a uno de sus lados que determina al otro, la altura h, en este caso.



a)



b)

Figura 4. Rectángulo inscrito en una circunferencia y representación de la función área

El único punto crítico en el dominio natural del problema físico es $h = \sqrt{2} \cdot r$, el cual produce un máximo. Por lo tanto, para que el área del rectángulo inscrito en la circunferencia dada sea máxima, la base y la altura deben medir $B = h = \sqrt{2} \cdot r$. Es decir, se trata del cuadrado de lado $\sqrt{2} \cdot r$, cuya área es $A_{max} = 2r^2$. □

Prototipo 4. El prototipo para este problema es especial debido a su historia singular: este fue donado por una estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora, pero le hacía falta la parte principal, el cuadrado que proporciona el área máxima inscrita en el disco de radio 9 cm, la cual una hermana pequeña de la estudiante había extraviado. Tiempo después, me di a la tarea de visitar varios carpinteros de la ciudad para que me cortaran de forma exacta la tablita faltante, pero no tuve éxito por el tipo de madera y torno necesarios. Sin embargo, finalmente al insistir llegué a un taller en el que me recibió un carpintero, quien al verme con el prototipo en la mano me dijo:

Carpintero: ¿Qué haces con esa tablita? ¡Yo se la hice a mi hija para una tarea!

Después de aclarar el motivo de mi visita, el señor elaboró con mucho esmero la pieza faltante del prototipo y de esta experiencia particular quedó una bonita enseñanza en muchos aspectos.

En la tabla en la que se torneo el disco de diámetro 18 cm, se acomodan tablitas rectangulares, cuyas diagonales miden el mismo diámetro del disco, con diferentes áreas. En este caso, la tablita con mayor área (162 cm^2) es cuadrada de lado $\sqrt{2} \cdot 9$ cm (Figura 4 *c*)).

Figura 4. c) Prototipo 4

Una aplicación real que tiene este problema es en el corte de vigas o barrotes en carpinterías o aserraderos, cuando estas se extraen de un tronco de madera de diámetro dado de tal forma que tenga sección transversal máxima o que es lo mismo, que se desperdicie el mínimo material posible. Se deja como ejercicio encontrar otras aplicaciones potenciales de este problema.

Generalización. En el caso de una elipse de semi-ejes *a* y *b,* la función área del rectángulo inscrito en esta es ligeramente diferente y el óptimo para el área es 2*ab*, el cual se alcanza para $x = a/\sqrt{2}$. El prototipo asociado (Figura 4 *d*)) se construyó utilizando resina transparente coloreada en café vertida en un recipiente rectangular en cuyo centro se colocó como molde una lata de sardinas comercial de semi-ejes *a* = 8 y *b* = 5.5 cm, respectivamente. Para estas medidas, el área máxima encerrada por el contorno elíptico de la lata es 88 cm^2.

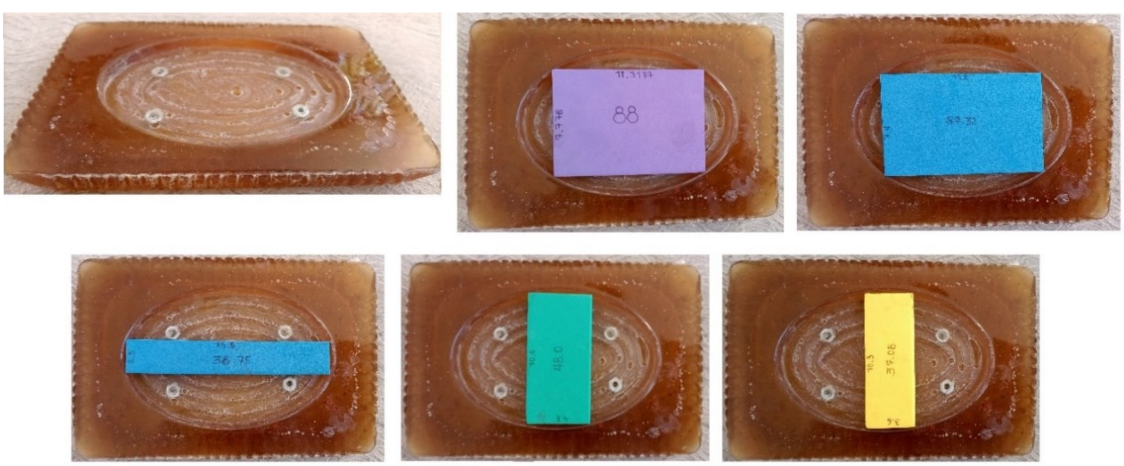


Figura 4 d). Área rectangular máxima inscrita en una elipse

Para el problema, en el caso de la elipse, la solución, las conclusiones y el prototipo fue presentado como proyecto final del curso Cálculo Diferencial e Integral I, Semestre 2020, por un equipo de tres estudiantes de la Licenciatura en Física Médica de la Universidad de Sonora, quienes propusieron tres posibles aplicaciones del mismo:

i) determinar el tamaño del tragaluz rectangular de cristal en el techo de un estadio de forma elíptica en construcción o remodelación que deje pasar la mayor cantidad de luz natural hacia el interior del estadio;

ii) estampar el logo o publicidad en forma rectangular más grande que se pueda en antenas parabólicas elípticas de la compañía que las comercializan;

iii) cortar el trozo rectangular de mayor tamaño de lasaña horneada de un único refractario de forma elíptica del que se dispone para presentarlo en un concurso.

En las conclusiones del trabajo entregado, las estudiantes comentaron lo siguiente:

Estudiante 1. El trabajo realizado resultó una actividad refrescante y satisfactoria que da sentido a lo aprendido tanto en el curso como en la prepa.

Estudiante 2. Fue muy divertida la elaboración del prototipo.

Estudiante 3. Aún a mi padre, quien observó y se involucró cuando elaboramos el prototipo, se emocionó y le pareció un trabajo muy interesante.

Estas declaraciones me parecen sumamente valiosas y motivadoras para seguir implementando la estrategia de los prototipos en los cursos elementales de cálculo, sobre todo implementarlo a nivel medio superior, con el objetivo de promover las licenciaturas de matemáticas y disipar el mito que las matemáticas son aburridas o complicadas.

<u>Problema 5.</u> Iluminación óptima de un área específica: Se pretende instalar una lámpara en un poste para iluminar cierta área circular disponible. El área de interés iluminada por la luz de la lámpara es anular con R el radio del círculo medio (considerar, por ejemplo, una pista para hacer ejercicio, una explanada en un parque público o un caminador mecánico entrenador de caballos). ¿Cuál debe ser la altura h del poste para que la luminosidad en el área considerada sea óptima?

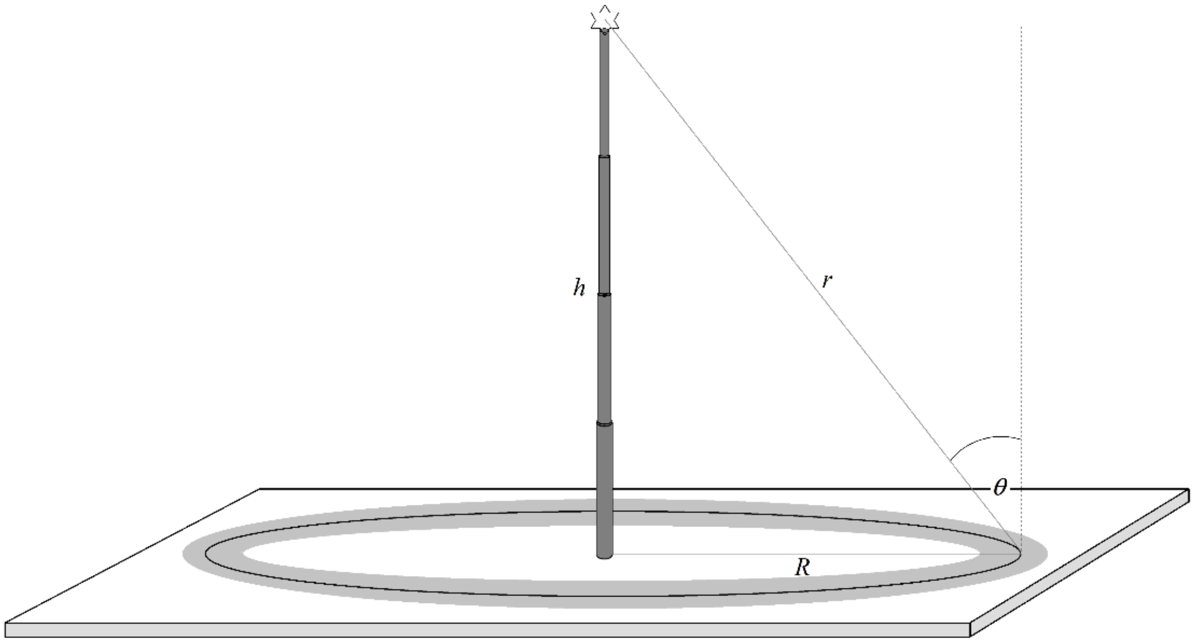


Figura 5 a). Iluminación óptima

Solución. De acuerdo al principio físico que rige a este proceso, *el nivel de iluminación I* (medido en lux = lumen/m^2) *es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la lámpara hasta la periferia del círculo medio y directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia del rayo de luz que se forma con la vertical*; de modo que, a menor ángulo, mayor iluminación y, a mayor distancia, menor iluminación, por lo que para cualquier altura *h* del poste

$$\mathrm{I} = \mathrm{k}\frac{\cos\theta}{\mathrm{r}^2}$$

donde *k* es una constante que depende de la lámpara que se instala.

Además, se tiene que $\mathrm{r}^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{h}^2$ y también $\mathrm{h} = \mathrm{r}\cos\theta$, lo cual implica

$$I = I(h) = \frac{kh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

cuyo dominio es $\mathrm{h} \in (0, \mathrm{H_T})$, ya que *I*(0)=0 (no hay iluminación) y si la lámpara está lo suficientemente alta, H_T (altura tope), su luz es muy tenue a nivel del piso.

Al derivar e igualar a cero la expresión para *I*(*h*), se obtiene $\mathrm{H}_{max} = \mathrm{R}/\sqrt{2}$, la cual es llamada *altura óptima para la lámpara*, ya que para $0 < \mathrm{h} < \mathrm{R}/\sqrt{2}$, $\mathrm{I}'(\mathrm{h}) > 0$, es decir *I*(*h*) es creciente, mientras que para $\mathrm{h} > \mathrm{R}/\sqrt{2}$, $\mathrm{I}'(\mathrm{h}) < 0$, esto es, *I*(*h*) decrece, lo cual confirma que la altura $\mathrm{R}/\sqrt{2}$ produce un valor máximo para la luminosidad. □

<u>Prototipo 5</u>. En específico, para el problema típico de optimización elegido, se modela y resuelve, se analizan y contrastan los resultados obtenidos de forma analítica respecto a la lectura registrada en un dispositivo electrónico adaptado a un prototipo sencillo diseñado y elaborado con materiales ordinarios (triplay, chilillos, una antena retráctil de un radio en desuso, un foquito LED, un par cables delgados y otros componentes electrónicos).

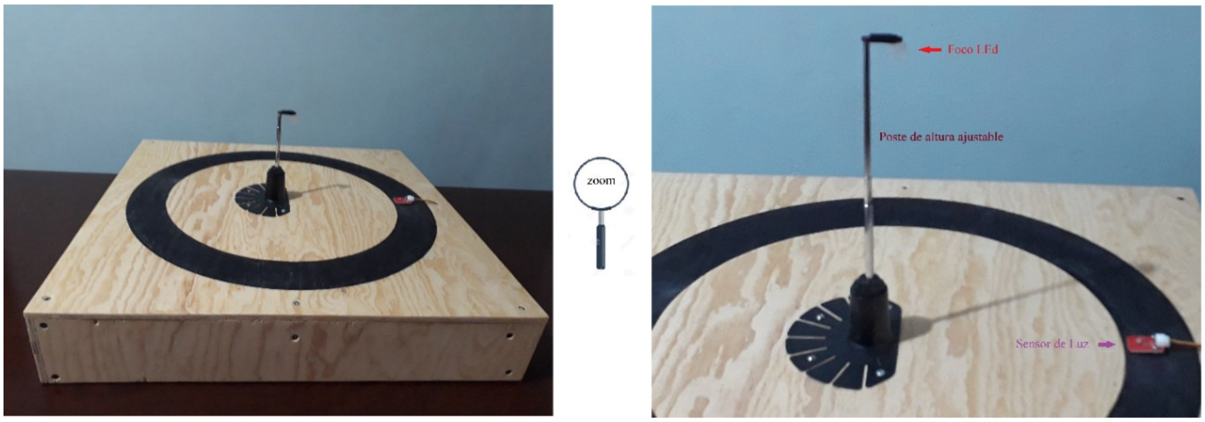


Figura 5 b). Prototipo especial

El prototipo consiste de una base de madera (Figura 5 *b*)) en la que se simula el área por iluminar y en la que se instala un pequeño foco LED montado en una antena desplegable para variar la altura, además un sensor de luz conectado a un dispositivo electrónico con un controlador Wi-Fi que mide en tiempo real la intensidad de luz y registra los datos en un smartphone por medio de una App Móvil llamada “i2t Smart” (tecnología Internet de las Cosas IOT, Figuras 5 *c*) y *d*)), con el objetivo de encontrar la altura óptima que proporciona la máxima iluminación sobre la pista, para cualquier modelo de iluminaria que se instale.

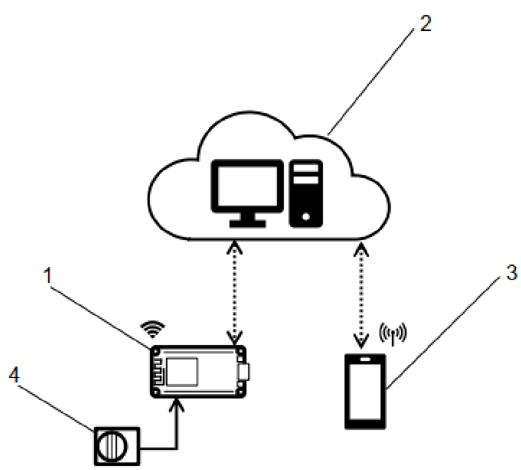


Figura 5 c). Componentes del dispositivo electrónico: 1. Controlador Wi-Fi, 2. Servidor IoT de Internet, 3. App. Móvil y 4. Sensor de luz

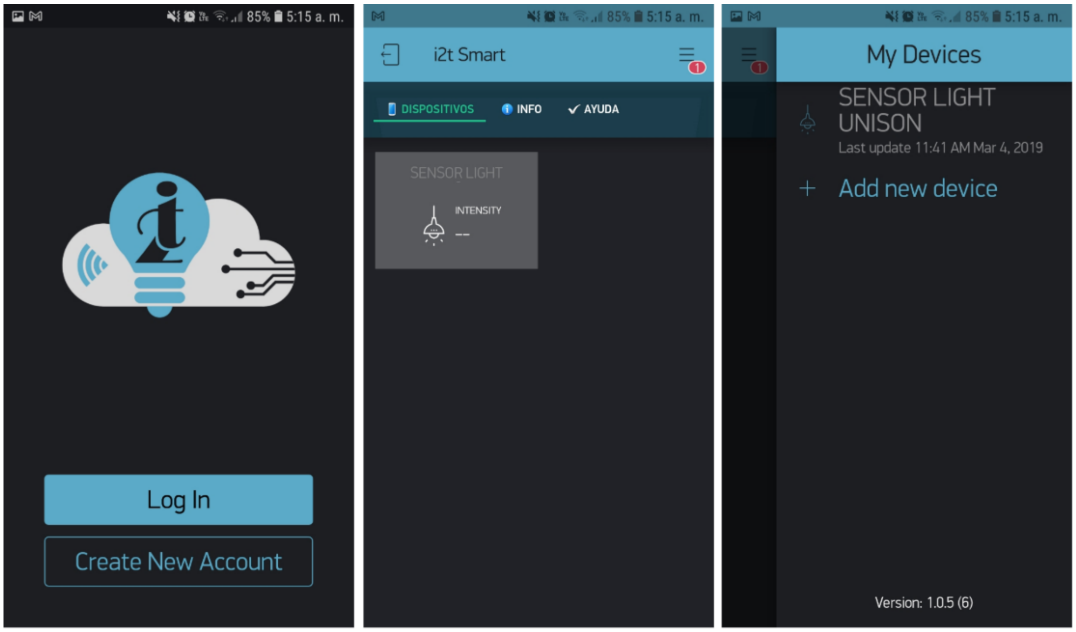


Figura 5 d). Componentes del dispositivo electrónico: 1. Controlador Wi-Fi, 2. Servidor IoT de Internet, 3. App. Móvil y 4. Sensor de luz

Aplicación. En principio, puede utilizarse como herramienta didáctica-pedagógica para el tema de optimización de funciones reales de variable real de los cursos básicos de Cálculo Diferencial. Además, el dispositivo puede utilizarse prácticamente en la instalación de lámparas de luz residenciales o industriales, en almacenes, bodegas, supermercados, tiendas departamentales, etc., con techos altos o incluso en la instalación y el reemplazo de luminarias de alumbrado público, muchas de las cuales siguen instalándose en postes de la misma altura, aun cuando el tipo de lámpara ha cambiado, por lo que es necesario estimar la altura para cada tipo de lámpara, ya que cada tipo de lámpara tiene su propia constante de iluminación, lo cual permitirá optimizar eficiencia, materiales, consumo de energía, entre otros aspectos. Un aspecto importante es que el dispositivo también permite obtener la constante de iluminación correspondiente a la lámpara utilizada.

Problema 6. El problema del taco: Se desea servir un taco (de carne asada y otros ingredientes, por ejemplo) en una tortilla de diámetro D, cuya forma parezca enrollarse en un cilindro circular y esta quede completamente llena. El problema es determinar el radio del cilindro que maximice el volumen del taco formado.

Solución. Al enrollarse la tortilla sobre un cilindro de radio r, la longitud de la sección transversal del taco, l_T, varía respecto a la distancia x medida desde la mitad (donde tal longitud es igual al diámetro de la tortilla, Figura *a*)), esto es, $l_T(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]$, con R el radio de la tortilla.

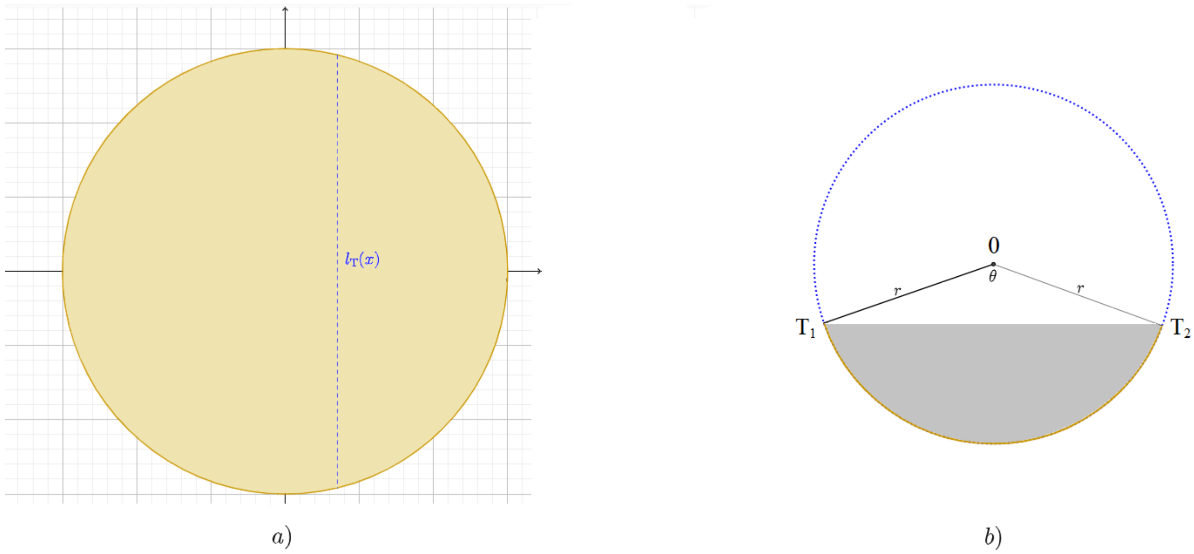


Figura 6. Sección transversal del taco

El área de la sección transversal del taco es el área del sector circular de radio *r* (radio del cilindro que da forma al taco, Figura 6 *b*)), menos (o más, según sea el valor de θ) el área del triángulo $T_1 0 T_2$, la cual se obtiene al aplicar la fórmula para calcular el área de un triángulo a partir de dos lados y el ángulo que subtienden. Esto es,

$$A_T(\theta) = \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \theta$$

Pero, el ángulo θ está relacionado con el radio *r* mediante la longitud de arco, $s = r\theta$, donde, en este caso, $s = l_T(x)$, por lo que $\theta = l_T(x)/r$ y, entonces

$$A_T(x) = r\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{r}\right)$$

Así, el volumen del taco está dado por

$$V = \int_0^R \left[2r\sqrt{R^2 - x^2} - r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{r}\right)\right] dx$$

La integral *V* no puede evaluarse de forma exacta por ningún método analítico elemental conocido del Cálculo. Sin embargo, es posible aplicar integración numérica, la cual en nuestro caso se ejecutó con Geogebra. El volumen máximo que se obtiene, $V_{\max}$, aproximadamente es igual a $227.1532383388\ cm^3$, el cual se alcanza cuando $r \approx 3.7231$ cm.

<u>Prototipo 6</u>. El prototipo correspondiente al problema del taco consiste de un pedazo de fomi circular (material flexible color verde, mostrado en la Figura 6 *c*)) para representar de forma sintética a una tortilla de maíz estándar de 13 cm de diámetro (¡el número 13 es mi favorito!),la cual se enrolla en tubos PVC de diferentes tamaños (1, 2, 3 y 4 pulgadas, respectivamente, utilizados típicamente en trabajos de plomería).

Figura 6 c). Prototipo del taco

El volumen que corresponde al tamaño óptimo, que en nuestro caso se rellenó con plastilina moldeable (con la que les encanta jugar a la mayoría de los niños en edad preescolar), ninguno de los otros tubos, en la forma implicada por la tortilla, lo pueden contener en su totalidad, lo cual, de nuevo es una verificación experimental o física de una respuesta que es complicada de obtener de forma exacta.

4. Conclusiones

Ciertamente, la etapa inicial fue una experiencia emocionante, motivadora y enriquecedora, tanto por la novedad como por contar con la participación activa de muchos estudiantes, quienes con entusiasmo y dedicación se involucraron y crearon varios prototipos interesantes. Por otra parte, para la segunda etapa se presentó la magnífica oportunidad de interactuar con otros colaboradores debido al carácter multidisciplinario del proyecto de docencia desarrollado, tal como ocurrió en el caso del prototipo 5. La expectativa para la siguiente etapa es contar con la participación de más colaboradores que se sumen y se enamoren de esta entretenida actividad que tiene como objetivo aprender y enseñar las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral de una forma diferente.

Es importante comentar que en los más de treinta años que tengo como docente, no he encontrado mejor forma de abordar los problemas de optimización del Cálculo Diferencial y, al mismo tiempo, enfatizar la importancia e implicaciones del Teorema del Valor Medio en todas sus versiones. El objetivo es que en el proceso y desarrollo futuro se sumen otras áreas y personas interesadas que prosperen y multipliquen las ideas y productos potenciales de esta fascinante área de la Matemática y suavizar, en la medida de lo posible, los índices de deserción y reprobación de las asignaturas iniciales de Cálculo.

REFERENCIAS

Figueroa-Rivera A. (2012). *Cálculo Diferencial*. México: Grupo Editorial PATRIA.

Flores-Espinoza R., Valencia-Arvizu M. A., García-Alvarado M. G. (2014*). Fundamentos del CÁLCULO*. México: Editorial PEARSON.

Larson R., Edward B. (2016). *CÁLCULO, Tomo I*. México, CENGAGE Learning.

Stewart J. (1999). *CÁLCULO Diferencial e Integral*. México: THOMPSON Editores.

Zill D.G, Wright W.S. (2011). *Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas*. México: McGraw-Hill.