

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA

El Cálculo y su Enseñanza.
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Adrián Castro Camacho

Telesecundaria federalizada #48

adrian_castro90@outlook.com

Judith Alejandra Hernández

Sánchez

Universidad Autónoma de

Zacatecas

judith700@hotmail.com

Recibido: 11 de abril de 2023

Aceptado: 21 de junio de 2023

Autor de Correspondencia:
Judith Alejandra Hernández
Sánchez



Resumen. El estudio de los errores y las causas que los originan permite acompañar el proceso de reestructuración de los esquemas mentales de los alumnos. Un elemento importante en la mejora de los aprendizajes es la evaluación de los aprendizajes, que puede ofrecer a los docentes información que ayude a mejorar sus prácticas de enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes. En este trabajo se presenta un análisis de los errores cometidos por estudiantes de un grupo de tercer grado de secundaria al resolver cinco ítems algebraicos de Plan Nacional de Evaluación del Aprendizaje (PLANEA). El diagnóstico de los errores se realizó utilizando un enfoque cualitativo-interpretativo mediante dos modelos de clasificación de errores. Los resultados apuntan a que los errores más frecuentes al resolver el examen fueron: los cometidos por datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje y un dominio insuficiente de símbolos.

Palabras Clave: aprendizaje; nivel secundaria; álgebra.

Abstract. The study of errors and the causes that originate them allows us to follow the process of restructuring the mental schemes of the students. An important element in the improvement of learning is the evaluation of learning, which can offer teachers information that helps to improve their teaching practices and the learning of their students. This paper presents an analysis of the errors made by students of a third-grade secondary school group when solving five algebraic items from the National Learning Assessment Plan (PLANEA). The diagnostic of the errors was carried out using a qualitative-interpretative approach using two error classification models. The results suggest that the most frequent errors when solving the exam were; those committed by misused data, incorrect interpretation of language, and insufficient command of symbols.

Keywords: learning; high school; algebra.



1. Introducción

El reconocimiento, análisis y posterior superación de los errores forman parte del desarrollo de la ciencia (Bocco y Canter, 2010). Por lo tanto, se convierte en tema de interés para la matemática educativa, pues permite acompañar los procesos de aprendizaje de las matemáticas; mediante el proceso de reestructuración de los esquemas mentales de los alumnos y de esta manera comprender el tema que se aborda (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2004). Lo anterior, dado que hasta los estudiantes, incluso los más capaces para las matemáticas, encuentran grandes dificultades cuando inician su aprendizaje de las matemáticas (Bocco y Canter, 2010). De manera complementaria, los estudios en torno a los errores, en los últimos años, los relacionan con temas emergentes como el dominio afectivo (en Eccius-Wellmann e Ibarra-González, 2020); talentos matemáticos (en Ramírez-Uclés, Flores Martínez y Ramírez-Uclés, 2018); o en la resolución de competencias matemáticas (en Quezada y Letelier, 2020), por mencionar algunos.

Aunado a lo anterior, un elemento importante en México es la evaluación como un medio para la mejora de los aprendizajes. Así, en 2013 se crea el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE); dedicado a medir, entre otras cosas, los aprendizajes de matemáticas a través de instrumentos estandarizados. Aquí utilizaremos el que corresponde al Plan Nacional de Evaluación del Aprendizaje (PLANEA) aplicado en el 2016, correspondiente al área de las matemáticas para el nivel secundaria. Esta evaluación tiene como propósito conocer que tanto los estudiantes que cursan la educación obligatoria en el país dominan los aprendizajes clave del currículum.

Por tal motivo, el objetivo de la presente investigación es identificar y clasificar los errores cometidos por 14 estudiantes de tercero de secundaria al resolver 5 ítems algebraicos del PLANEA (2016). Según Rico (1993, pp. 9-10), las investigaciones en torno a los errores en el aprendizaje de las matemáticas se pueden clasificar en cuatro dominios:

- Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, taxonomías y clasificaciones de errores detectados.
- Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje de las matemáticas.
- Estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores.

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA

Esta investigación se ubica en el primer dominio, considerando el objetivo planteado anteriormente. Para alcanzarlo se utilizan las categorías de errores propuestos en Radatz (1980) y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, e Inbar (1987).

Entre los alcances esperados es brindar información al profesor, sobre la forma en que los estudiantes interpretan los ejercicios y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos para buscar su solución (Bocco y Canter, 2010). Además, el profesor podrá clasificarlos, examinar cómo se desvía de la solución correcta y hacer referencias sobre qué factor puede haber conducido al error (Rico, 1993). De esta manera, tanto el diagnóstico de los errores como el análisis de la evaluación brindan información que ayuda en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2. Materiales y Métodos

2.1. Tipo y diseño de investigación

El enfoque metodológico adoptado en esta investigación es de corte cualitativo Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista (2010), lo que permite comprender e interpretar los errores y las causas de ocurrencia de los mismos. Estos errores se clasifican utilizando las categorías establecidas por Radatz (1980) y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, e Inbar (1987) sintetizadas en la Tabla 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1

Clasificación de errores propuesta en Radatz (1980)

Nomenclatura y Tipo de error	Descripción
R1-Errores debidos a dificultades de lenguaje	Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal.
R2-Errores debidos a dificultades para obtener información espacial	Diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales.
R3-Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	Incluyen todas las deficiencias en el contenido incluye desconocimiento de algoritmos, manejo inadecuado de conceptos básicos, realización de procedimientos incorrectos, incomprensión de símbolos, etc.

R4-Errores debidos a asociación incorrecta o a la rigidez de pensamiento	Los estudiantes desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aun cuando las condiciones fundamentalmente de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado.
R5-Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en área de contenidos diferentes.

Tabla 2

Clasificación de errores propuesta en Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, e Inbar (1987)

Nomenclatura y Tipo de error	Descripción
M1-Datos mal utilizados	Se incluyen errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno.
M2-Interpretación incorrecta del lenguaje	Se incluyen errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
M3-Inferencias no válidas lógicamente	Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento y no se deben al contenido específico.
M4-Teoremas o definiciones deformados	Se incluyen errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable.
M5-Falta de verificación en la solución.	Se incluyen errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
M6-Errores técnicos	Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA

2.2. Instrumento

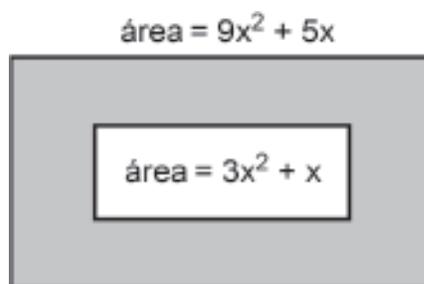
Para llevar a cabo la recolección de los datos, se aplicó un instrumento consistente en 5 ítems que corresponden al desarrollo del pensamiento algebraico propuesto en PLANEA (2016). Los ítems elegidos fueron redactados de tal forma que las respuestas fueran en su gran mayoría abiertas y no de opción múltiple (en 4 de los 5 ítems). Lo anterior, con la intención de poder analizar lo desarrollado por los estudiantes al resolver los ítems. Además, cuatro de los cinco ítems se propone que los estudiantes realicen conversiones de un registro geométrico a uno verbal en el sentido de Duval (1998); quedando de la siguiente manera:

1. Se compró una alfombra cuadrada para cubrir el piso rectangular de una habitación; al colocarla, se observó que faltaba cubrir parte del piso, como se muestra en la siguiente figura.

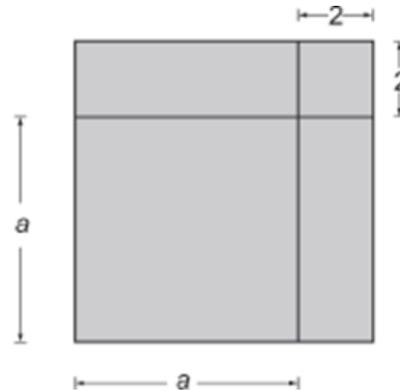


Expresa el área del piso de la habitación en forma algebraica.

2. De un rectángulo de área $9x^2 + 5x$, se recortó un rectángulo de área $3x^2 + x$. ¿Cuál es el área sombreada de la región resultante expresada en forma algebraica?



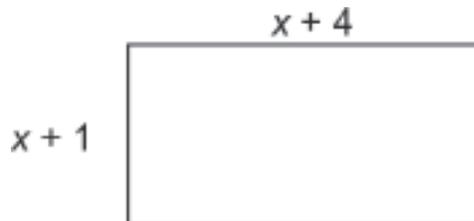
3. Un terreno fue dividido como se muestra en la imagen.



¿Cuáles de las siguientes expresiones representan el área de todo el terreno?

- (1). $(a-2)(a-2)$
- (2). $a^2 + 4a + 4$
- (3). $(a)(a) + 2(2a) + (2)(2)$
- (4). $a^2 + 4a^2 + 4$
- (5). $a^2 + (2)(a) + (2)(a) + (2)(2)$

4. La suma de las longitudes de los cuatro lados del siguiente rectángulo es 18 cm, ¿cuánto vale x ?



5. Resuelva paso por paso la ecuación $3(x - 2) = -4(-x + 2)$

3. Resultados y Análisis

El instrumento fue aplicado a 14 alumnos (9 hombres y 5 mujeres) de tercer año de una escuela secundaria del estado de Zacatecas; cuyas edades están entre 14 y 15 años. Los resultados (Figura 1) indican que sólo el único ítem que logró respuestas correctas fue el 3; casualmente era el único de opción múltiple. La frecuencia de respuestas incorrectas fue más alta en los ítems 2, 3 y 4. Los ítems 1 y 2 reportan una mayor cantidad de estudiantes que no respondieron y el complemento lo hizo de manera incorrecta. Lo anterior, permite evidenciar que los estudiantes mostraron dificultades para responder el instrumento conformado por 5 ítems del examen PLANEA (2016).

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA

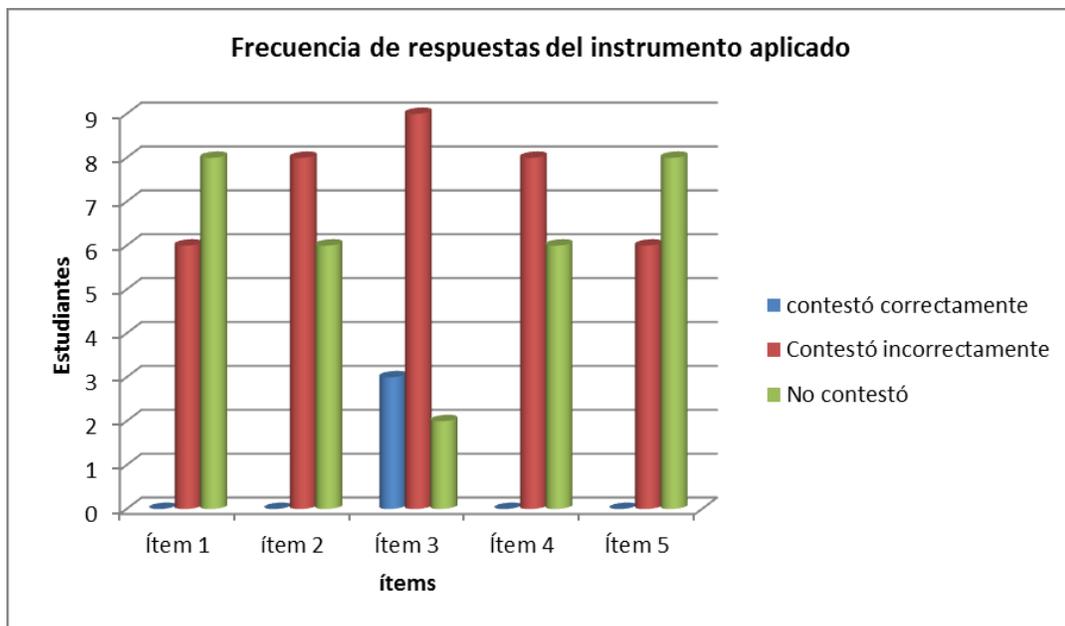


Figura 1. Resultados por dimensión evaluada.

De igual manera, las frecuencias de error, respecto a las clasificaciones utilizadas en las tablas 1 y 2 se presentan en la Figura 2.

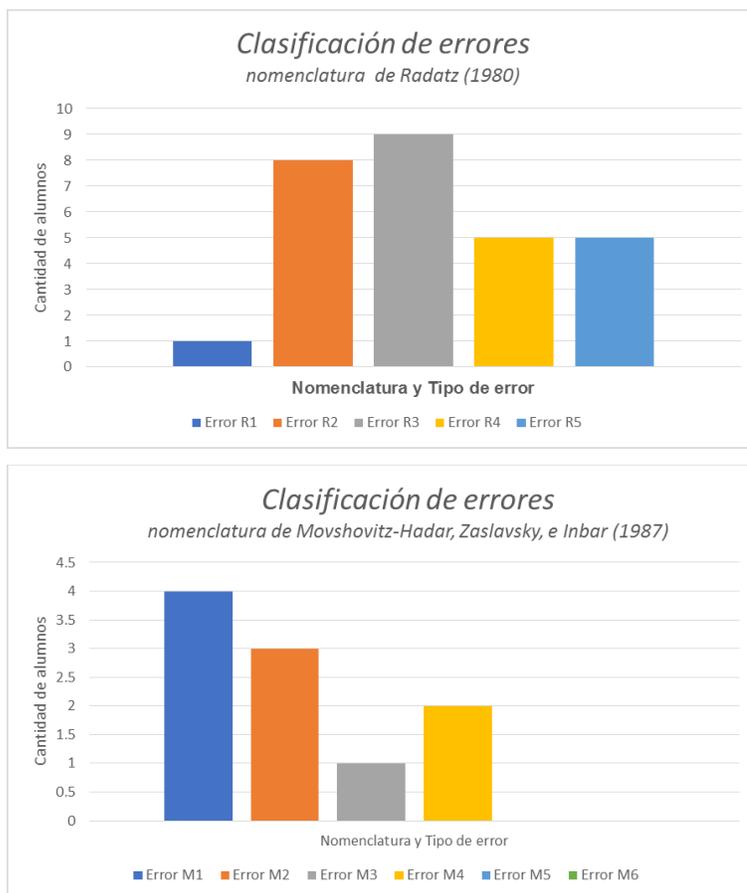


Figura 2. Frecuencia de tipos de errores en las respuestas de los estudiantes

El error con mayor presencia en las respuestas de los estudiantes propuesto en las categorías de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, e Inbar (1987) es el del tipo M1 (ver Tabla 2) que consiste en aquellos ocurridos por datos mal utilizados. En este sentido, el estudiante 12 contesta algo que no se pide en el ítem 1 (Figura 3). En este ítem se le pide al estudiante expresar el área del piso de la habitación en forma algebraica. Sin embargo, el estudiante propone como expresión algebraica una ecuación y procede a resolverla, buscando y encontrando de manera forzada un valor específico a la literal “x”. A lo que se interpreta que el estudiante conceptualmente trabaja con una ecuación (en vez de expresión) y su proceso de solución encontrando un valor desconocido.

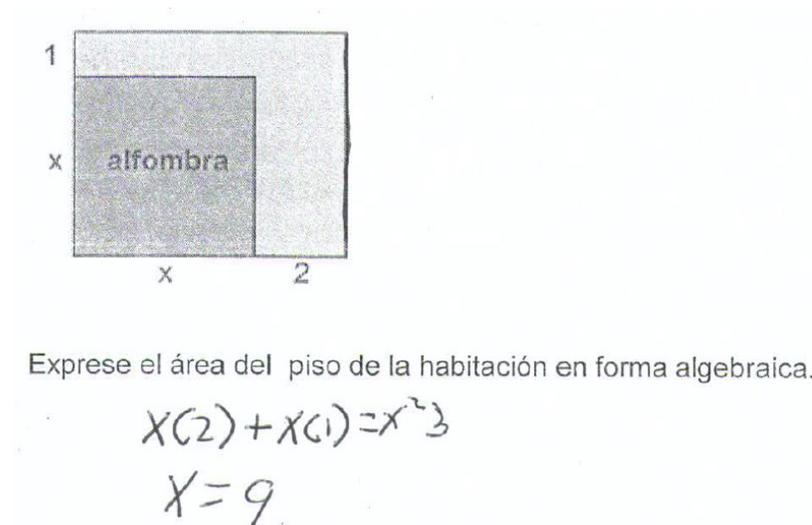


Figura 3. Error M1 cometido por el estudiante 12

Otro de los errores que son cometidos por datos mal utilizados (M1) es cuando el estudiante añade datos extraños. En este caso, son datos extras que no los proporciona el ítem, pero el estudiante los agrega como parte del proceso para llegar a una solución que tenga sentido para él. En la Figura 4, se puede observar que el estudiante 2 agrega una “x” adicional a la igualdad del lado izquierdo para intentar llegar a una respuesta que probablemente para el estudiante tenga sentido.

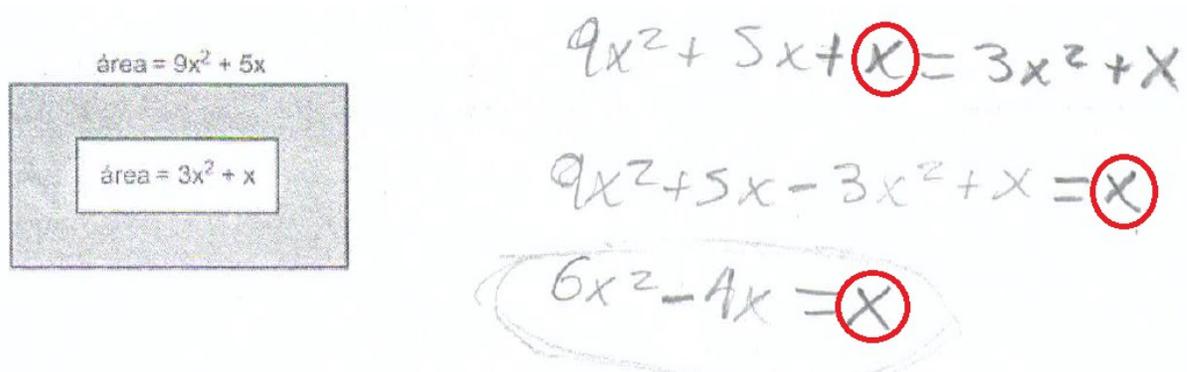


Figura 4. Error M1 cometido por el estudiante 2

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA

Otro error que se identificó son los del tipo M2 (ver Tabla 2). En la Figura 5 se presenta la respuesta del estudiante 2 al ítem 2, donde se espera que los estudiantes identifiquen que para obtener la expresión solicitada es necesario restar las dos expresiones de las áreas de cada rectángulo. Sin embargo, los estudiantes no lograron proponer esta expresión. En este caso, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, e Inbar (1987) propone que este tipo de error ocurre cuando el estudiante tiene una interpretación incorrecta del lenguaje. Para los estudiantes la relación que predomina al asociar ambas expresiones es la de áreas equivalentes en vez de la resta de áreas, como se muestra en la Figura 5.

De nueva cuenta los estudiantes proponen una ecuación, para después encontrar el valor de “x”. Este error fue cometido por los estudiantes 2, 5 y 12, siendo la mitad de los que contestaron este ítem. Además de que es evidente que al tratar de encontrar el valor de “x” que hace válida la igualdad, el procedimiento no es el adecuado.

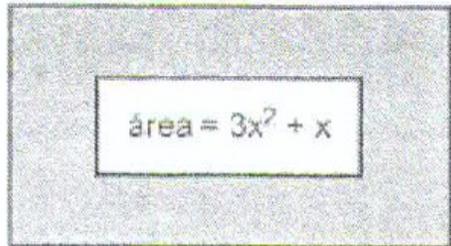

$$9x^2 + 5x = 3x^2 + x$$
$$x = 91 + 25 = 9 + 1$$

Figura 5. Error M2 cometido por el estudiante 2

Respecto a las categorías propuestas en Radatz (1980) el error del tipo R3 (ver Tabla 1) es el de mayor frecuencia, pues se presentó en las respuestas de los estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 12 y 13. Este error ocurre por un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos incluye un subtipo que corresponde a un dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios. Al respecto, en la Figura 6 se muestra que el estudiante 13 separa las literales y las constantes, hace una resta de 2 literales con potencia diferentes y el significado sigue siendo el de ecuación. Por lo tanto, propone como respuesta final un valor numérico, desviándose del objetivo que el ítem le está solicitando.

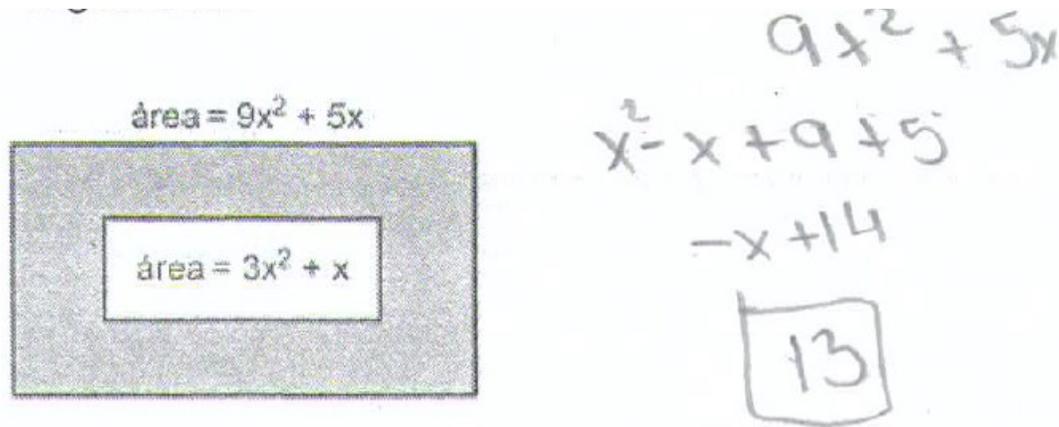
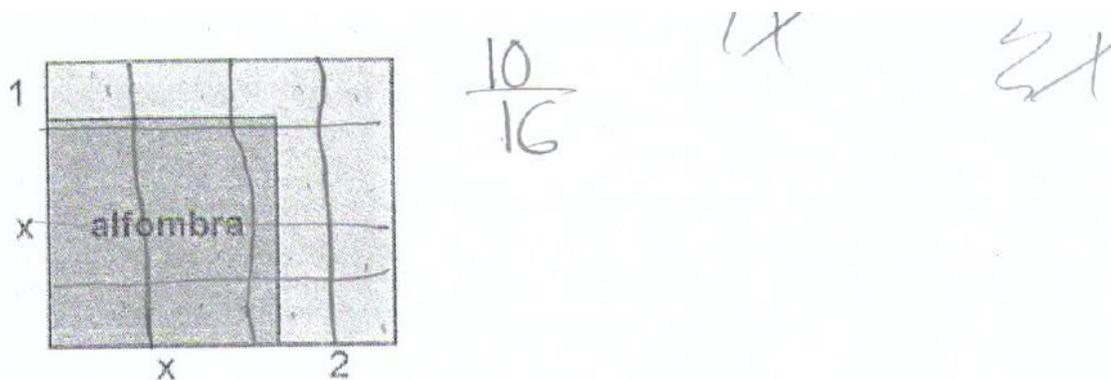


Figura 6. Error R3 cometido por el estudiante 13

El error del tipo R4 (ver Tabla 1) se presenta cuando los estudiantes utilizan algunos aspectos del contenido o del proceso de solución que son efectivos en otros contextos o que fueron aprendidos con anterioridad, inhibiendo el proceso de nueva información. En este caso, el estudiante 1 y 13 utilizan el procedimiento de cuadrricular; este proceso es utilizado en grados escolares anteriores donde se pide calcular áreas. Por lo que se interpreta que para estos estudiantes el proceso de solución de “cuadrricular” podría estar inhibiendo nuevos procesos de solución. En la Figura 7 se observa cómo el estudiante 1 cuadrricula en 16 partes iguales la información espacial que apoya al ítem 1, luego al área total le resta los cuadros que le corresponden aproximadamente a la alfombra y solo deja la parte del piso que no toca esta. El estudiante 1 considera que el ítem 1 le pide el área del piso que falta por cubrir con la alfombra, es por eso que realiza esa resta. De nueva cuenta, el estudiante en vez de proponer una expresión algebraica se concentra en encontrar un valor numérico que represente el área que se le solicita.

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA



Expresar el área del piso de la habitación en forma algebraica.

$$\frac{16}{16} = \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$$

Figura 7. Error R4 cometido por el estudiante 1

En el error del tipo R4 se pueden incluir los errores cometidos por los estudiantes 1, 2 y 9, que resolvieron operaciones algebraicas incorrectas entre elementos singulares. En la Figura 8 se observa cómo el estudiante 2 resta variables de distintas potencias utilizando el signo de suma. Este estudiante además de cometer un error del tipo R4 está cometiendo un error del tipo R1, ya que presenta dificultades al trabajar con el lenguaje algebraico.

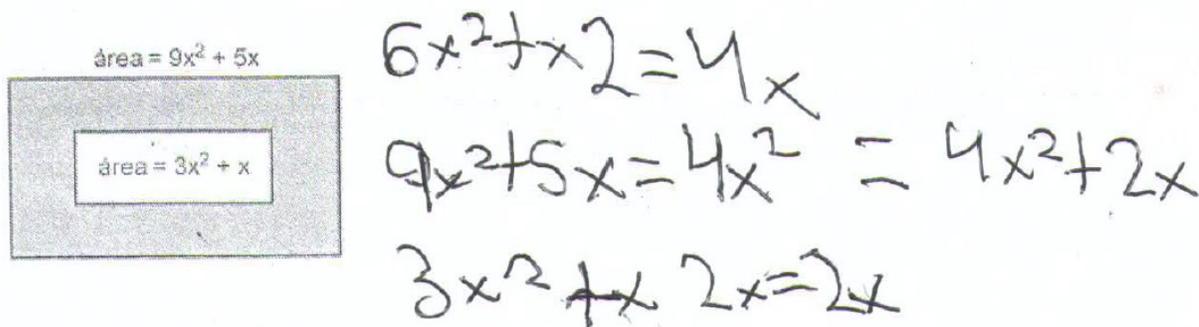


Figura 8. Errores R4 y R1 cometidos por el estudiante 2

4. Discusión

Los errores identificados en las producciones de los estudiantes, dan evidencia de que la concepción que predomina en los estudiantes al momento de resolverlos es el de ecuación y no así el de expresión algebraica. Esto podría ser una causa de las dificultades presentadas para resolver los problemas planteados. Lo anterior, podría estar asociado a los significados que le dan los estudiantes a las literales, como se hace notorio en otras investigaciones como Bolaños-Barquero y Segovia (2021) y Bolaños-González y Lupiañez-Gómez (2021). O bien, podrían estar relacionadas a las dificultades asociados a la noción de variable y sus tres usos expuestos en Ursini y Triguero (2006).

Además, es relevante comentar que el único ítem que obtuvo respuestas correctas es el ítem de opción múltiple. Lo anterior, parece relevante, considerando que es posible que los resultados de exámenes estandarizados, tal vez den evidencia de un aprendizaje que podría tener diferencias con lo que ocurre realmente.

5. Conclusiones

Con base en los resultados, se logró identificar y clasificar los errores más comunes cometidos por los alumnos de un grupo de tercero de secundaria al resolver un instrumento basado en 5 ítems algebraicos tomados de PLANEA (2016). Donde se pide que los estudiantes realicen conversiones de una representación geométrica a una algebraica. En este caso, los errores más frecuentes al resolver el instrumento fueron: los errores M1, M2 de las categorías establecidas en Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) y el error R3 de la propuesta de Radatz (1980). Como se menciona en Franchi y Hernández (2003), la ventaja de conocer el tipo de error que cometen los alumnos permite al docente seleccionar las estrategias que faciliten la superación de los errores por parte de sus estudiantes mediante la adquisición de un nuevo conocimiento. Para ello es necesario que los profesores reconozcan que los errores son parte coherente de un proceso que ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores. Esta investigación nos permitió identificar algunos elementos que podrían estar incidiendo en la prueba PLANEA; sin embargo, se considera necesario que para futuras implementaciones del instrumento se incluya además una entrevista semiestructurada que permitirá enriquecer los análisis realizados en esta aplicación.

Clasificación de errores en las producciones de estudiantes de secundaria en ítems de álgebra en el examen PLANEA

6. Referencias

- Bocco, M. y Canter, C. (2010). Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana de educación*, 53 (2), pp. 1–13. <https://doi.org/10.35362/rie5321742>
- Bolaños-Barquero, M. y Segovia, I. (2021). Sentido estructural de los estudiantes de primer curso universitario, *Uniciencia*, 35 (1), 152–168. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.10>
- Bolaños-González, H. y Lupiañez-Gómez, J. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario, *Uniciencia*, 35(1), 1–18. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.1>
- Duval, R (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Eccius-Wellmann, C. y Ibarra-González, K. P. (2020). Dependencia de la calificación de una evaluación diagnóstica en matemáticas con aspectos afectivos por la comisión de errores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34, 544–563.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 23 (6), 23–32. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/23134/1/Engler2004Los.pdf>
- Franchi, L. y Hernández, A. (2003). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educare*, 8 (24), 63–71. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/356/35602411.pdf>
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. De C.V.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3–14. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.18.1.0003>
- Plan Nacional de Evaluación del Aprendizaje (PLANEA). (2018). Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/>
- Quezada, V. D. y Letelier, Á. P. (2020). Competencias matemáticas: Desempeño y errores en la resolución de problemas de límites. *Paradigma*, 40(1), 358–383.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16–20. Recuperado de <https://www.jstor.org/stable/40247696>

- Ramírez-Uclés, R., Flores Martínez, P. y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 29–56.
- Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, J. Kilpatrick y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69–108). Colombia: Una empresa Docente. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF>
- Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5–38. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol18/3/vol18-3-03_REM_18-1.pdf