Aproximación a la resolución de problemas mediante un proceso heurístico o una simulación

El Cálculo y su Enseñanza
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Miguel Delgado Pineda
Universidad Nacional de Educación a Distancia
España
miguel@mat.uned.es

Recibido: *4* de abril de 2023
Aceptado: *15* de junio de 2023

Autor de Correspondencia:
Miguel Delgado Pineda

Resumen. La Matemática e reconocida como un conocimiento cuyo aprendizaje requiere resolver problemas, pero el conocimiento matemático no sólo se produce vía inductiva y deductiva. Resolver un problema, requiere tener la certeza de que es resoluble, de ahí, que se tengan tantos resultados que sólo aseguran la existencia. No tener asegurada la existencia puede hacer que un problema sea un sueño imposible. Un acercamiento no inductivo-deductivo puede facilitar la predisposición personal sobre la búsqueda de solución de un problema. En este trabajo se tratan cuatro ejemplos relativos a distintos niveles educativos que son abordados experimentalmente siguiendo tres vías propuestas: La vía heurística, la vía simulada y la vía erudita. Dos problemas fueron objeto de estudio con dos muestras de profesores en activo y de estudiantes universitarios. La experiencia indica que es factible concatenar alguna de las dos primeras vías con la vía erudita para generar conocimiento matemático de una forma natural.

Palabras clave: Problema de Matemática, Resolución de problemas, Heurística matemática, Simulación matemática, Matemática experimental, Ángulo corneado.

Abstract. Mathematics is recognized as a knowledge whose learning requires solving problems, but mathematical knowledge is not only produced inductively and deductively. Solving a problem requires the certainty that it is solvable, hence, there are so many results that only ensure the existence. Not being assured of existence can make a problem an impossible dream. A non-inductive-deductive approach can facilitate personal predisposition on the search for the solution of a problem. This paper deals with four examples related to different educational levels that are experimentally approached following three proposed ways: the heuristic way, the simulated way and the scholarly way. Two problems were studied with two samples of working teachers and university students. Experience indicates that it is feasible to concatenate one of the first two paths with the scholarly path to generate mathematical knowledge in a natural way.

Keyword: Mathematics problem. Problem resolution. Heuristics in Mathematics, Simulation in Mathematics, Experimental mathematics. Gored angle

1. Introducción

En este trabajo se proponen dos alternativas al desarrollo usual de afrontar la resolución de un problema de matemáticas por parte de los estudiantes, al menos en un primer momento de su atención. Proponeos dos tipos de acercamiento: uno de carácter heurístico y otro de modo simulado. Entendemos que el utilizar alguno de estos dos acercamientos en el proceso inicial de análisis y estudio de un problema puede aportar cierta confianza al estudiante para intentar exponer una resolución tradicional posterior. Es decir, proponemos una vía heurística y otra vía simulada para todo problema que el estudiante no es capaz de catalogar como aplicación directa de la teoría estudiada. Con estas vías proponemos un acercamiento al problema y a su resolución, haciendo uso de algunos registros de representación semiótica: el registro metafórico y el registro analógico de Delgado (2016) y los cincos registros de representación de Duval (1999). Estas vías no son formas homologables a una resolución tradicional; ahora bien, son vías que permiten saber si un problema matemático tiene solución, o no, y si esa solución es única, o no. Saber esto es muy importante para perseverar en el intento de resolución homologable.

Muy probablemente, la característica de las Matemáticas más reconocible por el gran público, o la que mejor recuerda, es que en Matemáticas se tienen que resolver problemas. Ahora bien, no suele haber una idea uniforme de lo que son problemas de matemáticas en ese gran público. En general se hace alusión a la resolución de ecuaciones como el objeto matemático más recordado.

Quizás, somos los profesores universitarios de Matemáticas quienes mejor nos damos cuenta de la dificultad de establecer una definición holística de las Matemáticas, pues reconocemos sus distintas áreas, sus diversos sistemas de razonamiento y los distintos métodos de resolución de problemas. Que no es fácil definir de una forma precisa la Matemática lo reconoce cualquier profesor de Matemáticas, con independencia del nivel docente en el que se encuentre. El profesor es consciente de cada una de las facetas que tiene la materia matemática en su nivel educativo y también es consciente de que esa dificultad para definirla se incrementa al cambiar de nivel académico. Ahora bien, a nosotros nos interesa tratar con la resolución de problemas en Matemática, por ello, debemos iniciarnos de alguna definición plausible. Empleamos la forma en la cual la define el diccionario de la Real Academia Española y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. Dícese de la palabra ***Matemática***: “Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones” (RAE, 2023a). En ese mismo diccionario se reconoce la interpretación: “Perteneciente o relativo a las matemáticas” (*ibid.*) y se considera que esta palabra admite la interpretación de adjetivo como sinónimo de “Exacto” y “Preciso” (RAE, 2023a).

También, este diccionario reconoce la expresión ***Matemática aplicada*** como “una rama de la Matemática que se ocupa de la aplicación de esta a la resolución de problemas de otras disciplinas, como la física, la biología o la economía” (RAE, 2023b). Hoy en día, deberían incorporarse muchas otras disciplinas como las ciencias sociales y los estudios técnicos y los tecnológicos. Si somos observadores vemos que en esta última definición aparece la expresión *resolución de problemas*.

Quizás si el lector es profesor de Matemáticas, no esté conforme con esos contenidos del diccionario. Sin embargo, eso es a lo que cualquiera puede aludir cuando se le interpela por la Matemática. Muchos profesores, incluso investigadores de Matemática Educativa, tienden a confundir la parte con el todo, la parte de matemáticas que enseñan o investigan, generalmente muy algebraica, con el global de las áreas matemáticas. Esto es muy patente en la mayoría de los artículos publicados acerca de conceptos de Cálculo Matemático como el número real, el límite de una función, la derivada,…

¿Qué suele destacar un profesor de la Matemática a sus estudiantes? Para contestar a esta pregunta me remito a los 45 años de experiencia docente en la formación de profesores. Esta experiencia que es mucho más precisa que una simple encuesta puntual, puesto que recorre una amplio periodo de tiempo y se corresponde con una muestra acumulada, o estratificada, enorme. Intentando unificar una respuesta plausible, destaco que los profesores, incluso siendo unos eruditos matemáticos, pretendemos dar una imagen a nuestros estudiantes de que cualquier teoría matemática es un espacio pentagonal regular en cuyos vértices situamos los Conceptos, los Métodos, la Sintaxis, la Semántica y las Matemáticas, de forma que cualquier problema de esa teoría está en un punto de ese conjunto convexo que queda determinado por algún "tipo de distancia" de ese punto a cada vértice, que algunos consideran dimensiones o facetas del problema, ver figura 1.

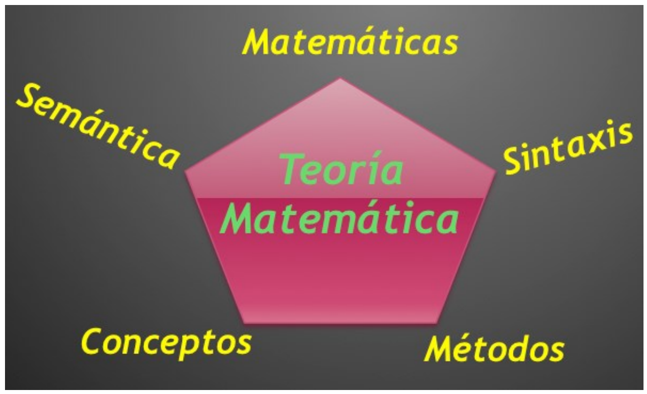


Figura 1. Imagen convexa de una teoría matemática. Elaboración propia.

Con este tipo de visión de una teoría matemática, resulta que el estudiante tiende a creer que todo lo que se le proponga en esa teoría es factible de entender y reproducir. Es decir, que de todo problema que se le proponga, podrá decidir si es cierto o es falso. En general, al aplicar los métodos usualmente más utilizados como son la Deducción y la Inducción. En cierta manera supone que todo problema propuesto por el profesor es decidible, cuestión que no se cumple ni siquiera en la Aritmética. Un ejemplo que podemos creer cierto es el siguiente: Supuesto que cada uno de los objetos del universo, observable o no, está compuesto por un número finito de átomos y supuesto que somos capaces de extraer un átomo de cada objeto, nos preguntamos si podríamos formar un objeto con todos esos átomos extraídos. Sin duda, al considerar al universo como un conjunto de objetos la dificultad pesa sobre si ese conjunto universo es finito o no.

También suele ocurrir que el estudiante cree que un problema no puede estar sobre- saturado de información. Es decir, cree que le ofrecen la información precisa para que lo resuelva de alguna forma. Proponemos un ejemplo como muestra que se puede experimentar con facilidad: Solicitar la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, y en lugar de dar una terna pitagórica para los tres lados, se presenta otra terna muy parecida que no es pitagórica. El estudiante debería analizar los datos y responder que la solución del problema es que "no tiene solución". Esto es así debido a que con ese enunciado no se cumple el requisito fundamental del teorema de Pitágoras que es el triángulo rectángulo. El lector no debería sorprenderse si un estudiante de Enseñanza Secundaria o de Bachillerato le comunica unas medidas angulares. Aquí debemos aclarar que algunos autores como Larios (2000) establecen una diferencia entre un problema y un ejercicio, dándole un carácter al ejercicio de *situación que se resuelve a través de procedimientos rutinarios que conducen a la respuesta*. En este momento tendremos que decidir si el problema anterior es un problema o un ejercicio. La verdad es que no entendemos si un ejercicio de un texto remarcado fuera del contexto de un tema concreto se transforma en problema o sigue siendo ejercicio para el estudiante. Además, el calificativo de rutinario pudiera ser para el profesor pero no, necesariamente, para el estudiante. Como ejemplo podría indicarse la determinación del número de ceros de una función real de variable real en un determinado intervalo.

Se podría entender que todo aquello que no sea aplicar las leyes lógicas y la inducción pudiera, desde un primer instante, quedar al margen de las Matemáticas para un estudiante. Así pues, surge una cuestión de interés educativo: ¿Cómo puede llegar un estudiante a sospechar que un problema, o su negación, tiene una solución? Otra cosa es si éste es capaz de establecer una resolución deductiva. Por ejemplo, si a un estudiante se le solicita que aprenda un límite de una función en un punto, casi siempre entenderá que ese límite existe, cuando pudiera ser que no existiera como en el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto 0. ¿Quién puede afirmar que si un estudiante no expone una resolución deductiva es por falta de conocimiento? Nosotros no podemos afirmarlo, puesto que en algunos casos confundimos la falta de maña del estudiante con la falta de conocimiento. Un ejemplo donde esto se suele apreciar es cuando a un estudiante se le solicita una acotación de alguna expresión numérica o algebraica; por ejemplo esos famosos épsilon que hay que asegurar eligiendo un delta adecuado que muchas veces es una fracción de ese épsilon.

Sin querer generalizar, recomendamos mirar los problemas o los ejercicios de los cuestionarios referenciados en muchos artículos de la literatura educativa para confirmar que todos esos problemas poseen solución. La encuentren, o no, los estudiantes encuestados. Así pues, un estudiante no reconocerá como problema una cuestión que no sea una aplicación directa de los resultados teóricos que estudia; lo que Larios (2000) denomina ejercicio. De Guzmán (2007) indica como "verdaderos problemas" a lo que Larios (2000) denomina problemas.

2. El primer paradigma: Vías heurística y simbólica a una página oculta

Un ejemplo de problema no reconocible como problema por el estudiante es el siguiente: Utiliza el libro *El Principito* para decirme la primera palabra de la hoja cuyo valor es el triple de la suma de sus dígitos.

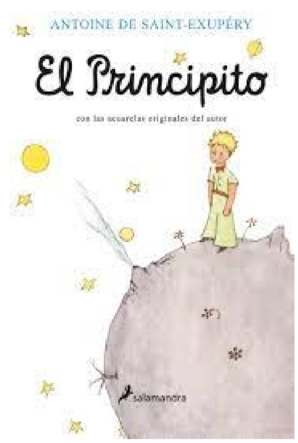


Figura 2. Portada del Libro donde buscar la página indicada.

Hemos elegido este primer problema porque se le puede plantear a cualquiera persona y puede ser resuelto por un estudiante de Enseñanza Primaria, de Enseñanza Secundaria, de Bachillerato y de Enseñanza Universitaria. La gracia de este problema es su enunciado, donde no se facilita ningún dato numérico y que atañe a conocimientos básicos de aritmética entera.

Desde luego, la expresión Problema tiene diferentes significados para las distintas teorías didácticas. Polya (1962) describía a un problema como una situación que requiere buscar conscientemente alguna acción adecuada para lograr un objetivo claro en su concepción y que no se alcanzara inmediatamente.

Algunas teorías sustituyen la expresión Problema por alguna otra expresión contenida y básica en los fundamentos de esa teoría. Charnay (1994) declara que un problema, para un estudiante, puede ser observado como una terna de componentes: situación, alumno y entorno. Además, añade que el problema existe sólo si un estudiante percibe su dificultad. Así pues, parece indicar que los problemas son inherentes al aula. Por otra parte, Schoenfeld (1985) indica que un problema es una relación binaria entre un individuo y una tarea. Precisamente por esto indica que la dificultad de definir el término problema no está absolutamente relacionada con la Matemática.

La muestra de interpretaciones nos indica que la palabra problema puede significar muchas cosas distintas y con más de una característica dentro de una lista. Sin embargo, en este artículo utilizamos una interpretación general, y accesible a cualquier persona, la que está recogida en el diccionario de la RAE, pues dudo que un estudiante de Enseñanza Secundaria o Enseñanza Universitaria tenga otra concepción distinta de lo que es un problema.

Dice la RAE de ***Problema***: "Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos." Aunque también añade la acepción: "Cuestión que se trata de aclarar". (RAE, 2023c).

Que hay problemas y ejercicios en la Matemática es una cuestión fundamental en el aprendizaje de los estudiantes. Pero la existencia de estudiantes que llegan a creer que resolver un problema dentro de una teoría es una cuestión de práctica algorítmica y combinatoria de resultados conocidos (teoremas y proposiciones), nos hace pensar que esto no es espontáneo en ellos y que es consecuencia del proceso de enseñanza-aprendizaje elegido por la secuencia de profesores que haya tenido. Además, esto muestra que esa elección no es totalmente adecuada o hay algo que no estamos haciendo bien.

Una visión totalmente idealizada de la demostración rigurosa de los resultados impiden ver que muchos problemas son formalizados después de tener alguna idea muy imaginativa que denominamos *idea feliz*. ¿Cómo se pueden tener ideas felices de una forma natural? La generación de tales ideas no suelen ser espontáneas ni en el estudiante ni en le profesor, por ello, hay que buscar por otras vías como la heurística y la simulación mucho antes que intentar la resolución inductiva-deductiva. La resolución matemática debe quedar como un producto final de un largo proceso.

El diccionario de la RAE describe **Heurística** como "Técnica de la indagación y del descubrimiento", aunque también recoge "Búsqueda o investigación de documentos o fuentes históricas." Además, indica que en algunas ciencias la heurística se entiende como "Manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc." (RAE, 2023d). Esta última será la definición que emplearemos en este trabajo.

Como bien se puede entender la forma de buscar una solución a un problema no es necesariamente resolver un problema en Matemáticas. Polya (1997) interpretaba que la heurística que pudiera emplear un estudiante se centraba en encontrar y buscar soluciones y disfrutar de la experiencia como actividad. Además, interpretaba que la heurística requiere que se produzca una búsqueda creativa, en cierta medida basada en la experiencia y fruto de una investigación racional puntual.

Hay muchos autores que hacen referencia a estrategias heurísticas a nivel educativo en relación con diversas formas de intentar buscar una supuesta solución particular, o una aproximación parcial a una solución. En general, son denominadas estrategias heurísticas si se aplica una regla que bien pudieran no ser usada como directriz de búsqueda general pero que tiene un uso específico.

Se está utilizando una estrategia heurística si se restringe convenientemente el conjunto de datos de un problema para que al estudiante se le facilite la búsqueda de soluciones. También, se considera heurístico si se elige un camino más o menos aleatorio al buscar una solución numéricamente. Es decir, utilizar la técnica de ensayar una situación y comprobar si se produce error o no. Por ejemplo, en Tejada (2017) se asume el tanteo y error como técnica heurística en educación.

En general, se suele catalogar de heurística una estrategia, a un método, a un criterio o algún truco usado para hacer más sencilla la solución de problemas difíciles. Si bien el término heurístico lo uso por primera vez Einstein en un artículo sobre la luz, fue Polya quien lo hizo popular al indicar (Polya, 1965) que el fundamento de la heurística es estar acostumbrado a resolver problemas y observar cómo otros resuelven problemas. Además, da una lista de reglas de utilidad ante la dificultad de afrontar la resolución de un problema. Hoy en día se habla del conocimiento heurístico como un tipo especial de conocimiento usado por los humanos para resolver problemas complejos (Wikipedia, 2023).

Para hacer frente heurístico a nuestro paradigma empleamos la simple búsqueda en bruto, pero con medios tecnológicos. Definimos una pila de objetos de GeoGebra de manera que las páginas de un libro quedan marcadas por tres deslizadores, uno para las unidades, U_1, otro para las decenas, D_{10}, y otro para las centenas, C_{100}. Cada uno de estos deslizadores sólo toma los valores enteros desde el 0 al 9 de forma que se construyen los números $100C_{100} + 10D_{10} + U_1$ y $3(U_1 + D_{10} + C_{100})$ al manipular los deslizadores. Ahora la búsqueda heurística es muy simple, puesto que sólo se requiere manipular sistemáticamente las posiciones de los deslizadores de manera que esos dos números coincidan.

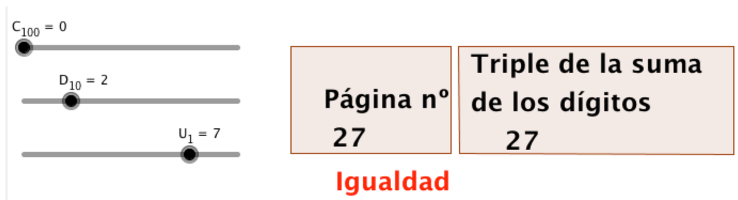


Figura 3. Aplicación heurística con GeoGebra para el primer paradigma.

Es claro que en esta actuación se ha utilizado un registro de representación metafórico, puesto que un número es sustituido por los valores que tienen tres deslizadores independientes. A su vez, cada deslizador es un registro de representación analógico dado que el valor de cada unidad se entiende como la posición de un punto del segmento que define el deslizador.

Esta es una de las posibles vías heurísticas que el profesor puede presentar para afrontar el problema y para que el estudiante tenga la certeza de que la solución existe. Así pues, al estudiante le queda emplear el método matemático de resolución del problema.

Otra forma de llegar a la certeza de que el problema posee solución es empleando la vía de la simulación. El diccionario de la RAE describe **Simulación** como "acción de simular" y **Simular** como "representar algo, fingiendo o imitando lo que no es".

Para este paradigma emplearemos otra aplicación en GeoGebra y haremos referencia a los registros de representación simbólico, algebraico y gráfico. El simbólico se reconoce al emplear como número de una página una variable real x que está definida en el intervalo $[1,99]$, aunque también aparece el registro analógico al hacer la trasposición de una incógnita entera por una variable real. El registro algebraico se reconoce en las expresiones de las unidades $[x] - 10\left[\frac{[x]}{10}\right]$ y de las decenas $\left[\frac{[x]}{10}\right]$, donde $[x]$ representa la parte entera del número real x.

El registro gráfico es notorio al representar las gráficas de la función $f(x) = x$ y la función $g(x) = 3\left([x] - 9\left[\frac{[x]}{10}\right]\right)$.

Con esos elementos definidos, se realiza la búsqueda de algún punto en común de esas dos gráficas, puesto que un posible punto común implica encontrar una solución al problema. Dada la naturaleza de función g discontinua en los valores enteros, hacemos uso de un deslizador que toma valores enteros desde 1 al 99 y que hace mostrar un punto rojo y comprobar que se trata de un punto común. En la figura 4 parecen existir dos puntos en común, pero el uso del deslizador muestra que sólo hay uno.

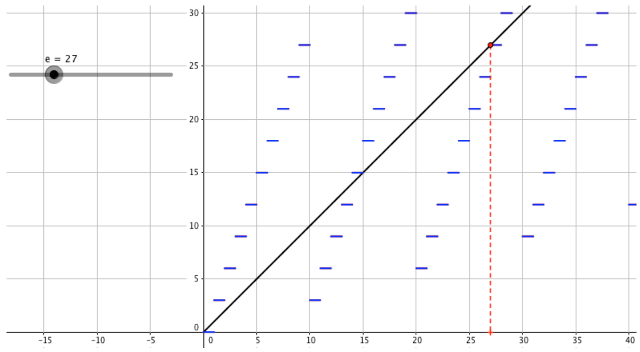


Figura 4. Determinación gráfica de solución al primer paradigma.

Esta vía simulada otorga al estudiante la certeza de que la solución existe y sólo le queda describir la resolución mediante el método tradicional. Ahora bien, esta simulación está pensada más para que el profesor se la muestre a sus estudiantes, puesto que de inicio un estudiante no usará funciones definida a trozos como la función $g(x)$.

Aquí destacamos que el paso inicial para resolver un problema es tener la convicción de que ese problema tiene solución. También destacamos que tener cierta creencia de que existirá solución a un problema no es nada fácil, al menos para el profesor. En el caso del estudiante es distinto, puesto que entiende que en el contrato didáctico del profesor y el estudiante figura la seguridad de que el profesor propondrá problemas que poseen solución y podrá resolver.

Dos preguntas emergen sobre la heurística y sobre la simulación. La primera es: ¿Conoce el estudiante el uso sistemático de estas vías? La respuesta es negativa si el profesor no las emplea en el aula. La segunda: ¿Tiene el estudiante capacidad para afrontar por si sólo este tipo de acercamiento? Al estudiante se le presupone la capacidad de aprender, por lo tanto puede aprender este tipo de acercamientos. Además, esa capacidad será reconocida si el profesor fomenta el uso de esas vías, al ser estos acercamientos muy estéticos empleando tecnologías informáticas. Estas vías serán aprendidas de la misma forma y al mismo tiempo que se aprenden los contenidos matemáticos. Con la utilización de estos métodos le mostramos al estudiante que la Matemática tiene una componente experimental aunque se tenga que hacer una comunicación formal.

3. Vía erudita del primer paradigma y experimentación con profesores.

Si bien el libro elegido para este problema tiene menos de 100 páginas, entendemos que el problema debe ser resuelto para libros con menos de 1000 páginas, pues con más de ese número de páginas hay pocos libros de acceso general. Este mismo problema con otro libro se lo propusimos a una muestra de 16 profesores de Enseñanza Secundaria que fueros estudiantes de mis dos cursos de Formación Permanente del Profesorado; cursos de actualización continua del profesor de Matemáticas. El objetivo que nos propusimos es ver cómo se desenvolvían esos profesores de la muestra, pues son la punta de lanza antes de que estas vías sean adoptadas por sus estudiantes. Se les presentó el problema como primer reto, el cual debían contestar, y nosotros esperábamos la respuesta correcta desde el punto de vista matemático siguiendo un método algebraico.

La vía matemática para resolver este problema deberá seguir los pasos del método deductivo de la Escuela de Atenas, para ello, se hace hincapié en el significado de la escritura posicional decimal de un número natural.

Consideradas las unidades U, las decenas D y las centenas C, entonces se cumple la igualdad $100C + 10D + U = 3(U + D + C)$ con la restricción $U + D + C < 28$ puesto que $U, D, C \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Así pues, resolver el problema consiste en resolver el sistema diofántico formado por una ecuación y una inecuación de tres variables $\begin{cases} 100C + 10D + U = 3(U + D + C) \\ U + D + C < 28 \end{cases}$.

También puede verse como una ecuación lineal con una restricción. Precisamente esa restricción impone que el número de centenas sea 0, con lo cual queda la ecuación $7D = 2U$. Como $\text{mcd}\{2,7\} = 1$, entonces la única solución posible es $\begin{cases} U = 7 \\ D = 2 \\ C = 0 \end{cases}$.

En la experimentación resultó que todos los profesores dieron la solución correcta, 27, aunque se restringieron a libros de menos de 100 páginas. Doce profesores escribieron una única ecuación con tres incógnitas: $10D + U = 3(U + D)$. De esta ecuación obtuvieron la ecuación $7D = 2U$, que fue resuelta de forma heurística; es decir, por prueba y error. Esto fue así, puesto que nadie hizo referencia a que $\text{mcd}\{2,7\} = 1$ y la divisibilidad entera. Los cuatro restantes no expusieron el método de resolución.

Una vez que contestaron 27, se les preguntó la existencia de otras páginas que cumplan una misma propiedad. Cuatro profesores creían que había otras páginas que cumplían esa propiedad en libros de 1000 páginas, o más.

Antes de darles la resolución formal del problema, les propusieron nuevos retos cuando se generalizó la propiedad de ser igual a $3(U + D + C)$ y se cambió por $4(U + D + C)$, por $5(U + D + C)$,… hasta $9(U + D + C)$. Nuevamente todos dieron la solución correcta intentando seguir el método que habían utilizado anteriormente.

Queda patente que este problema de Matemáticas Recreativas puede ser abordado desde diversas perspectivas, incluso la formal, otra cosa es que la resolución sea más o menos rigurosa. Destacamos que se asumió ese enunciado sin datos como problema a resolver y que los profesores no tuvieron reparo alguno en entender lo que significaba resolver ese problema. Nos sorprendió que a la vista de la solución erudita, los profesores no situaran al problema en alguna parte del curriculum académico que desarrollaban con sus estudiantes en clase. La razón era simple, se trataba de un sistema formado por una ecuación y una inecuación y ese tipo de sistemas no se trataban en Secundaria. Sin duda, algo hicimos mal en la experimentación, pues no los convencimos.

En este trabajo hemos asumido la definición del diccionario de la RAE sobre la palabra Problema: "Cuestión que se trata de aclarar" y asumimos la Resolución de Problemas como la acepción de Problema del diccionario: "Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos".

Algo tradicionalmente reconocido como el concepto de Problema, que se plantea de alguna forma como una pregunta que bien puede ser descrita mediante un posible enunciado, no es reconocido tan fácilmente en algunas teorías didácticas, puesto que la forma de presentar el problema parece ser esencial, cuando básicamente un problema es una pregunta que puede formular cualquiera y que éste no sabe la respuesta de antemano.

Si la idea de problema puede ser más o menos genérica, resulta que en Gascón (1994) se escribe sobre la notable ambigüedad en la terminología "resolución de problemas". Este autor indica que existe una convicción ampliamente compartida por la comunidad matemática de que la resolución de problemas juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas, pero resalta que el término resolver un problema de matemáticas depende esencialmente del modelo epistemológico de los términos: problema, enseñar y aprender. De Guzmán (2007) indica que con la resolución de problemas se intenta transmitir aquellos pensamientos de utilidad en la resolución de éstos, y esto se hace de forma sistemática.

En ese trabajo se recogen distintas interpretaciones de la cuestión, que el autor denomina perspectivas de la resolución de problemas. En este caso, simplemente hemos entendido que resolver un problema es dar una respuesta adecuada al reto planteado mediante un enunciado más o menos preciso. Además, aceptamos la idea ampliamente reconocida por todos los profesores: "hay que resolver problemas en Matemáticas", y es por ello, que todo aquel que estudió hace tiempo matemáticas, recuerda los problemas que contaba su profesor de Matemáticas, al menos algún enunciado.

4. El segundo paradigma: El movimiento por el perímetro de un cuadrado

Si bien el primer problema se trató con un grupo de profesores con el objetivo de que se concienciaran de las dos vías remarcadas y la importancia que pudieran tener en su labor profesional, no podíamos dejar pasar de actuar según esas vías con los estudiantes. Por ello, consideramos que un segundo problema pueda ser iniciado mediante estas vías con estudiantes directamente.

La elección de este ejemplo está motivada, por un lado, por tratar dos conceptos tan importantes en Matemáticas como son el de variable real y el de función real de una variable real. Por otro, por un ser problema que puede ser resuelto desde la Enseñanza Primaria hasta Enseñanza Universitaria sin muchas consideraciones. Además, el enunciado no aporta dato numérico alguno como en el caso anterior. El enunciado es: Determina la distancia a la que está una hormiga que avanza por un cuadrado, de un determinado vértice, en función de lo recorrido por la hormiga, ver figura 5.

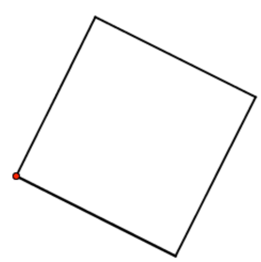


Figura 5. Recorrido posible en el segundo paradigma.

Es evidente que se entiende que la hormiga sólo puede moverse por el perímetro del cuadrado. En esta situación, remarcamos que la hormiga puede disponer de tiempo que precise para moverse o puede estar parada, puesto que no es el tiempo la variable independiente que utilizamos. Lo único que no puede hacer la hormiga es retroceder. Una cuestión que pudiera ser elemental, pero que el estudiante no tiene claro desde el inicio, es que el sentido del recorrido no modifica la expresión de la función distancia al vértice. Esto es un primer resultado heurístico obtenido al realizar una secuencia de medidas de la distancia en uno y en otro sentido.

Al ver el cuadrado de la figura 5 pudiera pensarse que el estudiante de Enseñanza Primaria pudiera tener dificultades para afrontar este problema, pero esto no es así puesto que el resultado de mayor nivel que se requiere es el teorema de Pitágoras. El principal escollo que encuentra un estudiante de

Enseñanza Secundaria con esa figura es que cree que debe utilizar la expresión que determina la distancia entre dos puntos del plano, pues la figura es plana y se solicita la distancia entre dos puntos.

En muchas ocasiones disponer de un dibujo, o boceto, permite al estudiante ejemplificar una situación concreta, esta es una de las reglas de Polya. Un profesor debe forzar la situación para que el estudiante dibuje un cuadrado de lados no paralelos a los márgenes del folio donde dibuja, puesto que suele dibujar un cuadrado de lados paralelos a los márgenes, sobre todo si es de papel cuadriculado. En esencia, da lo mismo como lo dibuje, pues en este problema sólo interviene el cuadrado y un vértice de éste y lo que mide la distancia recorrida por la hormiga. Una lista de objetos declarados en GeoGebra permitirá simular la resolución del problema cuando se asigna una medida al lado.

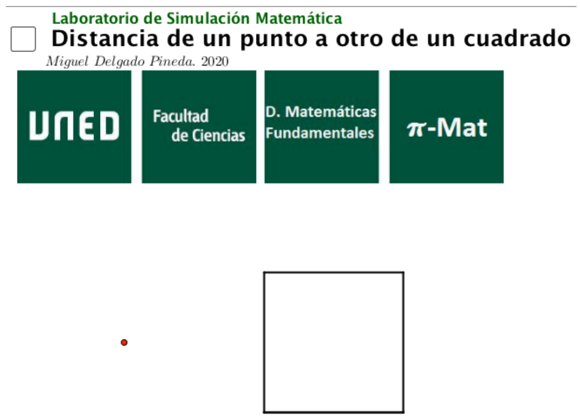


Figura 6. Imagen inicial de la simulación GeoGebra.

Al interactuar con la aplicación para elegir el vértice, la longitud del lado, 2, y modificar la posición de la hormiga mediante un deslizador que toma valores entre 0 y 1 con un salto de 0.01, se pueden obtener dos aproximaciones a los registros gráfico y tabular de la función solicitada, según la hormiga avance por cada uno de los lados. El recorrido se presenta en color verde y la distancia en color azul. El vértice se dibuja en rojo y la hormiga queda representada por el punto negro, ver figuras 7-9.

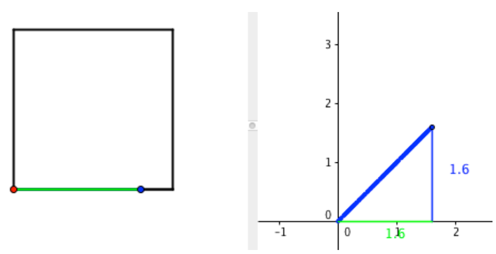


Figura 7. Vista de la simulación según se recorre el primer lado.

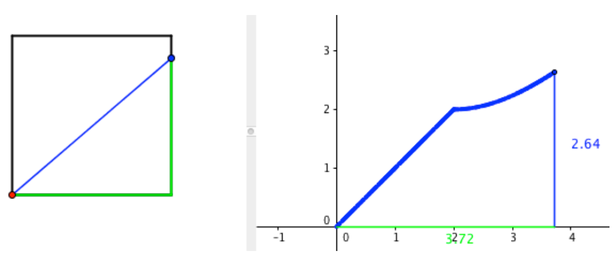


Figura 8. Vista de la simulación según se recorre el segundo lado.

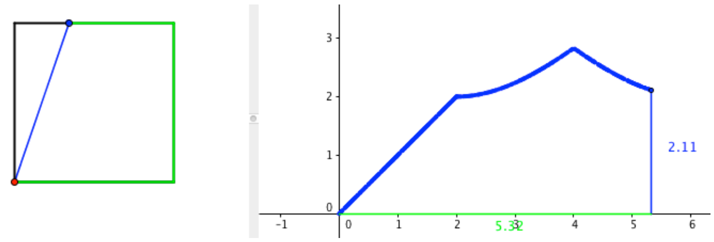


Figura 9. Vista de la simulación según se recorre el tercer lado.

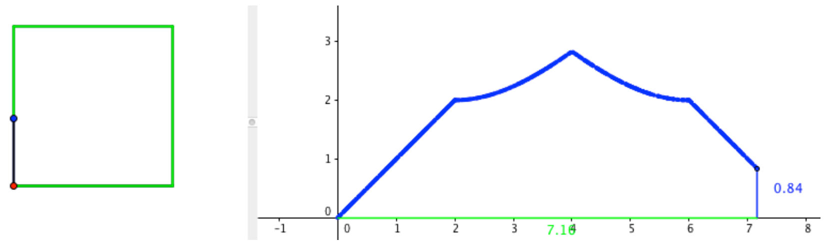


Figura 10. Vista de la simulación según se recorre el cuarto lado.

Debe quedar claro que en este proceso simulado se ha obtenido una aproximación gráfica construida punto a punto. Que nosotros veamos una línea continua es debido a nuestra capacidad visual que no es capaz de distinguir dos pixel en pantalla, muy próximos. También dejamos claro que esta simulación fue mostrada por el profesor en sesión de trabajo al grupo completo después de las actuaciones experimentales de todos los estudiantes.

Un acercamiento heurístico fue experimentado con estudiante universitarios mexicanos bajo la supervisión de la doctora Magally Martínez Reyes (UAMEX, México) con la que ya hemos publicado varios artículos en relación a este problema (Delgado y Martínez, 2023a; Delgado y Martínez 2023b). Con un primer grupo se experimentó midiendo directamente en cuadrados dibujados en el suelo del patio (una sesión de clase), midiendo en un cuadrado dibujado en la pizarra blanca (otra sesión de clase) y utilizando las herramientas de medida de GeoGebra en un cuadrado dibujado en la pantalla de otro un computador (otra sesión de clase). Se tuvo una muestra de treinta y cuatro estudiantes de Ingeniería de Computación (primer curso) que se distribuían en equipos de cuatro a cinco integrantes. Una sesión de clase sirvió para hacer la reunión de todo el grupo en conjunto, mostrándose la simulación anterior.

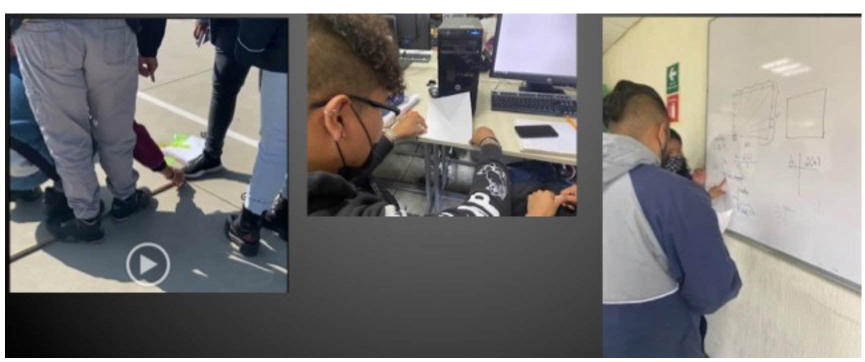


Figura 11. Vista de los experimentos con 34 estudiantes de Ingeniería de Computación.

Similar experiencia se realizó con otro grupo de sesenta estudiantes de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones análogamente agrupados de la Universidad Politécnica de Texcoco. En esta ocasión dibujaron un cuadrado directamente en la tierra y midieron en una sesión fuera del aula.

Figura 12. Vista del experimento con 60 estudiantes de Ingeniería de Electrónica.

Todos los grupos de estudiantes tuvieron un primer escollo que fue dibujar un cuadrado, cosa que en general no es nada fácil aunque pudiera parecerlo. En la experimentación se les dotó de un protocolo que debían comprobar antes de hacer mediciones (Guía de experimentación). También se les presentó otro protocolo que debían rellenar adecuadamente para hacer una secuencia de medidas del recorrido y de la distancia. En la figura 13 hay una respuesta gráfica construida por un grupo de esos estudiantes que puede servirnos de ejemplo.

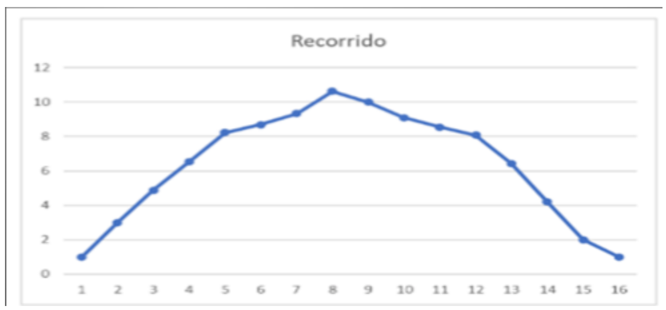


Figura 13. Respuesta gráfica de un grupo de estudiantes de Ingeniería.

Conviene analizar la respuesta gráfica de la figura 13. Es claro que se realizó una secuencia de dieciséis medidas del par (recorrido, distancia). Parece que se realizaron sobre un cuadrado de lado cuatro unidades de algún tipo, realizando cuatro anotaciones por lado. Ahora bien, esto no es así puesto que trabajaron con un cuadrado de lado unidad. La gráfica mostrada se construye al tomar subdivisiones de los lados de igual longitud y en lugar de mostrar longitudes de recorrido y distancia muestra número de subdivisiones y distancia, sin hacer referencia al cambio de escala en cada eje.

También se observa que la realización de las medidas de las distancia no fueron correctas del todo, es decir, hubo errores. Esto se debe a varias causas: error producido al medir, error al anotar medidas y error al graficar los puntos de esa secuencia, puesto que los cuadrados cumplían los requisitos del protocolo establecido. Esto nos permite afirmar que un proceso heurístico no es algo que se pueda ejecutar sin la debida atención y evitar no producir efectos indeseados. Experimentar sí, pero con mucho cuidado. El simple hecho de obtener un cuadrado base de la experimentación debe ser eso, un cuadrado y no algo parecido.

En realidad los estudiantes obtuvieron un registro tabular del que intentaron obtener un registro gráfico. Nos sorprende por un lado que unos estudiantes universitarios realizaran interpolación lineal entre dos puntos consecutivos. Esto refleja la forma en la cual se enfrentaron al concepto de función en sus primeros momentos en otros niveles académicos. Por otro lado, que se interpoló sin hacer referencia a la continuidad de la función y se dibujó continua sin ninguna explicación.

Es claro que las cuatro primeras medidas y las cuatro últimas se corresponde con dos tramos rectos, pero las otras ocho medidas no correspondieron a tramos rectos. Ese detalle no incomodó a los estudiantes ni generó la necesidad de una revisión de las medidas realizadas, incluso después de interpolar. Los estudiantes no emplearon una nube de puntos más fina en esos tramos no rectos para asegurar un acercamiento más preciso en esos tramos. Esto nos indica que, aunque los procesos sean heurísticos, el profesor debe enseñar la forma correcta de ejecutarlo para que estos acercamientos sean útiles de verdad.

Ningún grupo ofreció una expresión explícita de la función buscada. La función respuesta no es de expresión única puesto que es una función definida a trozos. Los estudiantes buscaban una expresión única y ninguna de las funciones conocidas tenía una gráfica similar. Se trata de una función no negativa acotada, continua en su dominio, no derivable en algunas partes de su dominio, justo para los valores del recorrido en los que la hormiga cambia de lado.

Si la hormiga sólo recorre una única vez ese perímetro y la medida del lado es 2, se trata de la función de la de la figura 14.

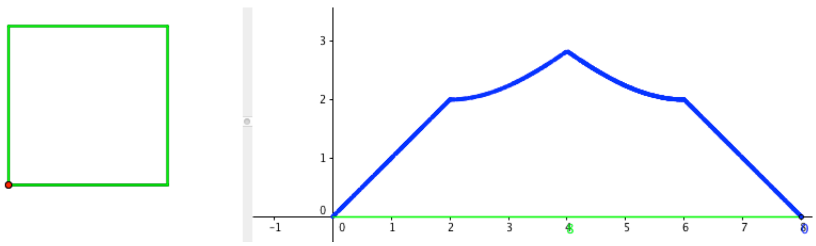


Figura 14. Gráfica de la función a una vuelta.

Si la hormiga recorre indefinidamente ese perímetro y la medida del lado es l, entonces es una función cuyo dominio es toda la semirrecta $[0, \infty)$, periódica de periodo $4l$, con puntos máximos locales para los valores del recorrido $(4k+2)l$ y puntos mínimos en los valores $4kl$ para cualquier k entero positivo. El valor mínimo absoluto es 0 y el máximo absoluto es $\sqrt{2}\, l$. Su expresión explícita está contenida en la figura 15.

$$f(x) = \begin{cases} x & 4kl < x \leqslant (4k+1)l \\ \sqrt{l^2 + (x-l)^2} & (4k+1)l < x \leqslant (4k+2)l \\ \sqrt{l^2 + (3l-x)^2} & (4k+2)l < x \leqslant (4k+3)l \\ 4 - x & 3l < (4k+3)l < x < 4(k+1)l \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Figura 15. Expresión explícita de la función sin parada de la hormiga.

5. El tercer paradigma: La distancia de un punto a otro de un cuadrado

Si bien el segundo problema estaba pensado para que pudiera seguir las dos vías cualquier estudiante desde la Enseñanza Primaria hasta la Enseñanza Universitaria, en este tercer problema nos restringimos a estudiantes de Bachillerato y estudiantes universitarios. La razón es la necesidad de saber determinar la distancia entre dos puntos del plano para cuando se requiera determinar la expresión explícita de la función objetivo. Con este ejemplo abundamos en tratar con la función real de una variable real. Además, al igual que con los anteriores problemas, el enunciado no aporta dato numérico alguno. El enunciado es: Determina la distancia a la que está una hormiga que avanza por un cuadrado, de un determinado punto del plano en función de lo recorrido por la hormiga.

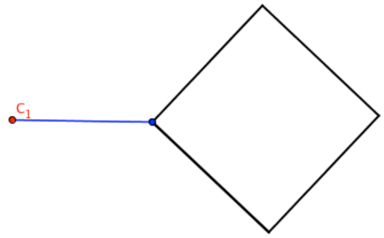


Figura 16: Recorrido posible en el tercer paradigma.

A este problema le corresponde una serie de generalizaciones del segundo problema, puesto que se dota de dos grados de libertad al punto desde el cual se mide la distancia con la situación de la hormiga. El problema puede ser resuelto por estudiantes de primaria y de secundaria si el punto está situado en el perímetro del cuadrado. En este caso tan sólo se requieren técnicas básicas como el teorema de Pitágoras.

Este problema no fue planteado a los grupos de estudiantes que trataron el caso del punto en un vértice del cuadrado, pues no tenía sentido en vista de los resultados del problema inicial. Fue presentado en el modo simulación en las Jornadas de Innovación Matemática eXIDO 2021.

La simulación empleó la misma aplicación GeoGebra que se muestra en la figura 6, puesto que esa aplicación permite variar los vértices del cuadrado y el punto marcado en rojo como puede apreciarse en la figura 17. La selección del punto rojo y la posición y longitud del lado se pueden modificar al ser seleccionados con el ratón y ser desplazados.

Se pueden replicar todas las actuaciones realizadas con el segundo paradigma. Así pues, al interactuar con el deslizador que controla la posición de la hormiga se obtienen las gráficas que se construyen punto a punto, de la función distancia. Estas gráficas tienen una familiaridad con las funciones del segundo ejemplo en el caso de que el punto sea exterior al cuadrado como se puede ver en la figura 18.

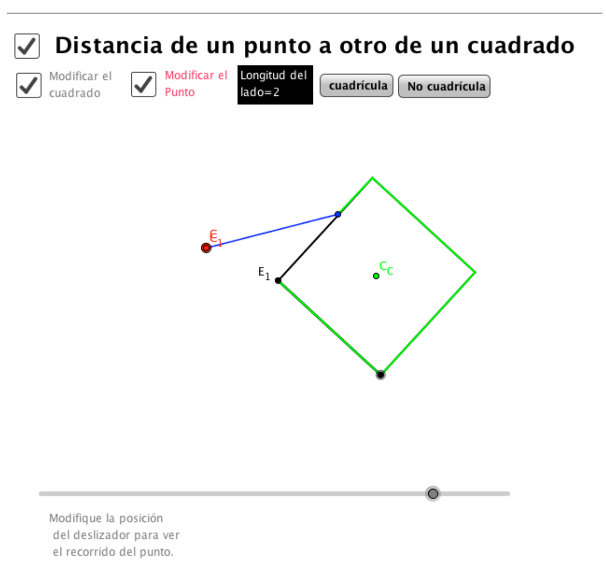


Figura 17. Vista del control de laboratorio de simulación.

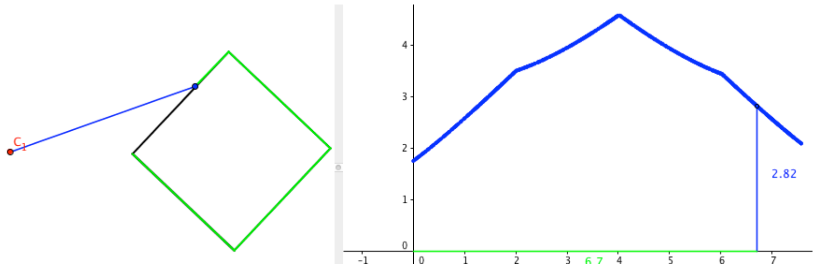


Figura 18. Vista de la construcción de la gráfica.

Es claro que se dispone de una gráfica patrón de una única vuelta muy similar al de la primera vuelta del segundo problema. Si la hormiga recorre indefinidamente ese perímetro y la medida del lado es l, entonces se obtiene una función cuyo dominio es toda la semirrecta $[0,\infty)$, periódica, de periodo $4l$, con puntos máximos locales para los valores del recorrido $(4k+2)l$ y puntos mínimos en los valores $4kl$ para cualquier k entero positivo. A diferencia del segundo ejemplo, en este caso el valor mínimo absoluto es un número positivo (distancia del punto al cuadrado).

Los estudiantes deben saben que un movimiento del plano no afecta ni a la longitud de los segmentos ni a los ángulos. Esto permite afrontar la determinación de la expresión explícita de la función distancia estudiando el caso que se muestra en la figura 19. Es decir, se utiliza el caso de un cuadrado de lados paralelos a los ejes coordenados. Sí se considerará el punto de coordenadas (a,b) como la imagen del punto C_1, por el movimiento que transforma el cuadrado inicial en el cuadrado con el vértice en $(0,0)$ y lados paralelos a los ejes.

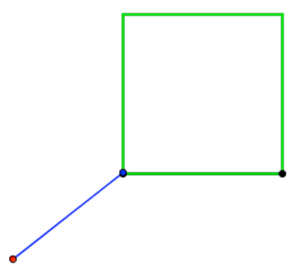


Figura 19. Reconstrucción del problema.

Con esta transformación del problema se facilita al estudiante determinar las coordenadas de la posición de la hormiga y, por tanto, aplicar fácilmente la expresión de la distancia entre los dos puntos; el marcado y el de la hormiga. La función distancia se describe explícitamente como una función definida por partes, concretamente, cuatro partes, una por cada lado como puede verse en la figura 20.

$$f(x):\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+b^2} & 4kl < x \leqslant (4k+1)l \\ \sqrt{(l-a)^2+(b-x+l)^2} & (4k+1)l < x \leqslant (4k+2)l \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\ \sqrt{(a-3l+x)^2+(b-l)^2} & (4k+2)l < x \leqslant (4k+3)l \\ \sqrt{a^2+(b-4l+x)^2} & 3l < (4k+3)l < x < 4(k+1)l\end{cases}$$

Figura 20. Función distancia f dependiente del recorrido x.

En el caso de que el punto esté situado en el interior del cuadrado, la forma de la gráfica de la función es totalmente diferente al caso anterior, como puede verse en la figura 21.

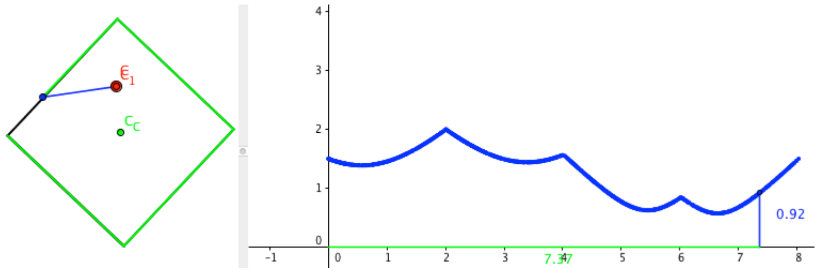


Figura 21. Gráfica correspondiente a un punto interior.

En este caso la gráfica de la primera vuelta tiene cuatro puntos mínimos relativos en puntos donde la función es derivable. También, tiene tres puntos máximos relativos, sin contar los extremos del intervalo, en puntos donde la función no es derivable. Esto se aprecia mucho mejor en el caso de que el punto sea el centro del cuadrado, como se aprecia en la figura 22.

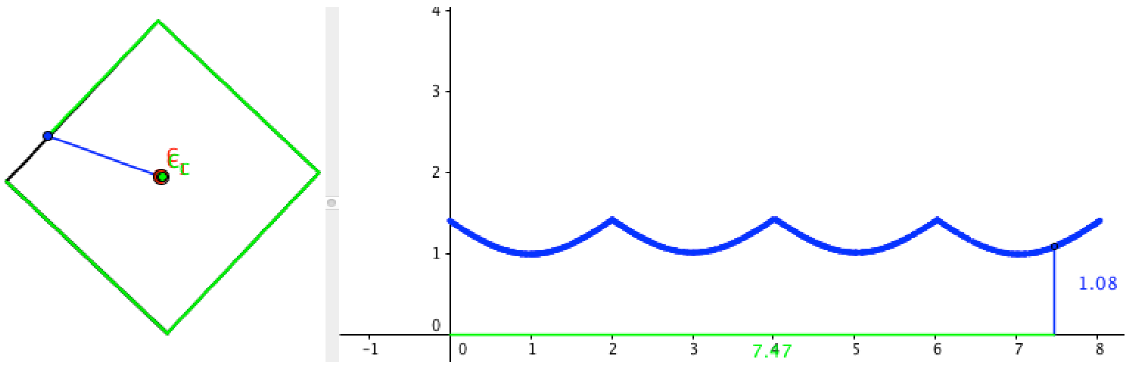


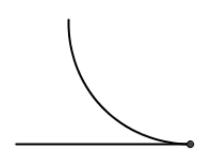
Figura 22. Gráfica correspondiente al centro del cuadrado.

Se puede pensar en que unos estudiantes podrían hacer un acercamiento heurístico similar al realizado por los estudiantes de las muestras del segundo paradigma.

6. El cuarto paradigma: El ángulo corneado de Euclides

Una cosa está clara para casi todos los matemáticos e investigadores: "investigar es afrontar un problema con el fin de saber si tiene solución, resolver un problema del cual se desconoce la solución o resolver un problema del cual no se conoce el método empleado que llega a la solución".

Si bien los tres primeros problemas fueron pensados para ser tratados por estudiantes, este cuarto problema se restringe a estudiantes de postgrado, profesores e investigadores. Esto es así dada la necesidad de una formación matemática. Al igual que los anteriores problemas, el enunciado no aporta dato numérico alguno, pero en este caso hay que comenzar con un proceso de búsqueda de información en la literatura. El enunciado es: Generalizar la definición de ángulo rectilíneo para determinar una forma de medir el "ángulo", ángulo corneado, que forman una circunferencia y la recta tangente en un punto a ella.



Lo primero que nos puede sorprender es que alguien no entienda que ese ángulo es nulo y que mide 0 radianes, puesto que el ángulo entre dos curvas que se intersecan se define como el ángulo entre las dos rectas tangentes de las dos curvas en el punto de intersección. Pero siempre ha habido y hay personas que ven el problema desde otra perspectiva. Personas que se apoyan en un estudio epistemológico de la cuestión que tratan. En este caso el problema a resolver tiene su primera referencia en *los Elementos* de Euclides (siglos 4º y 3º a.C.) y corresponde a la definición de ángulo: "Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta". También, se indica en los Elementos: "Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo". Además, La proposición 16 del Libro III asegura la existencia del ángulo corneado, con el siguiente enunciado: "El ángulo corneado es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo".

El concepto de medida de un ángulo corneado será más o menos claro en función la definición de ángulo que utilicemos. La forma de medir es un problema que han tratado a lo largo de la historia matemática muchos grandes matemáticos y se sigue tratando incluso con técnicas diferenciales. Ahora bien, dudamos que Euclides pudiera pensar en emplear una definición muy compleja, pues no tenemos que olvidar como definen los Elementos algunos objetos geométricos elementales. Por ejemplo*, Un punto es lo que no tiene partes. Una línea es una longitud sin anchura. Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura*. Hoy en día interpretaríamos que ¿un punto tiene 0 partes? ¿Una línea tiene 0 anchura y longitud distinta de 0? ¿Una superficie tiene longitud y anchura distintas de 0? Ahora bien, los griegos actuaban con elementos reales observables y en general trataban con magnitudes enteras y con magnitudes comensurables, aunque detectaran magnitudes incomensurables. No usaban elementos degenerados a partir de elementos reales como lo es el ángulo de medida 0. Entendían la posible deformación sucesiva de los objetos reales sólo con un carácter potencial, así pues, la recta actual se correspondía con la deformación continua de un segmento rectilíneo (línea recta), que eran los objetos que empleaban en sus definiciones.

Hoy en día la noción de ángulo plano que se usa es la que usan los estudiantes de Enseñanza Secundaria: "Porción del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen común", que coincide con la definición dado por la enciclopedia Wikipedia (español): "un ángulo es la figura formada por dos semirrectas, llamadas lados, que comparten un punto final común, llamado vértice". Esta definición no recoge la versión de ángulo corneado. Sin embargo, la definición del diccionario de la RAE: "Figura geométrica formada por dos líneas planas que concurren en un punto, ..." si ampara la definición de Euclides y al ángulo corneado.

Podemos intuir que la cuestión de porción del plano entre dos líneas es medible y su medida es no nula, o ¿no? Una circunferencia y una recta tangente a ella forman un ángulo corneado (dos, uno a cada lado) y nuestra intención es saber cuál es su tamaño. Según la RAE, se entiende por "tamaño de un cuerpo" una propiedad que puede ser medida. Precisamente aquí está el problema importante, cómo medir ese ángulo corneado, así pues la dificultad no es esencialmente si un ángulo corneado se trata de ángulo o no.

Al consultar Wikipedia sobre el ángulo y su medida aparece: "La medida de un ángulo es considerada como la amplitud del arco de circunferencia centrada en el vértice y delimitada por sus lados", y se añade "Su medida es un múltiplo de la razón entre la longitud del arco y el radio. Su unidad natural es el radián…". Es claro que esta enciclopedia reserva la palabra ángulo para el plano. Sin duda, existen otros tipos de ángulos; ángulo diedro y ángulo triedro. Estos últimos son parte de un cilindro o parte de una esfera. Debemos observar que haya un protocolo de actuación para medir un ángulo diedro en el cual se mide el ángulo plano correspondiente a una sección perpendicular al cilindro. Así pues, debemos buscar una forma de medir para el ángulo corneado. Ya decía Proclo (siglo 5ª d. C.) que un ángulo debe ser una cualidad o una cantidad, o una relación, y nos interesa determinar la cantidad del corneado.

Lo primero que se puede intentar es ver si la medida se corresponde con un arco de circunferencia, y de esa forma podrá medirse. Lo primero que se nos ocurre es analizar la región del plano delimitada por las dos líneas; la circunferencia y la recta tangente. Con un ángulo se tiene cualquier intersección de un círculo, centrado en el vértice, con la región del ángulo. Esta intersección presenta una muy buena propiedad: que forma figuras congruentes si se cambia el radio del círculo. Esto se puede apreciar en los casos que se muestran en la figura 23. Es decir, se tienen triángulos semejantes, lados semejantes, sectores circulares semejantes. En definitiva, en esas figuras no importa lo que midan los lados pues el ángulo mide lo mismo. Esto es básico, pues tenemos un resultado que denominamos Teorema de Tales (el actual) en reconocimiento al teorema de Tales de la Grecia clásica correspondiente a las magnitudes que utilizaban.

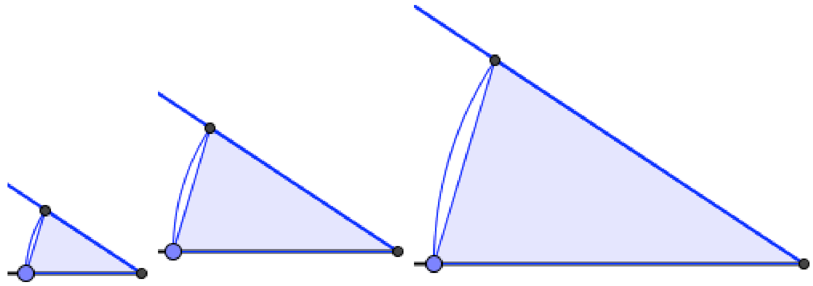


Figura 23. Vista de las intersecciones de circulo y ángulo.

Con los ángulos corneados que estamos tratando no ocúrrelo lo mismo como puede apreciarse en la figura 24. No se obtienen triángulos semejantes, ni lados proporcionales, ni ángulos rectilíneos iguales.

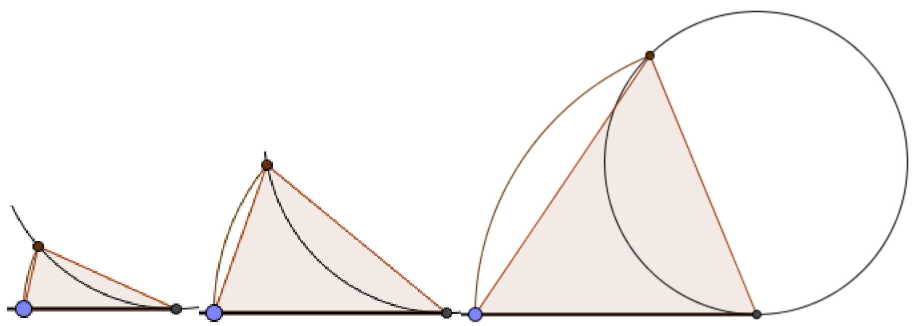


Figura 24. Vista de las intersecciones de circulo y ángulo corneado.

Incluso puede darse la situación de que el circulo usado para la intersección contenga a toda la circunferencia como puede verse en la figura 25.

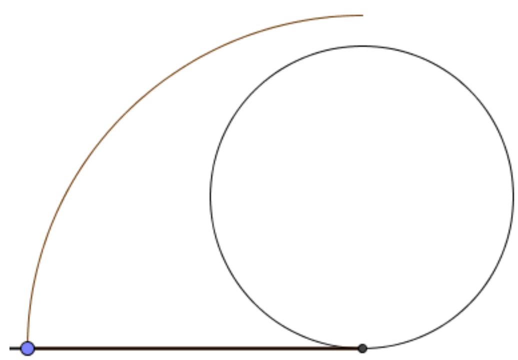
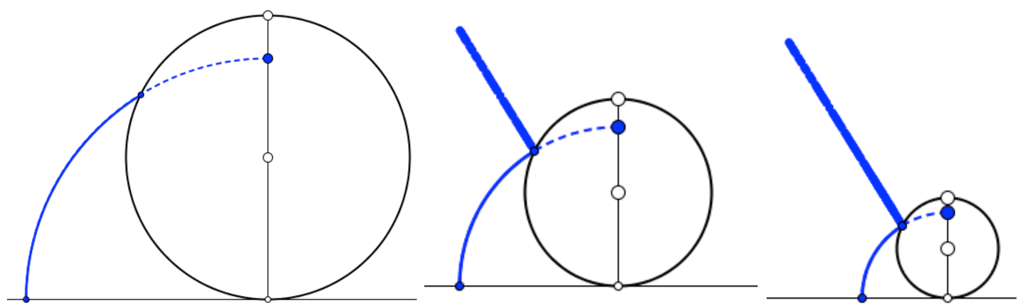


Figura 25. Vista de una intersección de circulo y ángulo corneado.

Nuestro acercamiento al problema se realiza con una aplicación GeoGebra que permita simular este tipo de ángulo corneado para cualquier circunferencia y su recta tangente horizontal. Así pues, se inicia un proceso heurístico, apoyado en la simulación, buscando alguna característica que se mantenga constante; más o menos.

Es razonable suponer que la posible medida de este tipo de ángulo corneado sea independiente del radio de la circunferencia. Esta suposición va en contra de aquellos matemáticos que a lo largo de la historia decían que la medida dependía del radio: "… este ángulo sí era una magnitud porque era posible observarlo visualmente y aseguraba que el tamaño de este variaba dependiendo de qué tan grande o pequeña fuera la circunferencia"; véase como lo afirma Bräting (2012). Entendemos que si se puede considerar un arco de circunferencia para medir el ángulo corneado, entones el factor escala (radio) no debe afectar dado que la posición relativa es la misma. Es decir, la medida del ángulo corneado de cualquier circunferencia con una recta tangente debe ser la misma.

La primera búsqueda se inició con un circulo cualquiera y se resaltaba el punto de corte con la circunferencia y se le dotaba de la propiedad de dejar rastro. De esta forma podíamos analizar qué sucedía si se cambiaba el radio de la circunferencia mientras que la recta tangente se mantenía fija y el círculo correspondía al mismo punto (relativo) de diámetro perpendicular a la tangente. En la figura 26 se puede observarse la trayectoria (línea gruesa) de ese punto de corte al variar el radio con un deslizador GeoGebra. Es una trayectoria en línea recta



.

Figura 26. Vista del punto intersección y trayectoria recta.

Para asegurar disponer de un círculo, a ciegas, que tuviese intersección con la circunferencia se consideró el circulo de igual radio y centro el punto de tangencia, y le denominamos círculo canónico del ángulo corneado El efecto del cambio de radio se aprecia en la figura 27.

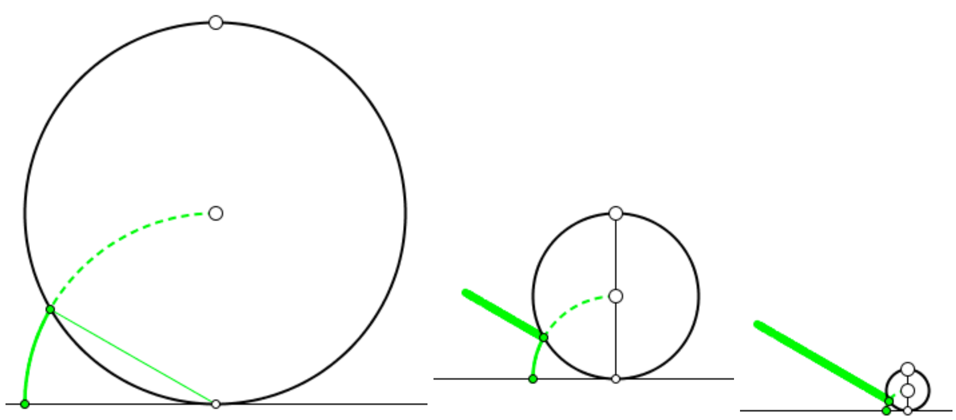


Figura 27. Vista de la intersección y trayectoria con el círculo canónico.

El segmento rectilíneo que une el punto de intersección y el punto de tangencia es un lado del hexágono inscrito en la circunferencia. Así pues, el ángulo que forma la tangente y el radio perpendicular a ésta mide $\frac{\pi}{3}$ radianes. Luego el ángulo del segmento y la tangente mide $\frac{\pi}{6}$ radianes.

En la figura 28 se aprecian tres triángulos; uno rectilíneo que nos ha permitido determinar un ángulo, uno curvilíneo formado por el segmento, la tangente y el arco de círculo; y un tercero curvilíneo formado por la circunferencia, el circulo y la recta tangente. La medida del área de este último es $\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$; el dibujado en oscuro en la figura 28.

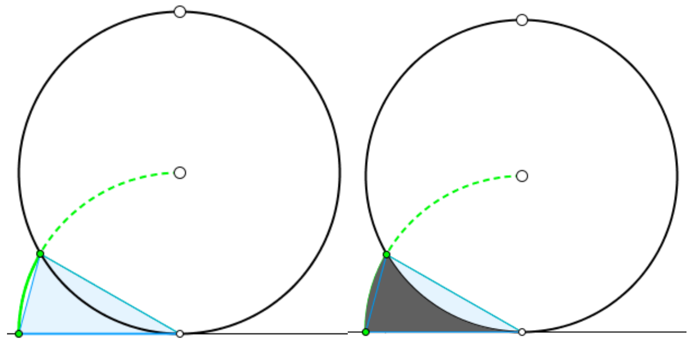


Figura 28. Triángulo rectilíneo y triángulos curvilíneos.

Encontrar una propiedad constante independiente del radio de la circunferencia mediante un proceso de simulación nos permite aventurarnos a definir *la medida de ese ángulo corneado* como la medida del ángulo rectilíneo formado por la semirrecta tangente y la semirrecta que contiene a la cuerda que une al punto de tangencia y al punto de la semicircunferencia contenido en la mediatriz del radio perpendicular. Una vez admitida esa definición, podemos indicar que la naturaleza del ángulo corneado no es similar a la naturaleza de ángulos rectilíneos.

7. Conclusiones

Aunque hay diversas interpretaciones didácticas y psicológicas dentro del marco de la Matemática Educativa del concepto Problema de Matemáticas, se ha optado por la definición tradicional que recoge el diccionario de la RAE por ser la definición más ampliamente conocida por tradición matemática. Igualmente existen en el ámbito de la Didáctica de la Matemática muchas interpretaciones de lo que representa la expresión Resolución de Problemas; sin embargo, hemos asumimos la concepción de Resolución de Problemas como la respuesta desconocida a un problema que debe obtenerse a través de métodos matemáticos, pues es la más ampliamente divulgada y empleada en el día a día del estudiante, docente e investigador. Es decir, hemos optado por unas interpretaciones tradicionales, aunque pudieran parecer ingenuas y no se ajusten a ciertas consideraciones didácticas. Los problemas de Matemáticas existen mucho antes que muchas teorías didácticas y no siempre se requiere una redefinición para entenderlo.

Una vía tradicional de resolver un problema se puede interpretar como un grafo que une los tres vértices de un triángulo de resolución: Problema, Deducción e Inducción. Ese grafo debe unir la base con el otro vértice. Sin duda, se puede entender que se dibujen distintos grafos, de igual forma que de algunos problemas se conocen distintas formas de resolverlo, ver figura 29.

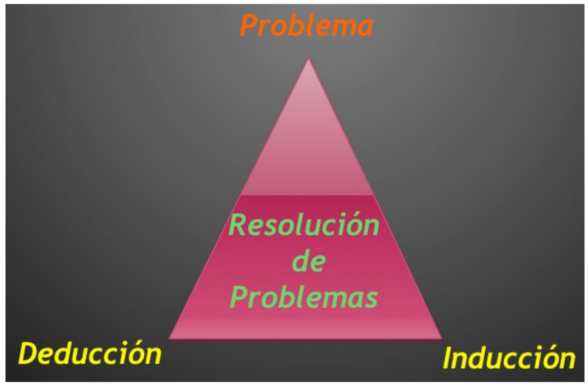


Figura 29. Espacio tradicional de la resolución de un problema.

Nosotros optamos por un espacio de resolución de un problema no triangular. Nuestra imagen es la de una estrella de cinco puntas, véase figura 30, y si bien la resolución se asemeja a establecer un grafo que une las puntas inferiores con la superior. Con esta imagen queremos visualizar la forma de abordar un problema basado esencialmente en la deducción o inducción. Emplear el método deductivo o el método inductivo es la meta cuando afrontamos la resolución de un problema.

Si bien la meta puede estar oculta de primera mano, no es menos cierto que tratar un problema de forma heurística o de forma simulada nos puede convencer de que existe esa meta. En los ejemplos que hemos presentado se ha buscado una de esas alternativas que pudieran facilitar la resolución formal. Empleando la analogía del grafo, nadie puede negar que la resolución se puede iniciar con un grafo que une alguna de las dos puntas laterales de la figura 30. Este grafo previo se puede conectar al grafo que une las puntas inferiores con la superior. Así pues, podemos generalizar la idea de resolución de problemas haciendo uso previo de la heurística o de la simulación.

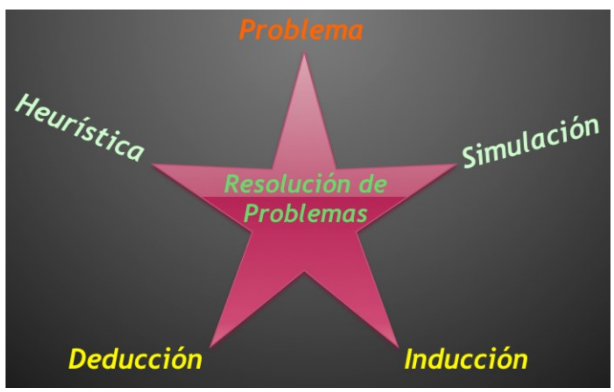


Figura 30. Espacio real de la resolución de un problema.

Cada uno de los ejemplos que se han presentado han sido experimentado; uno con profesores y otro con estudiantes y el último por el propio autor dada la naturaleza del problema. Sin duda la experimentación muestra que los métodos heurísticos empleados deben ser aprendidos para que tengan eficacia y no queden sepultados entre los errores de medidas, o cálculos, en la experimentación. Los profesores deben entender que la Matemática tiene cierto carácter experimental, heurístico o simulado, que deben poner en práctica para que la resolución de los problemas llegue a los estudiantes con la mente abierta al formalismo. En el primer ejemplo, se propuso que los profesores viesen esa matemática experimental como tal y para que les sirviera de referencia en su tarea docente. En el segundo ejemplo, se propuso ver la forma en la cual los estudiantes aceptan esa matemática experimental con el fin de que aprendan la necesidad de formalizar las resoluciones de los problemas. Los resultados indican que es aconsejable un cambio de cultura del profesor para que ese cambio de cultura pueda anidar en el estudiante. Al menos en nuestro curso de Formación Permanente del Profesorado, conseguimos alcanzar ese cambio de perspectiva del profesor. Ahora bien, no sabemos en qué medida traspondrán estas técnicas con sus estudiantes.

En el tercer ejemplo se ha intentado mostrar las diversas formas de generalizar un problema. Este caso se ha construido el objeto por simulación punto a punto en un primer momento.

En el cuarto hemos afrontado un tema espinoso que bien puede ser el inicio de una investigación matemática más profunda. Se afrontó la tarea, imponiendo por delante la tarea difícil de investigar en matemáticas cuando no hay mucha base teórica. Hemos dado una respuesta que no está en la literatura al mostrar la utilidad de simular el problema. La utilidad de la respuesta que se ha dado a este último problema podrá ser valorada por el lector.

8. Referencias

Bräting, K. (2012). Visualizations and intuitive reasoning in mathematics. *Mathematics Enthusiast, 9*(1 y 2), 1-18.

Charnay, R. (1994), “Aprender (por medio de) la resolución de problemas”, en Parra, C. y Saiz I., *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19 – 58. España.

Delgado Pineda, M. (2016). Registros para una función real cualquiera de variable real. *El Cálculo y su Enseñanza*, 6, pp. 1-28. México.

Delgado, M. y Martínez, M. (2023a). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora (pp. 171-186). En: Cuevas, A., Martínez, M. y Hernández, J. (2023). *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y las matemáticas*, UAEM, México.

Delgado, M. y Martínez, M. (2023b). Experiencia Innovadora con funciones periódicas derivadas del andar de una hormiga en ingeniería. *Revista Pi-InnovaMath*, 5: 46-60, febrero. España.

Duval, R. (1999): Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis issues for learning. *Educational Resources Information Center* (ERIC).

Gascón. J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 6(3). Noviembre.

Larios, V. (2000). Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación.

Polya, G. (1962). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos. España.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [título original: *How To Solve It?*]. México: Trillas.

RAE. (2023). Diccionario de la Real Academia Española y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. HYPERLINK "https://dle.rae.es/" https://dle.rae.es/

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.