El Teorema Fundamental del Cálculo: una versión contemporánea y la otra basada en las ideas de I. Barrow, utilizando GeoGebra

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Gonzalo Zubieta Badillo y Rafael A. Meza Villanueva

CINVESTAV-MÉXICO

Recibido: 13 de febrero 2022
Aceptado: 27 de junio 2022

Autor de Correspondencia:
Gonzalo Zubieta Badillo
gzubieta@cinvestav.mx

Resumen. En la perspectiva de los *registros de representación semiótica* de R. Duval consideramos el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), en las dos versiones mencionadas en el título, ya que de acuerdo a Duval (pág. 127) " ... que toda representación es cognoscitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de un registro a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que son representados", motivo por el cual en el aprendizaje es de crucial importancia presentar en al menos dos registros de representación a dicho concepto. De lo anterior, pretendemos obtener algunas orientaciones didácticas que permitan un mejor aprendizaje para los estudiantes, de tan importante resultado.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, Registros de representación semiótica, Isaac Barrow, GeoGebra.

Abstract. In the perspective of R. Duval's semiotic representation registers, we consider the Fundamental Theorem of Calculus (FFT), in the two versions mentioned in the title, since according to Duval (p. 127) " ... that every representation is cognitively partial in reference to what it represents and that from one register to another the same aspects of a content are not represented", which is why in learning it is of crucial importance to present this concept in at least two representation registers. From the above, we intend to obtain some didactic orientations that allow a better learning of such an important result for the students.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, Semiotic representation registers, Isaac Barrow, GeoGebra.

1. Introducción

Para entender y comunicar las ideas matemáticas se utilizan los registros de representación semiótica que son: el registro de la *lengua natural*, el registro *figural* y el registro *simbólico* (numérico y algebraico). Dichos registros nos permiten acceder a los conceptos matemáticos que son entes abstractos. Como dice Duval (p. 131):

> Si la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, entonces el envite principal de los **aprendizajes de base en matemáticas** no puede solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo) sino que debe también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados.

Aunado a ello, al utilizar un paquete de geometría dinámica, se tiene la posibilidad de usar a los registros de representación semiótica mencionados y a través de la visualización, los estudiantes tienen la oportunidad de un aprendizaje, que antes no era posible.

2. Versión contemporánea del TFC

Hemos elegido la versión del TFC que aparece en el libro *The Calculus a Genetic Approach* de Otto Toeplitz (pp. 96 y 97) debido a su enunciado muy parecido al de Barrow y que presentamos a continuación:

> Si F(t)=$\int_a^t f(x)dx$, $a \leq t \leq b$; y si f(x) es continua y monótona
> para $a \leq x \leq b$ entonces F´(t)=f(t).

En otras palabras, la derivada de *F(t)* es la función bajo el signo de integración, el "integrando f(x)"; es decir, la integral definida considerada como una función del límite superior resuelve el problema inverso de encontrar una función cuya derivada es la función dada *f(x)*, ver Figura 1.

Consideremos $F'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t}$

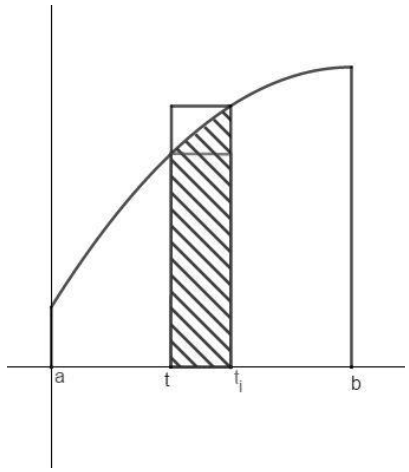

Figura 1. Límite de F´(t). Toeplitz (1963, p. 97).

$$F(t_1) - F(t) = \int_a^{t_1} f(x)dx - \int_a^{t} f(x) = \int_t^{t_1} f(x)dx$$

Es el área de la región sombreada. Ya que *f (x)* se considera monótona, tenemos

$$f(t) < f(x) < f(t_1) \text{ para } t < x < t_1, \qquad y\ también$$

$$(t_1 - t)f\ (t) < \int_t^{t_1} f\ (x)dx < (t_1 - t)\ f\ (t_1) \text{ ; por lo tanto}$$

$$\text{f(t)} < \frac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t} < f(t_1)$$

Ya que $f\ (x)$ se ha considerado "continua", se sigue al tomar límites a lo anterior que

$$\text{F´(t)} = \lim_{t_1 \to t} \frac{F\ (t_1) - F\ (t)}{t_1 - t} = f\ (t).$$

Hemos escrito la derivada de *F(t)* ya que son iguales las derivadas derecha e izquierda en *t.*

Para $t_1 \to t$, $f\ (t_1)$ recorre todos los valores de $t_1\ a\ t$. Si $f(x)$ tuviera un salto en

$x = t$ (Figura 2), aún sería monótona, pero ya no sería verdad que $\lim_{t_1 \to t} f(t_1) = f\ (t)$.

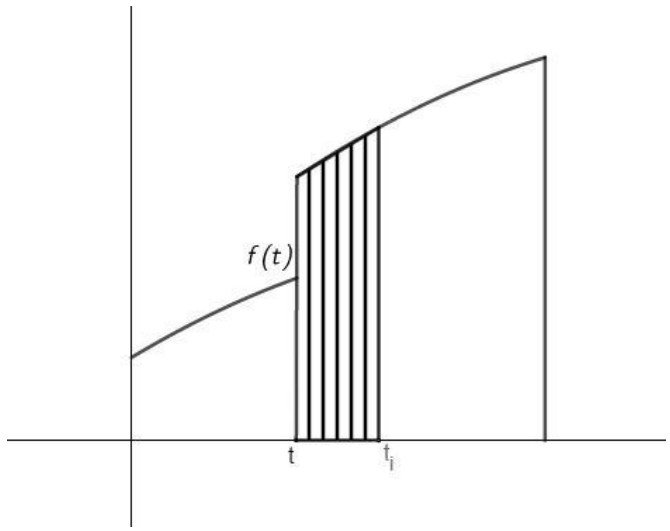

Figura 2. Salto de *f(x)* en *x = t*. Toeplitz (1963, p. 97).

3. Versión del TFC según Barrow

Enseguida se presenta la versión del TFC en la versión de Barrow, tomada de Struik (1969, p. 255). Isaac Barrow, en 1667, reconoce la relación básica conocida como Teorema Fundamental del Cálculo, ver Figura 3.

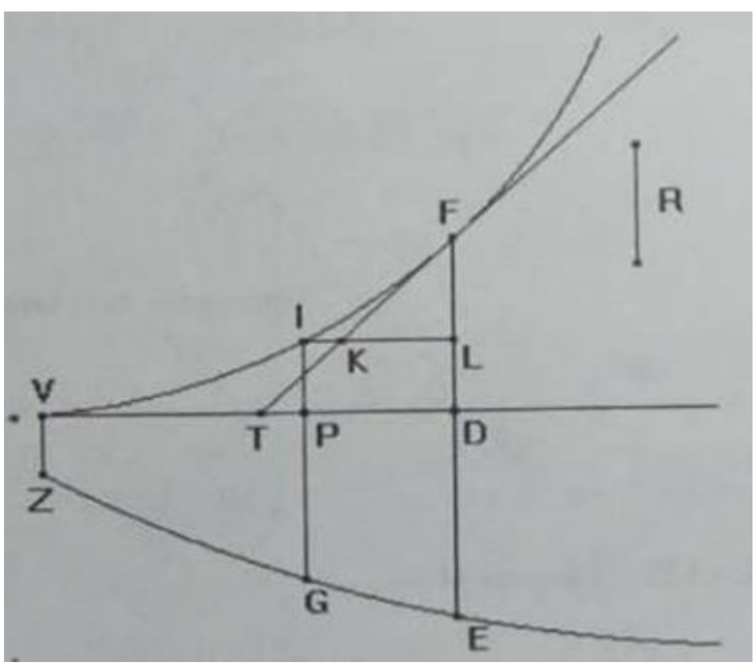

Figura 3. Teorema Fundamental del Cálculo. Struik (1969, p. 25).

Sea ZGE (Figura 3) una curva cuyo eje es VD y consideremos los segmentos (VZ, PG y DE) perpendiculares a este eje y continuamente creciendo desde el segmento inicial VZ; también sea VIF una curva tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD, cortando a las curvas en los puntos E, F y al eje VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio VDEZ. En particular, si R=1 entonces DF tiene el valor del área de la región VDEZ expresada como longitud.

De lo anterior, Barrow demuestra que la recta TF es tangente a la curva VIF en el punto F, al estilo clásico griego de que toca a la curva en un punto. Barrow lo prueba de manera simple y rigurosa.

A continuación se presenta la versión dinámica basada en las ideas de Barrow:

Consideremos el trapecio AMNB como aparece en la Figura 4.

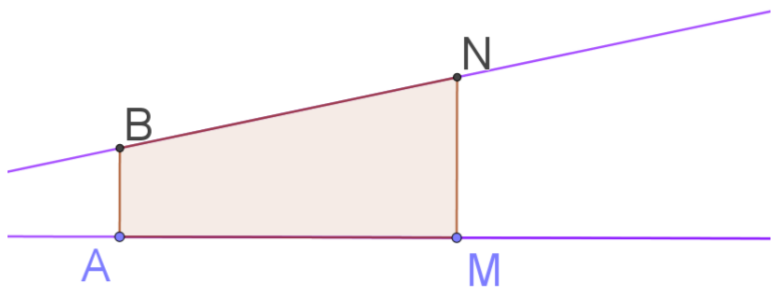

Figura 4. Versión dinámica del TFC. Elaboración propia.

Sobre el eje AM, el punto A está fijo mientras que el punto M se mueve sobre dicho eje. La recta BN es la curva monótona que conforme M esté más a la derecha el área del trapecio correspondiente aumenta. La figura anterior no está de cabeza como la de Barrow, la cual tiene el propósito de no encimar ambas figuras. Para construir la otra figura, se le va a construir un segmento ML - en la dirección de N - que tenga el mismo valor del área AMNB pero ahora como longitud, ver Figura 5.

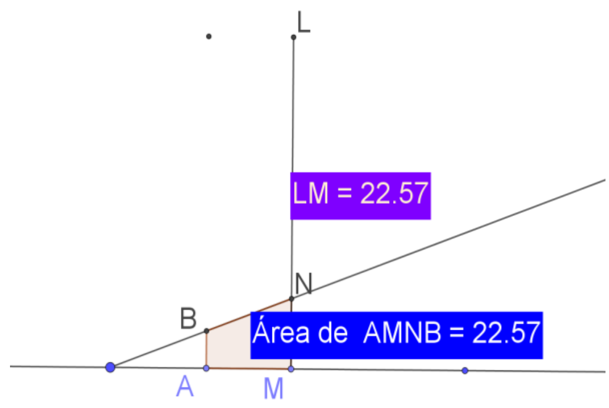

Figura 5. Versión dinámica del TFC con áreas. Elaboración propia.

Al mover M el punto L describe una curva como se ilustra a continuación en la Figura 6.

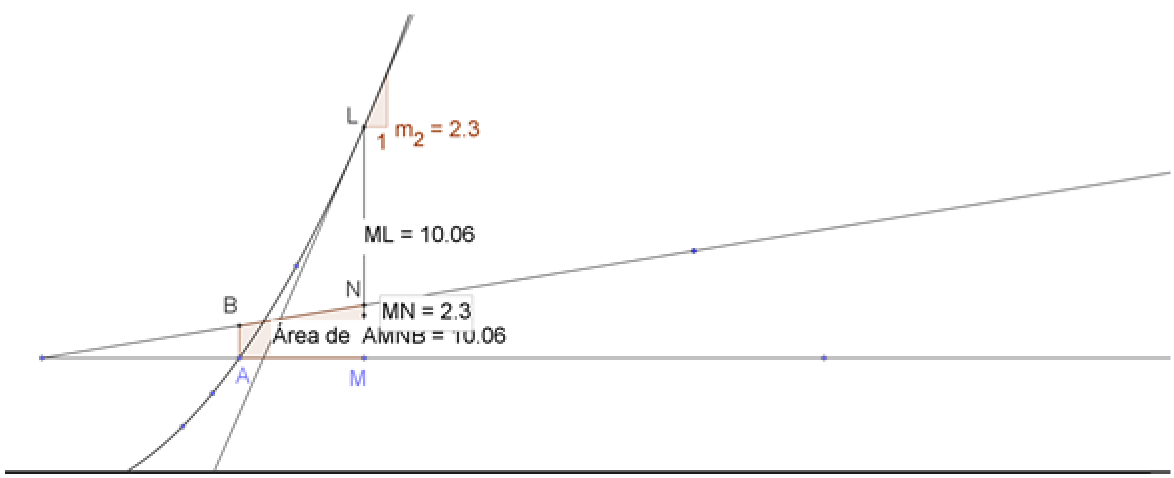

Figura 6. Versión dinámica del TFC con tangente. Elaboración propia.

Ahora, trazando la tangente a la curva mencionada en el punto L resulta que MN es igual a la pendiente m_2 de la tangente, esto es, la tesis del Teorema Fundamental del Cálculo.

Expresar lo anterior con imágenes estáticas desmerece lo que un paquete dinámico como GeoGebra ofrece a cualquier usuario, teniendo en cuenta que es gratuito. Además, da la posibilidad al usuario de explorar sus ocurrencias, lo que resulta benéfico para su formación.

Esta posibilidad de movilidad y actualización instantánea, que ofrecen los paquetes de geometría dinámica, da lugar a quién los manipula, de enfrentarse a nuevos interrogantes que no siempre se habían contemplado; además de utilizar los registros de representación figural y numérico, que no aparecen por supuesto en el texto mencionado anteriormente, donde a lo más se tienen figuras estáticas y en este caso, si el lector es imaginativo y atinado, podría obtener alguna consecuencia.

4. Algunos cuestionamientos para la didáctica

Desde nuestra perspectiva de los registros de representación semiótica, las dos versiones presentadas del TFC utilizan distintos registros de representación, formal y figural; lo cual tendrá sus consecuencias en el aprendizaje, en particular del tema tratado, ya que en ocasiones la información necesaria para resolver un problema sólo está en uno de los registros y si para el estudiante dicho registro no le es familiar, lo que podría ayudarlo es un cambio a otro registro de representación que le sea más familiar, para intentar dar solución al problema propuesto. Lo mencionado ocurre con mucha frecuencia en matemáticas; sin embargo, por desconocimiento o por un énfasis excesivo en el registro algebraico, la situación planteada sigue presente.

Por otro lado, consideramos que las dos versiones aquí presentadas se complementan, en cuanto a los registros de representación mencionados, pero además se diferencian en los supuestos de cada una de ellas; por ejemplo, en el texto de Toeplitz (1963) si $f\,(x)$ es "continua" y monótona para $a < x < b$, lo cual se refiere a toda una clase de funciones, mientras que en el acercamiento dinámico basado en Barrow $f(x)$ es una semirrecta que al variar determina distintos lugares geométricos. Esto es, la presentación de Toeplitz es más general; en contraste, la presentación dinámica basada en Barrow utiliza ejemplos particulares y más familiares para el estudiante, ¿qué sugeriría la didáctica para iniciar a los estudiantes al TFC?

5. Bibliografía

Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis* (pp. 118-144). En Sánchez, E. y Zubieta, G. (Eds). *Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa*. Departamento de Matemática Educativa, México.

Struik, D. J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge: Harvard University Press.

Toeplitz, Otto (1963). *The Calculus, a Genetic Approach.* The University of Chicago Press**.**