Enseñanza del cálculo: Construcción de las funciones exponenciales y trigonométricas como soluciones en series de Taylor de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

El Cálculo y su Enseñanza
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Vicente Carrión Miranda
vcarrion@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
Rubén Flores Espinoza
rubenfloresespinoza@gmail.com

Universidad de Sonora
Hermosillo, Sonora, México

Recibido: *3* de mayo de 2023
Aceptado: *27* de junio de 2023

Autor de Correspondencia:
Vicente Carrión Miranda

Resumen. En este trabajo mostramos cómo introducir las funciones exponenciales y trigonométricas con base en los conceptos y los métodos propios del cálculo diferencial. Presentamos una construcción de esas funciones como límites de series de funciones polinomiales, al resolver ciertas ecuaciones diferenciales elementales que describen algunas de las leyes dinámicas más importantes que gobiernan los fenómenos en la naturaleza. Con este enfoque se rescata el sentido y el propósito del cálculo como la rama de la matemática idónea para la descripción del cambio y el movimiento continuos. A partir del problema de encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales que describen el crecimiento de poblaciones y la dinámica del oscilador armónico, obtenemos mediante la aplicación del Teorema de Taylor y el concepto de límite, los coeficientes de las series de potencias convergentes que definen la función exponencial y las funciones trigonométricas.

Palabras clave: Serie de Taylor, ecuación diferencial, función exponencial y función trigonométrica.

Abstract. Summary. In this work we show how to introduce exponential and trigonometric functions based on the concepts and methods of differential calculus. We present a construction of these functions as limits of series of polynomial functions, by solving certain elementary differential equations that describe some of the most important dynamic laws that govern phenomena in nature. With this approach, the sense and purpose of calculus is rescued as the ideal branch of mathematics for the description of change and continuous movement. Starting from the problem of finding the solutions of the differential equations with initial conditions that describe the growth of populations and the dynamics of the harmonic oscillator, we obtain, through the application of Taylor's Theorem and the limit concept, the coefficients of the convergent power series which defines the exponential function and the trigonometric functions.

Keywords: Keywords: Taylor series, differential equation, exponential function and trigonometric function.

Introducción

El advenimiento del cálculo diferencial es uno de los avances de más trascendencia en la historia de la matemática. Esta disciplina ha hecho posible la descripción matemática del cambio continuo y la formulación de las leyes que gobiernan los fenómenos dinámicos en la naturaleza, así como sus aplicaciones tecnológicas.

Los objetos matemáticos y métodos introducidos por el cálculo diferencial son de naturaleza cualitativamente distinta a los del álgebra y de la geometría tradicionales. Los conceptos que permiten formular y describir las leyes de movimiento y del cambio continuo son los de función real de variable real, las operaciones de derivación de distintos órdenes y una nueva clase de ecuaciones denominadas ecuaciones diferenciales.

Un aspecto importante para considerar en la enseñanza y en el aprendizaje del cálculo en el nivel superior es la presentación de la clase de funciones a que dan lugar la introducción y aplicación de los conceptos y procesos fundamentales del cálculo. Usualmente, las funciones que se manejan en los cursos de cálculo diferencial se reducen a funciones de tipo algebraico como polinomios o funciones racionales o trigonométricas mientras que las aplicaciones se reducen a problemas de representación gráfica de funciones o problemas de carácter estático como el cálculo de máximos y mínimos. Además, se observa que se dedica poca atención a la aplicación de los conceptos del cálculo a la formulación de leyes dinámicas, o a la descripción de fenómenos que se estudian en las ciencias.

En general, los cursos usuales para la enseñanza y aprendizaje del cálculo no alcanzan a mostrar el tipo de funciones que realmente, describen las leyes dinámicas y el movimiento continuo, funciones que constituyen los productos genuinos del cálculo diferencial.

En este trabajo mostramos cómo introducir funciones expresadas en series de potencias como soluciones de ecuaciones diferenciales elementales. De esta manera, se añaden nuevos objetos matemáticos a partir de la necesidad de resolver ecuaciones, dadas en términos de nuevas operaciones y estructuras, tal como se ha presentado en el desarrollo y evolución histórica de la matemática. Así se incorporaron, por ejemplo, los números enteros, por la necesidad de resolver la ecuación $x + 1 = 0$. Se agregaron los números irracionales para afrontar la resolución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. La ecuación $x^2 + 1 = 0$ condujo al desarrollo del sistema de los números complejos.

En nuestro caso, por la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales elementales, se pone de manifiesto cómo las soluciones de estas ecuaciones, de manera natural, nos llevan a descubrir nuevas funciones, definidas en términos de los conceptos propios del cálculo diferencial. En particular, hacemos patente cómo motivar y presentar la justa definición de las funciones exponenciales y trigonométricas como objetos que son producto de ideas y conceptos del cálculo diferencial. Mostramos cómo se construyen a partir de sus relaciones con sus derivadas, expresadas en términos de ecuaciones diferenciales y, de manera natural, cómo dan lugar a esta nueva clase de funciones que se expresan como límites de sucesiones de funciones polinomiales.

Polinomios y sus derivadas de orden superior

Denotemos con $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a la familia de polinomios de cualquier grado con coeficientes reales. Cada polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot\cdot\cdot + a_k x^k$, donde $a_i \in \mathbb{R}$, es una función con derivadas de todos los órdenes en cada punto de la recta real (Strang, G., y Herman, E., 2022). En particular, si $x_0 = 0$ se tienen los siguientes valores de la i-ésima derivada de $P(x)$:

$$\frac{d^i P}{dx^i}(0) = i! \cdot a_i,\ i = 1, \ldots, k,$$

$$\frac{d^i P}{dx^i}(0) = 0, \forall i > k.$$

El polinomio $P(x)$ en términos de sus derivadas en el punto x=0 toma la forma

$$P(x) = P(0) + \frac{dP}{dx}(0)x + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{dx^2}(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kP}{dx^k}(0)x^k.$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, el polinomio $P(x)$ se escribe en términos de sus derivadas alrededor de x_0, en la forma siguiente:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{dP}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kP}{dx^k}(x_0)(x - x_0)^k.$$

El Polinomio de Taylor

Un resultado fundamental del cálculo diferencial establece que una función derivable, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función constante si, y sólo si, su derivada se anula, $\frac{d(P(x))}{dx} = 0 \forall x \in \mathbb{R}$,

El resultado anterior se generaliza directamente a cualquier orden de derivación en términos de la proposición siguiente:

Proposición 1. Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio de grado menor o igual a k si, y sólo si, $\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. En ese caso, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, f toma la forma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Consideremos una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivadas hasta el orden $k + 1$ en x_0. Al polinomio de grado k siguiente:

$$P_{x_0,k}(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}(x_0)(x - x_0)^k.$$

se le denomina *Polinomio de Taylor de grado k de f alrededor de x_0.*

Proposición 2 (Teorema de Taylor). Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivadas acotadas, de todos los órdenes; es decir, existe $M > 0$ tal que para cada número natural k, se tiene

$$\left|\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}(x)\right| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, la diferencia entre *f*(*x*) y $P_{x_0,k}(x)$ es de la forma

$$\left|f(x) - P_{x_0,k}(x)\right| \leq \frac{M}{(k+1)!} \cdot |x - x_0|^{k+1}.$$

La prueba de esta proposición es consecuencia del teorema del valor medio y se puede consultar en Flores R., *et al*, 2014.

Como consecuencia directa del teorema anterior obsérvese que si *f* es una función con derivadas acotadas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$ entonces para cada intervalo de la forma $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, donde $\alpha > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la diferencia entre la función *f*(*x*) y el polinomio $P_{x_0,k}(x)$ es tan pequeña como se desee, para toda $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales y funciones en series de potencias

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tiene derivadas de todos los órdenes se dice de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

Cada polinomio es función de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

Introducción de la función exponencial

En la naturaleza, los fenómenos de crecimiento de poblaciones muestran que el incremento de esas poblaciones respecto al tiempo es proporcional al tamaño de la población en ese instante. Si *f* (*t*) denota la población en el tiempo *t,* la ley dinámica de crecimiento se expresa mediante la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{df}{dt}(t) = \lambda f(t),$$

donde la constante λ es la tasa de crecimiento, o de natalidad de la especie de que se trate (Blanchart, *et al*, 1999; Coddington, E., 1971):

Si consideramos la constante $\lambda = 1$ y si la población en el tiempo inicial es *f* (0) = 1, es decir, si el proceso de crecimiento inicia con una unidad de población, su tamaño como función del tiempo *f* (*t*) satisface la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$\frac{df}{dt}(t) = \lambda f(t) \text{ y } f(0) = 1 \qquad (1)$$

Enseguida mostramos, a partir de (1), cómo se determina la función *f*(*t*) para cada tiempo, como límite de funciones polinomiales, dando lugar a una de las funciones propias del cálculo diferencial, denominada la función exponencial.

Para ilustrar la resolución del problema observamos que si *f* satisface (1) entonces el valor de las derivadas de todo orden en *t* = 0 es igual a 1 y, por tanto, el polinomio de Taylor de *f* de grado *k* toma la forma

$$P_{0,k}(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}t^k.$$

Observamos que el polinomio $P_{x_0,k}(x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, satisface las condiciones que exige el problema de condición inicial (1), con un error que depende tanto de *t* como del grado del polinomio en la forma siguiente:

$$\frac{P_0,k}{dt}(t) - P_{0,k}(t) = -\frac{1}{k!}t^k;$$

por lo tanto,

$P_{x_0,k}(x)$ satisface (1) en cada tiempo *t,* en el intervalo de tiempo [0, T], con un error *E* de la forma

$$E_{0,k}(t) \leq \frac{T^k}{k!}$$

La expresión anterior, que representa el error, nos muestra que a medida que aumenta el grado del polinomio de Taylor, la diferencia entre su derivada y el mismo polinomio es cada vez menor. En el límite, la sucesión de polinomios de Taylor nos definirá la función con el valor 1, en el tiempo *t* = 0, que satisface, exactamente, la ecuación (1).

A la función antes construida se le denomina *la función exponencial* que se denota por *exp*(*t*), y toma la forma de la serie de potencias siguiente:

$$exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k.$$

A partir de la construcción de la función exponencial presentada se pueden probar, directamente, las siguientes proposiciones:

- La única función que satisface la ecuación diferencial
  $\frac{df}{dt}(t) = f(t)$, con $f(t_0) = 0$,

  es la función *f*(*t*) = 0, $\forall t \in \mathbb{R}$ este resultado es importante en tanto implica la unicidad de soluciones con condiciones iniciales dadas.
- La función *f*(*t*) = *exp* (*a t*) satisface la ecuación diferencial

  $$\frac{df}{dt}(t) = af(t), \text{ con } f(0) = 1,$$

- Aplicando los dos resultados anteriores se prueba directamente que la función exponencial tiene la propiedad
  $\exp(s+t) = \exp(s) \cdot \exp(t)\,, \forall s, t \in \mathbb{R}$.

La fórmula anterior se sigue directamente al observar que para cada valor fijo de la variable *s,* las funciones *exp(s+t)* y *exp(s)exp(t)* satisfacen la ecuación diferencial y su valor en *t*=0 es el mismo, luego por la propiedad de unicidad sus valores son iguales para todo tiempo.

Las funciones trigonométricas *seno y coseno*

La ley dinámica que describe la *posición* $f(t)$ de un cuerpo de masa m, fijada al extremo de un oscilador o resorte y medida desde la posición cero de estiramiento del resorte, obedece a la segunda ley de Newton (Sánchez, J. A., 2022):

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) = -\lambda f(t) \; con \; \lambda = \frac{r}{m}, \qquad (2)$$

donde $r > 0$ es una constante llamada constante de restitución del resorte que depende del material del que está hecho. El movimiento de la masa depende de la posición y de la velocidad iniciales de esa masa. En el caso de la ecuación diferencial (2), esta es de orden 2 porque en esa ecuación la función incógnita aparece con segunda derivada, o sea, la aceleración de la función incógnita f. Para determinar la solución de la ecuación a lo largo del tiempo es necesario establecer los valores de la función f y de su derivada $\frac{df}{dt}$ en el tiempo $t = 0$, como condiciones iniciales.

Para simplificar los cálculos suponemos que $\frac{r}{m} = 1$ y distinguimos los siguientes casos importantes de condiciones iniciales:

1) $\frac{d^2f}{dt^2}(t) = -f(t), con\; f(0) = 0$ y $\frac{df}{dt}(0) = 1,$

2) $\frac{d^2f}{dt^2}(t) = -f(t), con\; f(0) = 1$ y $\frac{df}{dt}(0) = 0.$

Primer caso. La masa se suelta desde la posición cero de estiramiento con velocidad inicial igual a 1. El polinomio de Taylor $P_{xo,k}(t)$ de grado k, alrededor de $t = 0$, de la función de posición $f(t)$ se calcula derivando repetidamente la ecuación (2) y evaluando cada expresión en $t = 0$. Luego, se obtienen los valores siguientes para las derivadas de f en el tiempo inicial.

$$f(0) = 0, \frac{df}{dt}(0) = 1, \frac{d^2f}{dt^2}(0) = 0, \frac{d^3f}{dt^3}(0) = -1, \frac{d^4f}{dt^4}(0) = 0, \frac{d^5f}{dt^5}(0) = 1, \quad \dots ;$$

en general,

$$\frac{d^{2k}f}{dt^{2k}}(0) = 0, k = 1,2, \dots,$$

$$\frac{d^{2k}f}{dt^{2k-1}}(0) = (-1)^{k-1}, k = 1,2, \dots$$

Así, el polinomio de Taylor $P_{x0,k}(t)$, para $k = 1,2, 3, \dots, 2k - 1$, toma la forma

$$P_{0,k}(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}t^{2k-1}$$

En este caso el polinomio $P_{x0,k}(t)$ satisface la relación

$$\frac{d^2P_{0,k}}{dt^2}(t) + \lambda P_{O,k}(t) = -\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}t^{2k-1}$$

y el polinomio $P_{x0,k}(t)$, en cada tiempo *t*, satisface (2) con un error $E_k(t)$ de la forma

$$E_k(t) = \left|\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}\right|$$

Se observa que para valores *t*, con $|t| \leq$ M, el error $E_k(t)$ es tal que

$$E_k(t) \leq \left|\frac{M^{2k-1}}{(2k-1)!}\right|$$

Tomando en consideración que la factorial de un número *k* se incrementa más rápidamente que la *k*-ésima potencia de cualquier otro número natural, el error $E_k(t)$ anterior se puede hacer tan pequeño como se desee tomando suficientemente grande el grado *k* del polinomio $P_{x0,k}(x)$. Así la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} t^{2k-1}$$

es convergente y define la función que satisface la ecuación diferencial (2) con las condiciones iniciales dadas. Esa función *f* es la serie de Taylor de la función trigonométrica *sin t*

$$f(t) = sen\ t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} t^{2k-1}$$

Segundo caso. Análogamente al caso anterior, para la función de posición de la masa *f*(*t*) con valores iniciales $f(0) = 1$ y $\frac{df}{dt}(0) = 0$, sus derivadas de cualquier orden en $t = 0$, toman los valores

$$\frac{d^{2k-1}f}{dt^{2k-1}}(0) = (-1)^{k-1}, k = 1,2, \ldots$$

$$\frac{d^{2k}f}{dt^{2k}}(0) = 0, \qquad k = 1,2, \ldots$$

y el polinomio de Taylor $P_{x0,k}(t)$ de grado 2*k*, alrededor de $t = 0$, toma la forma

$$P_{0,k}(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}.$$

La solución al problema, con las condiciones iniciales dadas, corresponde a la serie de Taylor de la función *cos t*

$$f(t) = cost = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}$$

Observando que la suma y producto por un escalar de soluciones de la ecuación diferencial son también soluciones, se prueba directamente que la solución $f(t)$ de la ecuación diferencial (2), con condiciones

iniciales $f\ (0) = a$ y $\frac{df}{dt}(0) = b$, toma la forma

$f(t) = acost + bsent.$

Conclusiones

- La resolución de ecuaciones diferenciales elementales da lugar a las funciones propias del cálculo y, con ello, a los objetos matemáticos para la descripción del cambio continuo y el movimiento.
- Las soluciones de una clase importante de ecuaciones diferenciales se construyen a partir de los polinomios de Taylor, determinados en forma recursiva a partir de la ecuación diferencial y de sus condiciones iniciales.
- La solución exacta se representa por medio de una serie de potencias convergente en la recta real, donde las sumas parciales son los polinomios de Taylor que aproximan la solución. Las series que expresan la solución son funciones obtenidas como límites de los polinomios de Taylor cuando su grado tiende a infinito.
- Las funciones exponenciales y trigonométricas son ejemplos notables de la clase de funciones que se expresan como series de potencias denominadas funciones analíticas.
- El diseño, los contenidos y el enfoque presentados están al alcance como se observa, de los cursos de cálculo diferencial en el nivel superior de enseñanza.

Bibliografía

Blanchart, P., Devaney, R., Hall, G. (1999). Ecuaciones diferenciales. International Thomson Editores: México.

Coddington, E. (1971). Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias. México: CECSA.

Flores R., Valencia M.A, García M. (2014). Fundamentos del Cálculo. Primera Edición.

Pearson Educación: México.

Sánchez, J. A. (20 de agosto de 2022). Método de las series de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Universidad EAFIT. Recuperado de http://www.counseling.org.

Strang, G., Herman, E. (2022). Cálculo, Volumen 2. Rice University: USA.