La educación inclusiva y las otras formas de producción de conocimiento matemático. Un ejemplo de deconstrucción de la curva parábola a partir de la propiedad geométrica de acumular y usando los saberes cotidianos: contar y medir los cuadros de un papel cuadriculado

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Mario Adalberto García García

prof.mariogarcia@gmail.com

Centro de Formación Docente e Investigación Educativa CRESUR

Programa de Doctorado en Educación Inclusiva

México

Recibido: *20* de mayo de 2023

Aceptado: *28* de junio de 2023

Autor de Correspondencia:
Mario Adalberto García García

Resumen. Este trabajo forma parte de los esfuerzos de la educación inclusiva como un proyecto que supone la necesidad de modificar el sistema educativo para garantizar el acceso y la calidad de la educación. Esto implica aceptar que existen barreras físicas y sociales que pueden eliminarse al reconocer la validez de otras formas de pensamiento que alteran los modos cotidianos de enseñar y aprender matemáticas. En específico, se muestra un ejemplo de deconstrucción de la curva parábola. Para ello, se usó la metodología de investigación acción participativa con estudiantes de entre 16-19 años en un curso de geometría analítica. Mediante procesos interculturales estudiante-docente se descubrieron los saberes cotidianos: contar y medir los cuadros de una hoja de papel cuadriculado, y que, junto con la propiedad de acumulación que exhibe el rectángulo base de la parábola, posibilitaron proyectar y poner en marcha un diseño didáctico para la construcción gráfica de funciones cuadráticas.

Palabras clave: Deconstrucción del conocimiento matemático, Educación inclusiva, Investigación-Acción participativa, Parábola, Saberes cotidianos.

Abstract. This work is part of the efforts of inclusive education as a project that implies the need to modify the educational system to guarantee access and quality of education. This implies accepting that there are physical and social barriers that can be removed by recognizing the validity of other ways of thinking that alter the everyday ways of teaching and learning mathematics. Specifically, an example of deconstruction of the parabola curve is shown. For this, the participatory action research methodology was used with students between 16-19 years of age in an analytical geometry course. Through intercultural student-teacher processes, daily knowledge was discovered: counting and measuring the squares on a sheet of graph paper, and that, together with the accumulation property exhibited by the base rectangle of the parabola, made it possible to project and implement a design didactic for the graphical construction of quadratic functions.

Keywords: Deconstruction of mathematical knowledge, Inclusive education, Participatory Research-Action, Parable, Everyday knowledge.

1. Introducción

Para las sociedades actuales, las matemáticas y su enseñanza han logrado un lugar importante, sin embargo, por alguna razón estas estructuras occidentales se han tornado inflexibles y excluyentes.

Estas matemáticas se caracterizan por epistemologías eurocéntricas que generan racismo epistémico (Walsh, 2010) e inequidad cuando son usadas como un tamiz clasista que distribuye las maneras en las que se accede a la educación superior en México.

Esto abona en explicar la apuesta de los estudiantes por carreras sin relación alguna con ingenierías o ciencias, adicionando a ello experiencias en las cuales la atención escolar está en mostrar fórmulas y procedimientos.

Estas formas de enseñar matemáticas, al parecer están institucionalizadas de alguna manera en epistemologías que, históricamente, han demostrado su uso concreto a problemas especializados y alejados de las realidades socioculturales y espaciotemporales del estudiante.

Como parte de los esfuerzos de la educación inclusiva, en primer lugar, reconocemos la existencia de mecanismos que permiten la aleación y operación de injusticia, desigualdad, violencia estructural, exclusión, opresión y dominación en el sistema educativo.

En segundo lugar, y como una respuesta a lo anterior, intentamos aportar nuevas perspectivas al entendimiento de las matemáticas y su enseñanza, abriendo paso a formas adicionales, plurales y diversas de pensamiento matemático por las y los otros, como una forma de resistencia crítica y con el objetivo de edificar una educación de calidad.

Por tanto, y como respuesta a lo anterior, la educación inclusiva intenta asegurar esta calidad, suponiendo la necesidad de modificar el sistema educativo para responder a todos los estudiantes, y no aceptar que son los estudiantes quienes deben adaptarse al sistema educativo.

Para ello, es necesario identificar, reducir y en el mejor de los casos quitar las barreras que impiden el aprendizaje y la participación, así como, evitar entender el currículo como la posibilidad de que cada alumno aprenda cosas diferentes, sino más bien que las aprenda de diferente manera (De la Puente, 2009)

Necesitamos pensar sistemas no alternativos sino alterativos de la producción social educativa y en esto entonces sostendremos que la inclusión es un poderoso tropos de imaginación epistémica y política que desafía al mundo y los procesos de escolarización (Centro de estudios CELEI, 2021, 33m18s)

Continuando con este hilo conductor, concordamos con Ocampo-González (2022) cuando dice que la educación inclusiva permite mirar la producción de nuevos conocimientos y ángulos de visión, puestos en un proyecto político en el cual convergen diversas posturas críticas, teóricas y políticas.

Así también, cuando afirma que la educación inclusiva trabaja incesantemente en la producción de otros mundos y otras formas de conocimiento rastreando formas de desestabilización del logos y, con ello, la producción de subjetividades.

Por estas razones, es que el planteamiento central de esta perspectiva y de este trabajo, se halla en descubrir y mostrar otras formas de construir conocimiento desde los saberes que los estudiantes exhiben cuando hacen matemáticas en sus diversos contextos, para así intentar evitar, mitigar o en el mejor de los casos eliminar estas barreras, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para ello, proponemos la deconstrucción del conocimiento institucionalizado con base en los saberes que el estudiante usa cuando aprende, lo cual permite ofrecer otros diseños didácticos que alteran las formas tradicionales de enseñanza y aprendizaje institucionalizadas por la escuela.

Estas otras formas variadas y diversas, tiene su génesis en los procesos interculturales, de diálogo, desde donde todas y todos participamos para construir conocimiento de acuerdo con el contexto sociocultural y espaciotemporal en el cual nos desenvolvemos.

Lo anterior será evidencia de que los saberes humanos elementales con los cuales convivimos cotidianamente son los enlaces básicos que permiten el diálogo entre las culturas y sus conocimientos y por tanto son las directrices de transmisión, construcción y divulgación.

2. Antecedentes, la parábola y su rectángulo base

En particular, en este trabajo se muestra un ejemplo en el cual, el objeto matemático parábola, que se refinó en el tiempo para institucionalizarse en la escuela, con formas de enseñanza y aprendizaje bien definidos, puede ser deconstruido mediante su adecuación a las condiciones socioculturales y espaciotemporales y desde la mirada del individuo que aprende, más que la mirada del positivista que los impone.

En específico, la deconstrucción que se propone usa los saberes cotidianos: contar y medir los cuadros de una cuadrícula de papel y una propiedad geométrica de la parábola relacionada con acumular los cuadros de la cuadrícula.

Esta es una consecuencia de la situación didáctica que propone García García (2021) para un curso de precálculo, y está diseñada para estudiantes entre 16 y 20 años.

En esta situación didáctica se describen tres momentos; en el primero de ellos que se observa en la Figura 1, se construyen parábolas mediante doblado de papel albanene (locus), explorando la relación numérica entre el foco y la directriz, la cual adquiere el nombre de *unidad mínima de construcción* (umc) simbolizada con *p*.

Figura 1. Momento 1, construcción de un locus de la parábola y determinación de la unidad mínima de construcción (p). García García (2021, p. 427).

En el momento dos se construye con regla y compás el rectángulo base que contiene los puntos: foco, vértice, extremos del ancho focal y la recta directriz para posteriormente por medición directa establecer las relaciones numéricas y geométricas que más adelante se solidifican en una función algebraica. La Figura 2 muestra este proceso.

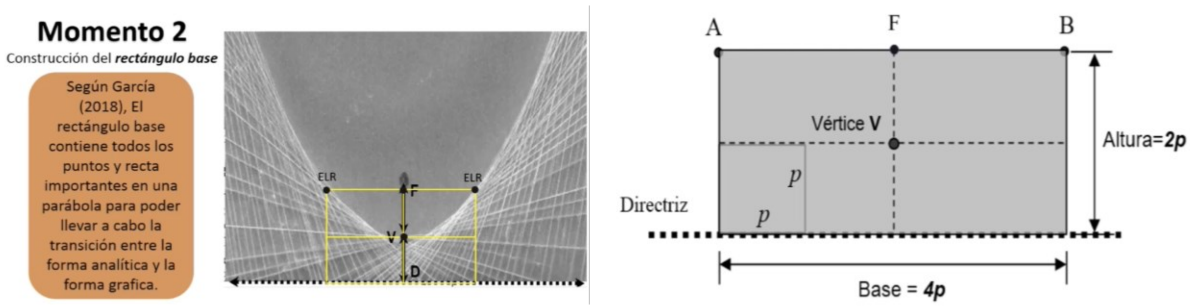


Figura 2. Momento 2, Construcción del rectángulo base y determinación del parámetro p. García García (2021, p. 429).

Finalmente, en el momento tres, que se observa en la Figura 3, el estudiante pone en juego los elementos señalados antes para establecer una primera aproximación al concepto de parábola como lugar geométrico, para lo cual elige puntos sobre la curva y establece conjeturas numéricas que madurarán para convertirse en propiedades que se pueden expresar de forma algebraica.

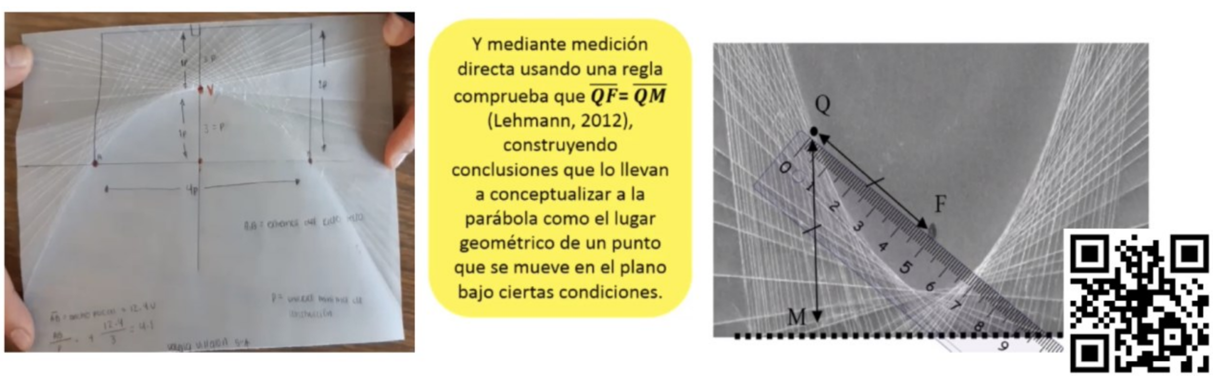


Figura 3. Momento 3, idea intuitiva de la parábola como lugar geométrico. García García (2021).

3. Metodología

La investigación acción participativa de Fals Borda (Sandoval, 2018), es una metodología descolonizadora que permite conocer la forma en que las culturas específicas y comunidades construyen y usan el conocimiento.

La idea principal está puesta en un observador sensible que es parte de una comunidad horizontal intercultural que aprende y promueve la transformación, reflexión propia y también la de la comunidad humana en la que se desenvuelve.

En el aula, esta metodología provee de capacidad al investigador de ser testigo y al mismo tiempo convertirlo en participante activo. De este modo se hace visible lo invisibilizado por el racismo epistémico que hegemónicamente ha impuesto formas específicas y controladas de pensamiento.

El objetivo principal de esta metodología es incitar a la transformación del grupo social desde un semillero fértil que descoloniza hasta la apertura de otras líneas de producción de conocimiento que se desarrollarán hacia la cimentación y plenitud de una ecología de saberes.

En un curso de Geometría Analítica para estudiantes entre 16 y 17 años en el nivel medio superior en México, al tratar conceptos como la distancia entre dos puntos y el concepto de pendiente, los cuales están programados para desarrollarse en 2 clases de 50 minutos para cada uno de los conceptos.

El docente-investigador, como parte de esta comunidad intercultural, mediante la técnica de observación participante no informada (Sandoval, 2018), advirtió que el contexto forma parte de los aprendizajes, de tal manera que los estudiantes usaban como apoyo la cuadrícula de sus cuadernos para establecer relaciones geométricas y numéricas.

En la Figura 4, se observa que con el apoyo de una hoja de papel cuadriculado que simula un plano coordenado en R^2, el estudiante "*entriángula*" o "*enrectángula*" el segmento AB.

Posteriormente, mediante el conteo de los cuadros de la base y los cuadros de la altura de este triángulo rectángulo auxiliar, traspasa esta imagen del pizarrón hacia su cuaderno cuidando la proporción del objeto mediante la confirmación de una escala para asegurar que todos los cuadros en esta retícula tienen la misma dimensión.

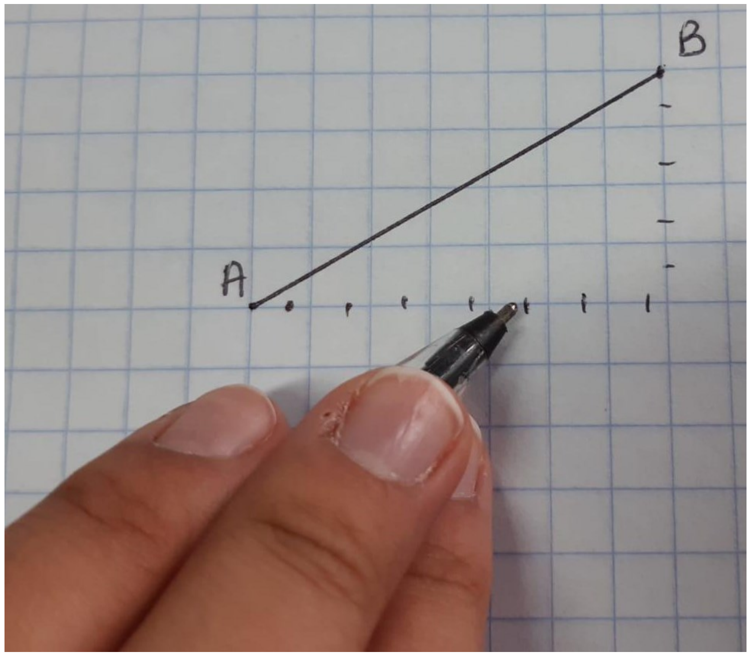
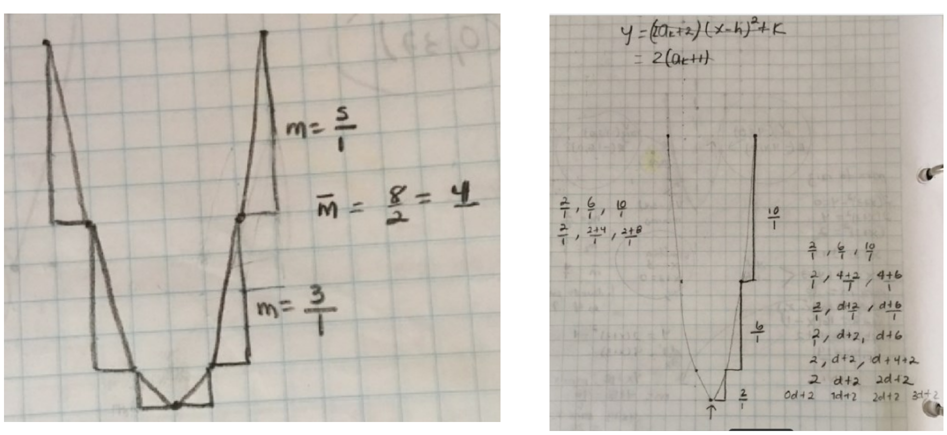


Figura 4. Estudiante "Entriángulando" un segmento de recta para traspasarlo del pizarrón hacia su cuaderno mediante el conteo de los cuadros de la cuadrícula del papel. Elaboración propia.

La gran mayoría de los estudiantes se concentraban en aprender a usar las fórmulas tradicionales para determinar la distancia entre dos puntos o la pendiente, pero también fijaban su atención en contar y medir estos cuadros que contienen al segmento de recta.

Posteriormente, el docente-investigador durante dos cursos seguidos entre el año 2018 y 2019, noto que era posible ligar estos dos saberes con la lectura de los parámetros de la función algebraica y de esta manera construir la representación gráfica de la función cuadrática en papel cuadriculado.

El proceso reflexivo, así como el historial de evidencias se llevó a cabo en un cuaderno de trabajo con hojas cuadriculadas, que se muestra en la Figura 5, posteriormente esto devino en la deconstrucción de la curva parábola.



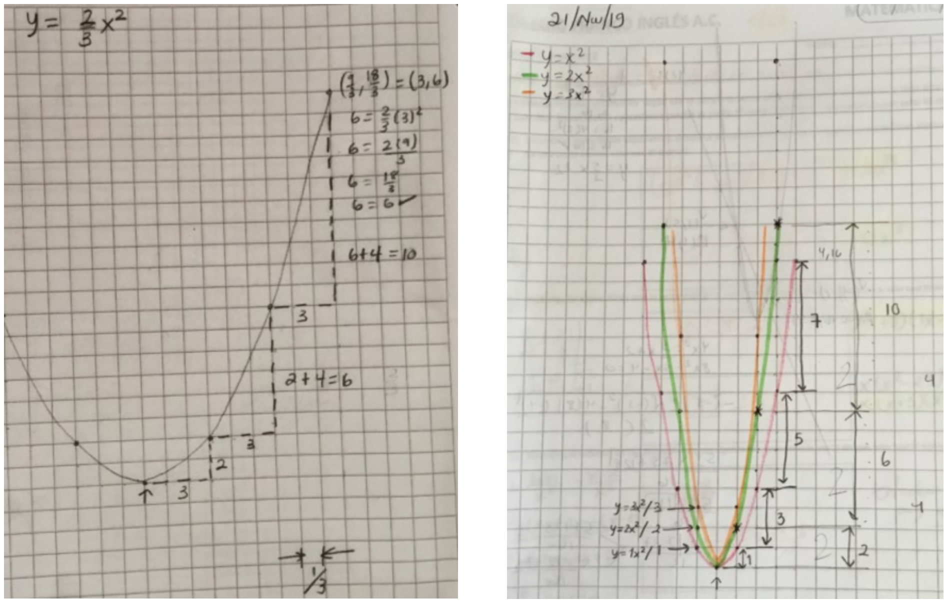


Figura 5. Cuaderno de trabajo de docente-investigador. Se observan los primeros bosquejos de la deconstrucción de la curva parábola usando los saberes contar y medir los cuadros de la cuadrícula del papel y su relación con los parámetros de la función analítica. Elaboración propia.

Todo lo anterior fue el detonante para repensar y proponer una deconstrucción de la representación gráfica de la función cuadrática usando estos dos saberes: contar y medir los cuadros de la cuadrícula más una propiedad geométrica que la parábola exhibe cuando se analiza a detalle el rectángulo base que contiene a los puntos y la recta importantes de la parábola según García García (2021).

A continuación, describimos en primer lugar, la forma en que el estudiante usa el saber medir para establecer una escala en el papel cuadriculado. En segundo lugar, explicamos mediante el saber contar, cómo se lleva a cabo la determinación de la pendiente de un segmento de recta y de esta manera establecer una medida de crecimiento.

En tercer lugar, exhibimos la propiedad geométrica de acumular cuadros que se observa cuando se analiza a detalle el rectángulo base en la parábola.

Finalmente, mediante la interacción de estos dos saberes y de la propiedad de acumulación, proponemos una forma diferente para construir la representación gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, con el apoyo de la cuadrícula del papel.

3.1 La noción de medida establecida como escala en la cuadrícula

La parte que corresponde al establecimiento del saber medir se observa cuando el estudiante afirma que una fracción puede representarse en la cuadrícula del papel, asumiendo un tamaño constante para cada uno de los cuadros que la componen.

Por ejemplo, en la fracción $\frac{5}{7}$, la escala de la retícula es de $\frac{1}{7}$ y la representación es iluminar 5 cuadros como se aprecia en la Figura 6.

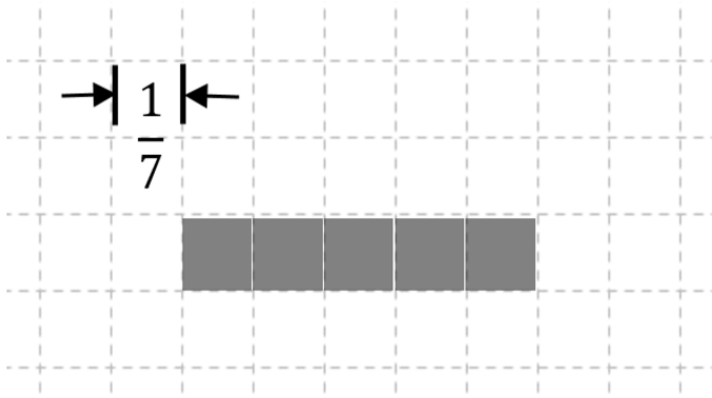


Figura 6. Estudiante estableciendo una medida constante de $\frac{1}{7}$ para cada cuadro del papelcuadriculado. La representación de $\frac{5}{7}$ corresponde a iluminar 5 cuadros en esta escala. Elaboración propia.

Siguiendo este procedimiento, en términos generales, para la fracción $\frac{a}{b}$ que puede escribirse como $\frac{1a}{b}$, donde $\frac{1}{b}$ es la medida constante de la escala en la retícula y a representa los cuadros que deben iluminarse para obtener el significado correspondiente.

Este proceso básico de contar los cuadros junto con el establecimiento de una medida en forma de una escala serán los detonantes para proveer al concepto de pendiente la capacidad para expresar movimiento y por tanto establecer relaciones geométricas y numéricas que pronto se convertirán en patrones algebraicos.

3.2 La noción de movimiento anidada en el concepto de pendiente

La pendiente de un segmento AB es un cociente que se escribe como $\frac{crecimiento\ y}{crecimiento\ x}$, por ejemplo, la pendiente $m = \frac{2}{3}$, desde la perspectiva de establecer una medida y después contar cuadros, tiene como representación gráfica en un papel cuadriculado de una unidad por lado, la serie de puntos en los que la instrucción de movimiento es: ir tres cuadros a la derecha y después subir 2 cuadros como se ve en la Figura 7.

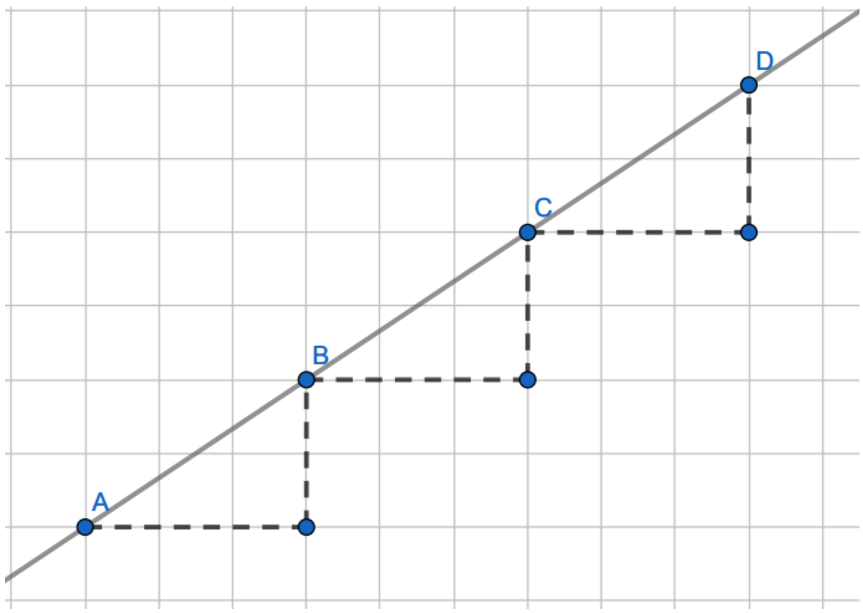


Figura 7. Puntos que se mueven con instrucción de crecimiento $m = \frac{2}{3}$. Representación obtenida mediante GeoGebra. Elaboración propia

La pendiente $m = -\frac{5}{4}$, puede concebirse como una instrucción de movimiento que implica ir 4 cuadros a la derecha y después bajar 5 cuadros $\left(m = \frac{-5}{4}\right)$ o ir 4 cuadros a la izquierda y después subir 5 cuadros $\left(m = \frac{5}{-4}\right)$, como se observa en la Figura 8.

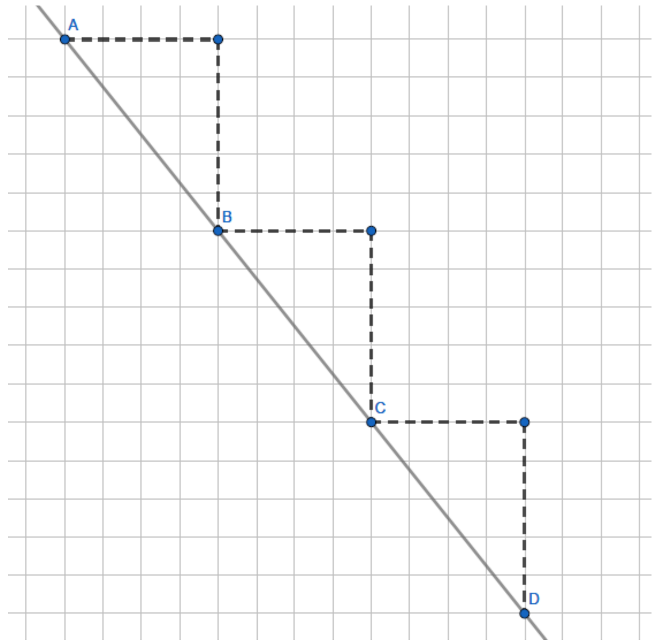


Figura 8. Puntos que se mueven con instrucción de crecimiento $m = -\frac{5}{4}$. Representación obtenida mediante GeoGebra. Elaboración propia

De esta manera, se muestra como la pendiente de un segmento desde esta perspectiva se deconstruye para pasar de un resultado numérico producto de una fórmula a un proceso más amplio que permite definirla como una instrucción que cuantifica el crecimiento a partir de visualizar el movimiento de un punto en la cuadrícula del papel.

Así es como esta perspectiva amplifica el panorama y las posibles formas de construcción de conocimiento matemático mediante el análisis y uso crítico de los saberes sociales que intervienen en el entorno inmediato con el cual convive el estudiante, para así ofrecer explicación a fenómenos cotidianos del entorno inmediato.

4. Ejemplo de un diseño desde la mirada de la educación inclusiva para la deconstrucción de la parábola a partir de los saberes: contar, medir y usando la propiedad geométrica de acumular cuadros de la cuadrícula del papel

Con base en lo antes expuesto, nos hemos permitido imaginar otros caminos iluminados por estas otras formas de pensar (Fornet-Betancourt, 2004) para deconstruir a la curva parábola mediante el uso de los saberes: contar los cuadros y establecer una medida constante mediante el concepto de escala en una cuadrícula de papel.

Añadido a esto, es posible observar una propiedad geométrica de la parábola definida a través de un proceso de acumulación que se manifiesta cuando se concentran los puntos y rectas importantes de la parábola en un rectángulo base de acuerdo con la siguiente situación:

> Una curva escrita en la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, con h, k perteneciente a los números reales, puede representarse geométricamente mediante la determinación de la unidad mínima de construcción p y la posterior construcción de su rectángulo base ABDE que posee las siguientes características y se observa en la Figura 9:
>
> La base es de 4p unidades y la altura es 2p unidades. El vértice de la parábola se encuentra en la intersección de las mediatrices de la base y la altura del rectángulo. La base inferior de este rectángulo es la directriz y los puntos A y B son los extremos del lado recto, la distancia AB=|4p| es el ancho focal de la parábola y en el rectángulo base caben 8 cuadrados de lado p. El punto medio del segmento AB es el foco F. [García García, 2021, pp. 425-430]

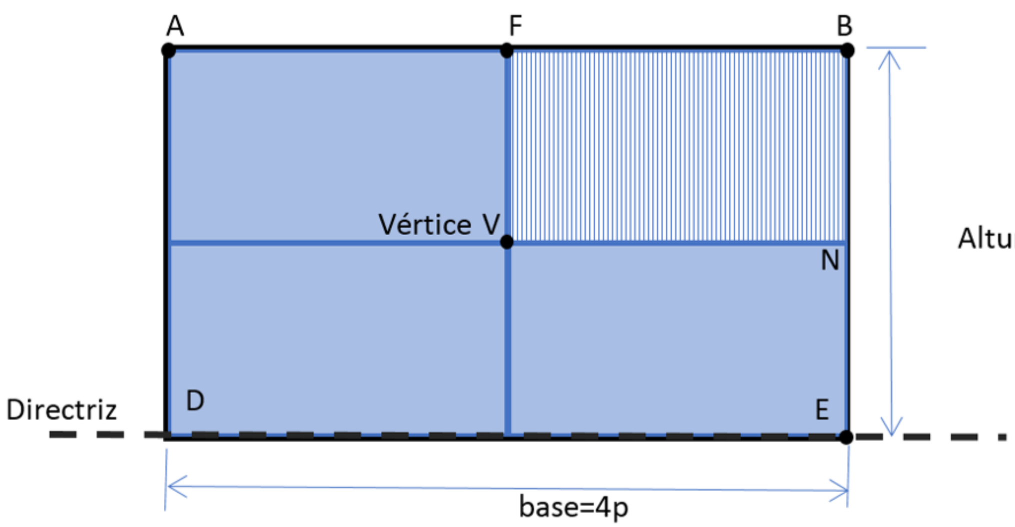


Figura 9. Rectángulo base de una parábola construida a partir de la unidad mínima de construcción p. El rectángulo base permite exhibir relaciones geométricas y numéricas características para cada parábola particular. García García (2021, p 429).

Cuando se toma una cuarta parte de este rectángulo base FVNB que tiene *2p* unidades en la base y *1p* unidad en la altura y se acumula en la secuencia: 1 rectángulo, 3 rectángulos, 5 rectángulos, 7 rectángulos, este proceso infinito mantiene una relación con el crecimiento de la parábola de tal manera que los puntos *C, H, K, N*, … pertenecen tanto a la acumulación de estos rectángulos y a la parábola.

La Figura 10, permite ver esta relación entre el crecimiento de la curva parábola $y = 2x^2 - 6x + 9$ y la acumulación de la porción de su rectángulo base.

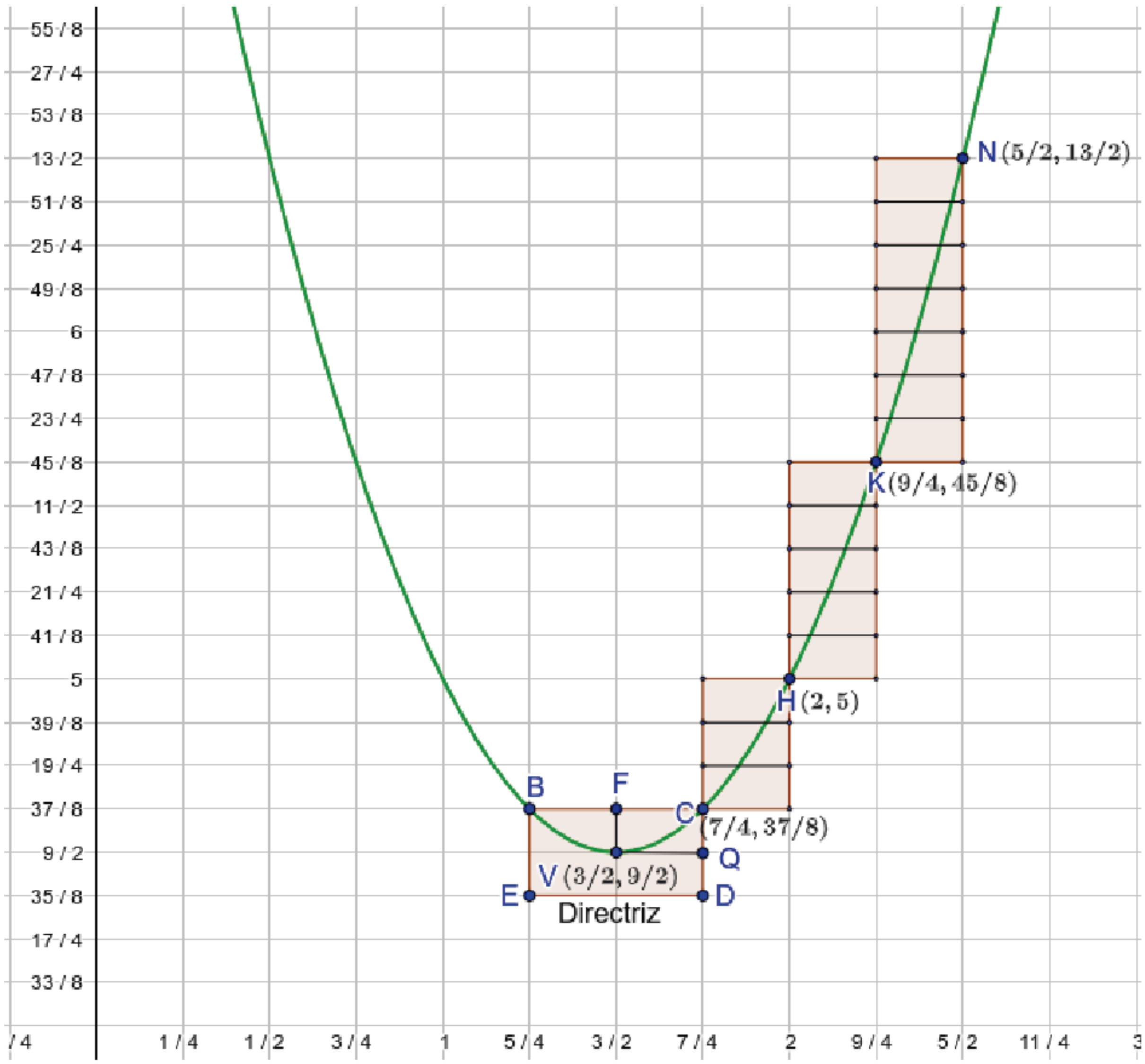


Figura 10. Secuencia de acumulación del rectángulo FVCQ que es una cuarta parte del rectángulo base BCED y su relación con el crecimiento de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 9$. Representación obtenida mediante GeoGebra. Elaboración propia.

Esta misma propiedad de acumulación puede sustentarse en la representación gráfica de la función primitiva $y = 1x^2$, que tiene su vértice en el origen. Dentro de una retícula que tiene por escala 1 unidad por lado de los cuadros que la conforman, es posible destacar un *patrón en términos de las pendientes* que se da cuando la curva pasa por los puntos OABC como se observa en la Figura 11.

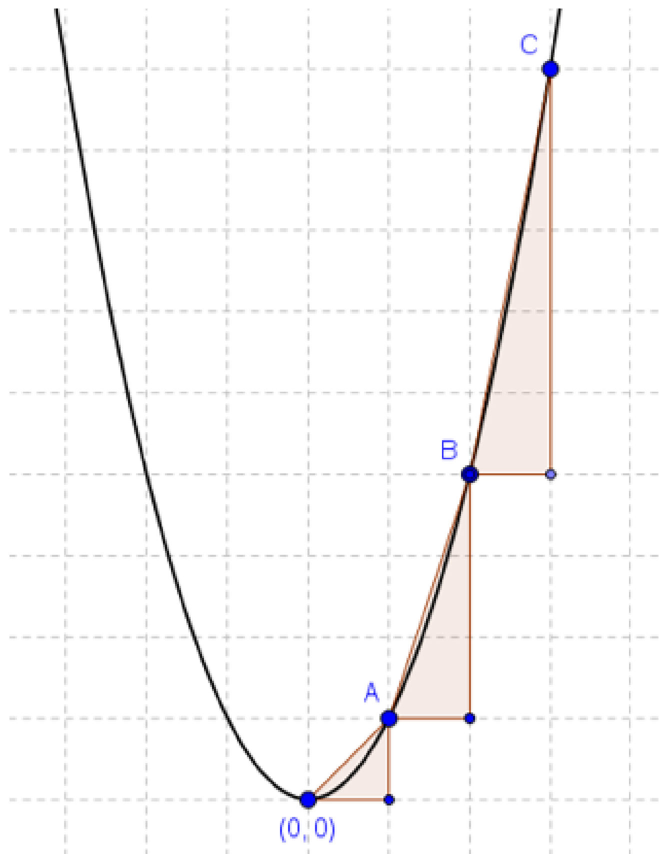


Figura 11. La parábola primitiva $y = x^2$, Inmersa en una cuadrícula de una unidad por lado permite establecer un patrón de acumulación, Esta propiedad permite interpretar a la pendiente como una instrucción de crecimiento. Representación obtenida mediante GeoGebra. Elaboración propia.

Con base en esta gráfica es posible destacar una progresión aritmética que se forma por los términos 1,3,5,7, … conclusión que emana del análisis de la pendiente de esta curva asumiendo a esta como una instrucción de crecimiento y de la cual podemos establecer lo siguiente:

Para ir del punto **O** al punto **A**, la pendiente es: $m_{OA} = \frac{1}{1}$; que significa ir uno a la derecha y subir uno.

Para ir del punto **A** al punto **B**, la pendiente es: $m_{AB} = \frac{3}{1} = \frac{1}{1} + 2$; que significa ir uno a la derecha y subir 3.

Para ir del punto **B** al punto **C**, la pendiente es:$m_{AB} = \frac{5}{1} = \frac{3}{1} + 2$; que significa ir uno a la derecha y subir 5

En términos generales según la Figura 11, podemos establecer la siguiente progresión creciente:

$$m_1 = 1m_1$$

$$m_2 = 3m_1$$

$$m_3 = 5m_1$$

$$m_4 = 7m_1$$

$$m_5 = 9m_1$$

.

.

.

$$m_n = (2n-1)m_1, \text{ para } n \geq 1$$

El total de rectángulos que se acumulan en esta progresión creciente con $t > v$, es:

$$S_n = \frac{(m_t + m_v)n}{2}$$

Por ejemplo, el total de rectángulos acumulados hasta el tercer escalón es:

$S_3 = \frac{(5+1)*3}{2}$ = 9 rectángulos.

Y para el cuarto escalón es:

$S_4 = \frac{(7+1)*4}{2}$ = 16 rectángulos

En general, podemos decir que para una función de segundo grado del tipo $y = ax^2 + bx + c$, su transformación mediante completar trinomio cuadrado perfecto es:

$$y - \frac{h}{i} = \frac{d}{e}\left(x - \frac{f}{i}\right)^2$$

El parámetro $+\frac{h}{i}$, permite conocer el valor de la escala en la cual vive y se desarrolla esta curva, en este caso en particular, cada cuadro del papel tiene una medida de $\frac{1}{i}$, de tal manera que las coordenadas del vértice de esta parábola están colocadas en las coordenadas cartesianas V$\left(\frac{f}{i},\frac{h}{i}\right)$ y a partir de este punto y mediante la lectura de la pendiente $\frac{d}{e}$, deben contarse en eje x positivo como en el negativo e unidades con base en la escala i para después subir o bajar según el signo de la pendiente $\frac{d}{e}$, d unidades en la escala i. Este será el primer escalón en la construcción de la función cuadrática.

El patrón de acumulación la progresión aritmética correspondiente será;

Primer escalón:	$\frac{d}{e}$
Segundo escalón:	$\frac{d}{e}(2(2)-1)=3\frac{d}{e}$
Tercer escalón:	$\frac{d}{e}(2(3)-1)=5\frac{d}{e}$
Cuarto escalón:	$\frac{d}{e}(2(4)-1)=7\frac{d}{e}$
Quinto escalón:	$\frac{d}{e}(2(5)-1)=9\frac{d}{e}$

Lo cual resulta en un proceso cómodo que permite la construcción de la curva desde la consolidación de la pendiente como una instrucción de crecimiento que exhibe patrones geométricos para después transitar hacia la forma numérica y finalmente la regla algebraica.

5. Experiencia en el aula desde la perspectiva de los otros saberes para la construcción de la curva parábola usando los saberes: contar, medir y la propiedad de acumular

El diseño didáctico que se propone a continuación tiene su fundamento en estos otros saberes que permiten la construcción de la representación gráfica de la función analítica de una parábola y se forma por dos momentos que se describen a continuación tomando como ejemplo la función:

$$y = 2x^2 - 6x + 9$$

El primer momento es la determinación del vértice de la parábola para lo cual la articulación de los saberes medir y contar los cuadros permiten establecer en primer lugar la escala de la retícula en la cual posteriormente se llevará a cabo el proceso de conteo de cuadros. De esta manera, en la estructura algebraica transformada, se tiene:

$$y - \frac{9}{2} = \frac{2}{1}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Cada uno de los cuadros que componen la cuadrícula de la retícula es de $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{9}{2}$ y $\frac{3}{2}$ se puede escribir como $\frac{1*9}{2}$ y $\frac{1*3}{2}$, evidencia de la práctica de medir expresada como la necesidad de acentuar una escala en la retícula, por lo tanto, para encontrar el vértice de la parábola será contar 9 cuadros hacia arriba desde el origen O, es decir, subir $\frac{9}{2}$ y después ir a la derecha 3 cuadros para hallar el punto A $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$ como se muestra en la Figura 12.

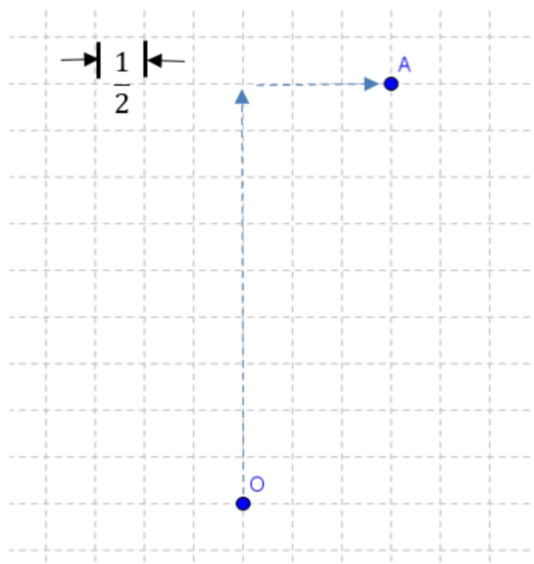


Figura 12. Establecimiento del vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 9$, mediante la lectura de los parámetros en la forma transformada $y - \frac{9}{2} = \frac{2}{1}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ usando las prácticas de contar cuadros y medir al establecer una escala. Representación obtenida mediante GeoGebra. Elaboración propia.

El segundo momento corresponde a dar significado a la pendiente como una instrucción de crecimiento de la parábola y relacionarlo con la progresión aritmética que describe el comportamiento de acumulación, para este caso con $m = \frac{2}{1}$. La Tabla 1, proporciona este proceso:

Tabla 1. Proceso de acumulación de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 9$, según el patrón 1,3,5,7... y su significado con respecto a la escala de ½. Elaboración propia.

			Transformación para la representación en la escala de ½
Primer escalón:	$\frac{2}{1}$	$1*\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{2}{1}$	$\frac{4}{2}$
Segundo escalón:	$\frac{d}{e}(2(2)-1)= 3\,\frac{d}{e}$	$3*\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{6}{1}$	$\frac{12}{2}$
Tercer escalón:	$\frac{d}{e}(2(3)-1)= 5\,\frac{d}{e}$	$5*\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{10}{1}$	$\frac{20}{2}$
Cuarto escalón:	$\frac{d}{e}(2(4)-1)= 7\,\frac{d}{e}$	$7*\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{14}{1}$	$\frac{28}{2}$
Quinto escalón:	$\frac{d}{e}(2(5)-1)= 9\,\frac{d}{e}$	$9*\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{18}{1}$	$\frac{36}{2}$

Es decir, el significado del primer escalón según la Tabla 1 es: en la escala de la cuadrícula que mide $\frac{1}{2}$, a partir del origen A $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$ Deben contarse dos cuadros a la derecha y dos cuadros a la izquierda (denominador), para después subir 4 cuadros (numerador), y así encontrar los puntos C y B. Esta representación queda plasmada en la Figura 13.

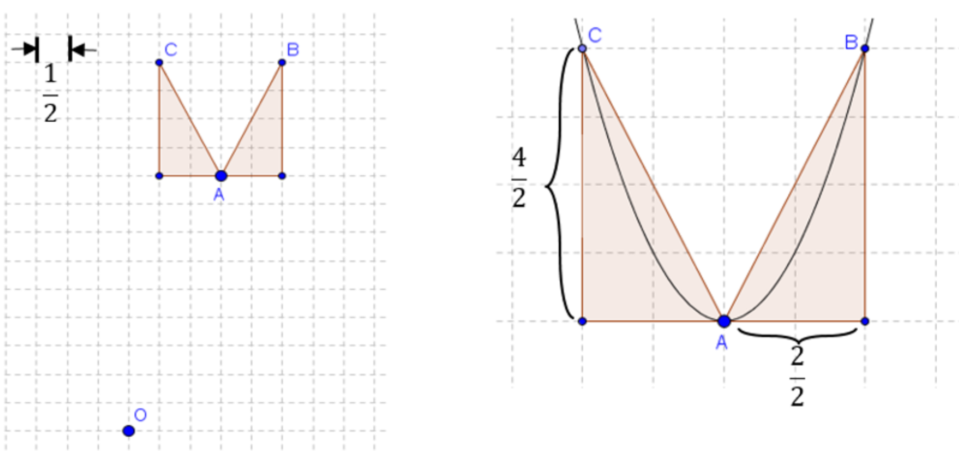


Figura 13. Muestra los movimientos que deben llevarse a cabo desde el vértice A para encontrar los puntos C y B como consecuencia de dar significado a la pendiente de la parábola. Representación obtenida mediante GeoGebra. Elaboración propia.

Siguiendo el hilo constructor que se presenta en la Tabla 1, el segundo escalón estará definido por la pendiente $\frac{12}{2}$, lo que significa que deben contarse 2 cuadros a la derecha del punto B y dos cuadros a la izquierda del punto C (denominador), para después subir 12 cuadros (numerador) y así hallar los puntos G e I como se observa en la Figura 14.

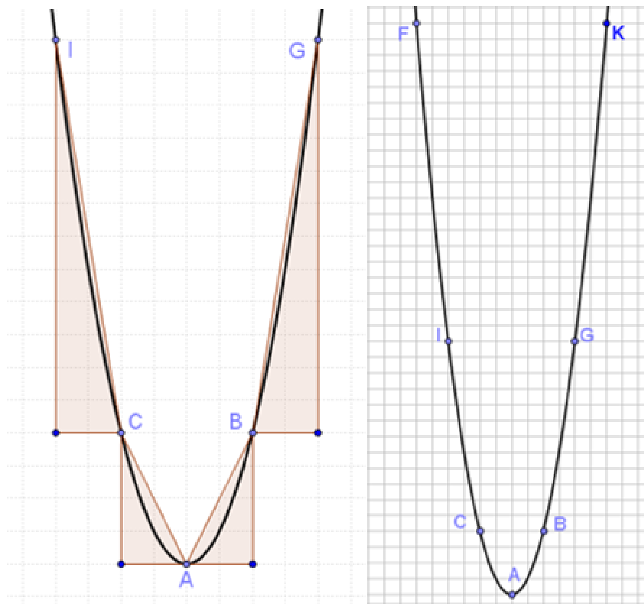


Figura 14. Izquierdo, patrón de crecimiento de la parábola según la propiedad geométrica de acumular expresado con la progresión aritmética $m_n = (2n-1)m_1$. Derecho, representación de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 9$, realizada mediante GeoGebra con una escala de ½ para cada uno de los cuadros que componen la cuadrícula. Elaboración propia.

A partir de este momento, el crecimiento sucesivo de la curva descrita por esta progresión aritmética y los saberes de contar y medir permitirán establecer una relación exacta entre la acumulación y la intersección de la parábola con la cuadrícula haciendo muy útil este proceso para construir parábolas con precisión y así explorar diversas situaciones visuales que regularmente se trabajan de forma algebraica.

En las Figuras 15 y 16, se muestran ejemplos de parábolas construidas por estudiantes entre 16 y 17 años durante un curso de geometría analítica en el nivel medio superior en México, usando la articulación que se propone.

El proceso se llevó a cabo durante 6 sesiones de 50 minutos cada una y se dividió en 3 partes: introducción, desarrollo y cierre. En la Tabla 2, se muestra la planeación usada para la construcción de esta representación gráfica de funciones cuadráticas.

Tabla 2. Se muestra la planeación en clase para la construcción de la representación gráfica de funciones cuadráticas, usando los saberes: contar y medir, así como la propiedad de acumulación de la parábola. Elaboración propia.

Sesión	***Actividad***
Introducción	
1	Construcción de una parábola y la determinación del rectángulo base según el diseño propuesto por García García (2021). Con ayuda de alguna herramienta tecnológica se muestra a los estudiantes la secuencia de acumulación del rectángulo base y su relación con el crecimiento de la parábola. En plenaria se discuten dudas, así como ideas al respecto y se plasman conclusiones.
2	Se explica a los estudiantes los saberes: contar y medir y su relación con los cuadros de la cuadrícula del papel. Así también se expone el mecanismo para expresar fracciones y la determinación de la pendiente de un segmento de recta. Se recuerda como situar el vértice de la parábola: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, y se llama a este punto vértice como punto constructor. En plenaria se discuten dudas, así como ideas al respecto y se plasman conclusiones.
3	Se expone a los estudiantes la relación entre estos saberes y los parámetros de la función: $y - \frac{h}{i} = \frac{d}{e}\left(x - \frac{f}{i}\right)^2$, y se muestra la construcción mediante el uso de la cuadrícula del papel. Se dan ejemplos. En plenaria se discuten dudas, así como ideas al respecto y se plasman conclusiones.

Desarrollo	
4	Se pide a los estudiantes construir parábolas con distintos valores en los parámetros en su estructura. En esta primera sesión se solicita la construcción de parábolas con el vértice en el origen, del tipo $y = ax^2$, y se analiza el efecto de la variación de la pendiente. En plenaria se discuten dudas, así como ideas al respecto y se plasman conclusiones.
5	Finalmente, en esta segunda sesión se pide trabajar con formas del tipo $y = a(x+b)^2 + c$, la intención está en la variación de la pendiente y desde luego la localización del vértice (punto constructor). El uso de fracciones tanto en la pendiente como en los parámetros b y c, es un reto que provoca la imaginación y provee de mecanismos interesantes para su posterior discusión.
Cierre	
6	En esta última sesión, en plenaria se analizan los conocimientos adquiridos. Por ejemplo, la importancia de la ubicación de punto constructor, el papel de la pendiente como elemento que indica el crecimiento de la curva, así como la importancia de la cuadrícula del papel como una guía en la construcción de las curvas. Es importante decir que las herramientas tecnológicas son importantes durante todo el proceso ya que ellas permiten comprobar las conjeturas que los estudiantes y docentes exhiben durante este proceso de aprendizaje.

La Figura 15, es una parábola cuyo nombre analítico es $y = 2x^2$, que también se puede escribir como $y = \frac{2}{1}x^2$, tiene su vértice en origen O (0,0), la escala es natural, lo cual quiere decir que cada cuadro de la cuadrícula tiene una longitud de 1 unidad.

Su instrucción de crecimiento es $\frac{2}{1}$, lo cual significa ir un cuadro a la derecha y un cuadro a la izquierda (denominador), para después subir dos cuadros (numerador), proceso que permite determinar la ubicación de los puntos A y B.

Para el segundo escalón, según la progresión geométrica tendrá que ser $3 * \left(\frac{2}{1}\right) = \left(\frac{6}{1}\right)$, que se traduce de la siguiente manera: desde el punto A o B, caminar un cuadro a la derecha y un cuadro a la izquierda (denominador), para después subir 6 cuadros (numerador) para así hallar la ubicación de los puntos C y D.

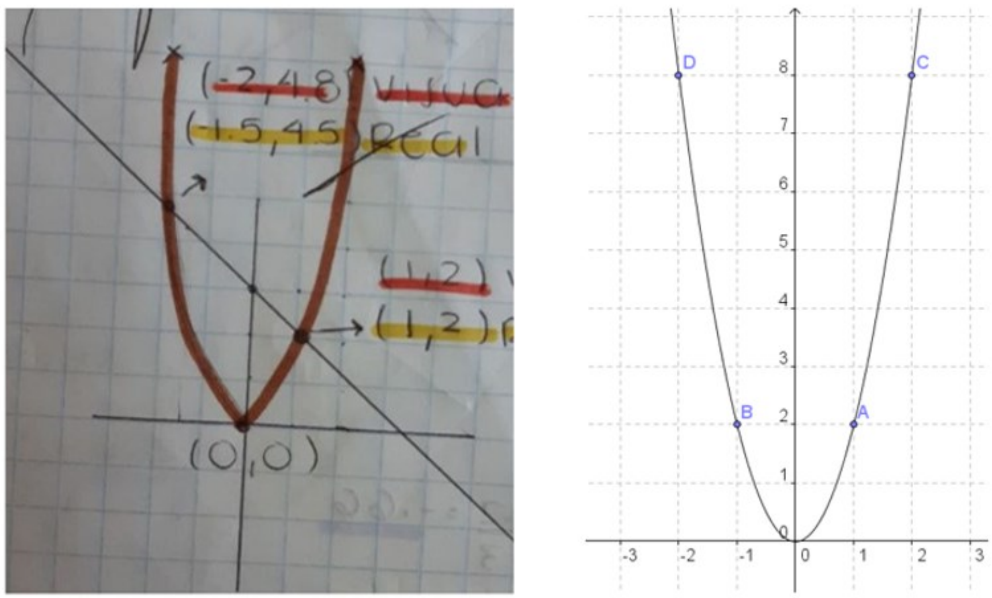


Figura 15. Del lado izquierdo, representación gráfica de la parábola $y = 2x^2$, construida por un estudiante de 17 años, para lo cual se establece 1 unidad de longitud en cada uno de los cuadros de la retícula y usando conteo de cuadros obtiene la secuencia de puntos según la progresión aritmética $1m_1, 3m_1, 5m_1, 7m_1 \ldots$ Del lado derecho se observa la representación gráfica de la misma función usando GeoGebra. Elaboración propia.

La parábola que se muestra en la Figura 16, lleva por nombre analítico $y = -(x + 5)^2 + 8$, que también puede escribirse como $y = -\frac{1}{1}(x + \frac{5}{1})^2 + \frac{8}{1}$, tiene su vértice en V (-8,-5), la escala es natural, lo que significa que cada cuadro de la cuadrícula tiene una longitud de 1 unidad.

Su instrucción de crecimiento es $-\frac{1}{1}$, lo cual significa que a partir del vértice se debe ir un cuadro a la derecha y un cuadro a la izquierda (denominador), para después bajar un cuadro (numerador) y así formar el primer escalón con los puntos F y G.

El segundo escalón estará determinado según la progresión aritmética como $3 * \left(-\frac{1}{1}\right) = \left(-\frac{3}{1}\right)$, lo cual es equivalente a ir un cuadro a la derecha y un cuadro a la izquierda (denominador), para después bajar 3 cuadros (numerador) y así hallar la ubicación de los puntos H e I.

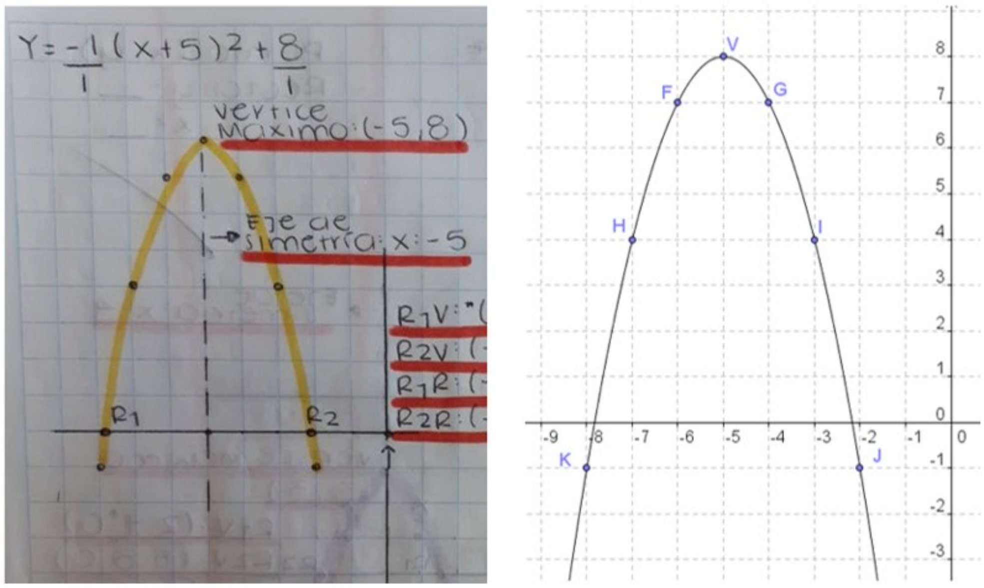


Figura 16. Del lado izquierdo, representación gráfica de la parábola $y = -(x + 5)^2 + 8$, construida por un estudiante de 17 años, para lo cual establece 1 unidad de longitud en cada uno de los cuadros de la retícula y usando conteo de cuadros obtiene la secuencia de puntos según la progresión aritmética $1m_1$,$3m_1$, $5m_1$, $7m_1$… Del lado derecho se observa la representación gráfica de la misma función usando GeoGebra. Construcción personal.

6. A manera de reflexión

La mirada crítica de la educación inclusiva permitió explorar otras formas de pensamiento y construcción del conocimiento matemático, esto con la finalidad de librar, mitigar y en el mejor de los casos eliminar las barreras físicas y sociales que subyacen en el sistema educativo.

En particular, la amalgama que se da entre los saberes cotidianos, junto con las propiedades geométricas de las curvas que proponen las mallas curriculares, tiene potencial para deconstruir objetos y procesos matemáticos y así propiciar la creación de nuevos diseños inclusivos que pueden usarse en el aula de matemáticas y posiblemente fuera de ella.

En específico, en este trabajo fue posible iluminar otros caminos para la determinación, caracterización y diseño de formas didácticas *sui generis* que alteran la manera tradicional en que usualmente la escuela intenta acercar al estudiante al concepto de función cuadrática.

La importancia del diálogo intercultural en la confección de estos diseños nos muestra la importancia del reconocimiento de los otros, de sus formas de pensar y nos invita a deconstruirnos como seres participativos y sociales.

En particular, estamos seguros y concordamos con Cantoral, en que las reflexiones llevadas a cabo en este trabajo pueden abrir "más caminos" para comprender el funcionamiento, construcción y

apropiación de un universo gráfico que permita al estudiante acceder al concepto de función desde una perspectiva visual (Repensar las matemáticas, 2020, 29m04s).

Finalmente, creemos que estas otras formas de pensar y hacer matemáticas tienen capacidad para evitar el privilegio escolar caracterizado por la operatividad algebraica y así, abrir las puertas a una enseñanza inclusiva de las matemáticas que opera desde los saberes cotidianos del estudiante que aprende.

Agradecimientos

Al Dr. Mauricio Langon Cuñarro, mi amistad eterna y agradecimiento infinito por su apoyo incondicional.

A todas y todos los compañeros de la Comunidad de Prácticas Interculturales de la Universidad Iberoamericana-CDMX.

Referencias

Centro de estudios CELEI. (23 de marzo de 2021). *Epistemología de la educación inclusiva- Aldo Ocampo González. Epistemología de la Educación Inclusiva: destrabar los dispositivos semióticos corporificados para producir-otros-mundos.* (conferencia). [Archivo de Video]. Youtube. https://youtu.be/fv2JMr4szqQ

De la Puente, J. L. B. (2009). Hacia una educación inclusiva para todos. *Revista complutense de educación, 20*(1), 13-31.

Fornet-Betancourt, R. (2004). *Reflexiones de Raúl Fornet-Betancourt sobre el concepto de interculturalidad.* México: SEP-CGEIB. Cf. EIB. SEP. GOB.

García García, M.A. (2021). La parábola, una primera aproximación a través del doblado de papel y su matematización usando rectángulos. En A. Cuevas-Vallejo & M. Martínez, (Eds.).

Investigaciones Educativas. La enseñanza del cálculo, las ciencias y las matemáticas, México (pp. 425-430). Universidad Autónoma del Estado de México.

Ocampo - González, A. (2022). Epistemología de la educación inclusiva y sus condiciones de producción. *Educação em Foco, 27*(1), 1-22.

Repensar las matemáticas. (22 de septiembre de 2020). *Sesión 04 del Seminario Repensar las Matemáticas.* [Archivo de Video]. Youtube. https://youtu.be/wxx0PzftmDk

Sandoval, E.A. (2018). *Etnografía e investigación acción intercultural para los conflictos y la paz. Metodologías descolonizadoras*: Investigación Acción Intercultural.

Walsh, C. (2010) "Raza", mestizaje y poder: horizontes coloniales pasados y presentes. En: HERRERA M.G. et al. (Coords.). *Antología del pensamiento crítico ecuatoriano contemporáneo*. Buenos Aires: CLACSO. p. 411-436.