Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato

L. Rojas-Escribano, J.J. Báez-Rojas y M.G. Corona-Galindo
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Tonantzintla, Puebla, México
roescriblu@gmail.com; jjbaezr@inaoep.mx; mcorona@inaoep.mx

Resumen. Con el apoyo de Excel y Geogebra, en esta propuesta didáctica se presentan algunas actividades para resolver problemas de optimización en cálculo diferencial. Se seleccionó un grupo piloto de 40 estudiantes y con ellos se trabajó durante 48 horas sobre el tema citado. Se comenzó proponiéndoles una serie de problemas contextualizados para discutirse de manera colaborativa hasta encontrar el resultado correcto, bajo la dirección del docente. Enseguida, los estudiantes construyeron a escala el modelo correspondiente, buscando la solución correcta a lápiz y papel. Posteriormente, con ayuda de Excel y Geogebra, se analizó y comprobó el resultado. A manera de evaluación, tanto a ellos como a 300 estudiantes de bachillerato que ya habían terminado su curso de cálculo diferencial, se les aplicó un cuestionario con tres problemas de optimización. Los resultados de los estudiantes ajenos al grupo piloto mostraron serias carencias concernientes a un aprendizaje significativo sobre los conceptos involucrados en el tema; mientras que el 66% de los elementos del grupo piloto mostró una mejor comprensión de los conceptos básicos de optimización. Este resultado hace patente la viabilidad de la *proposita* que se plantea.

Palabras clave: optimización, enseñanza, cálculo, Excel, Geogebra

Abstract. With the support of Excel and Geogebra, the present didactic proposal exposes some activities for solving optimization problems in the framework of differential calculus. A 40-students pilot group for working during 48 hours about optimization has been selected. At the beginning, a series of contextualized problems for solving correctly via in one another collaborations between the students and the teacher´s guidance has been proposed. Next, the students have built on a small scale the corresponding model and they have look for the correct solution by pencil and paper. Afterwards, using Excel and Geogebra the result have been analyzed and verified. Finally, the students of the pilot group together with another senior high school 300 students with three optimization problems were assessed. It must be pointed out that all the students had finished a differential calculus course. The results of the test of the 300 students show a lack of significant learning about the concepts involved into the optimization subject, whereas 66% of that of the pilot group have solved the test satisfactory. They have also shown a better understanding of the basic concepts of optimization, which brings to light the viability of the *proposita.*

Keywords: optimization, teaching, calculus, Excel, Geogebra

1. Introducción

De acuerdo a los resultados de pruebas estandarizadas como el Plan Nacional de Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) y del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA por sus siglas en inglés), la comprensión y solución de problemas de optimización ha sido una preocupación de docentes, padres de familia y autoridades educativas.

Fecha de recepción: 17-09-2017
Fecha de aceptación: 07-12-2017

Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato

El tema de optimización y temas aledaños dirigidos a su comprensión tiene ocupados a varios pensadores de la educación; así, Dolores (2007) reporta que una gran cantidad de estudiantes obtiene derivadas aplicando fórmulas sin comprender el algoritmo que aplica; Duval (1993) arguye que la construcción de representaciones sobre los conceptos juega un papel importante en el aprendizaje; en cuanto al uso de la tecnología, Cuevas (2014) señala que los docentes la emplean poco para enseñar a derivar, y nuestra convivencia en los foros de discusión sobre la docencia nos ha llevado a notar que las estrategias de enseñanza de algunos colegas docentes no están enfocadas al aprendizaje; además, carecen de planeación, imaginación e iniciativa. En este contexto, el objetivo es poner a consideración de los lectores una nueva propuesta didáctica, basada en la interacción de los estudiantes, la puesta en práctica del aforismo aprender haciendo, troquelado por un problema contextualizado, y apuntalado con el uso de la tecnología para aprender el tema de optimización. Se consideran torales en el proceso, las representaciones que puedan construir los estudiantes con sus propios medios a fin de mejorar la comprensión de los conceptos involucrados; así como contar con las herramientas para comprobarlos utilizando algún dispositivo electrónico.

Para llevar a cabo la encomienda, se comenzó con la revisión general de la bibliografía, cerca de 30 documentos entre libros, artículos científicos y memorias. De ellos se seleccionaron cerca de 10, que realmente están relacionados con el tema en estudio, pues contienen el uso de representaciones y manejo de las TIC en la enseñanza del cálculo diferencial.

Respecto a la muestra, es necesario señalar que el grupo piloto se constituyó por 40 estudiantes de bachillerato que cursaron la materia de cálculo diferencial, con el primer autor del presente trabajo, quien a la par impartía la materia de Excel. Se hace notar que cada materia comprende 48 sesiones por semestre. En el mismo curso, se realizaron a la par actividades de Geogebra, algunas de ellas se anexan en http://astro.inaoep.mx/archivos/nathalie/Corona/Tareas.pdf Los otros 300 participantes, estudiantes de nueve escuelas de tres subsistemas del Estado de Puebla, ya habían cursado cálculo diferencial.

1.1 Contexto sobre la enseñanza del tema de optimización

Los resultados de la prueba PISA, donde México ocupa los últimos lugares en matemáticas, y los de las pruebas nacionales como PLANEA, muestran que las estrategias utilizadas para enseñar y aprender matemáticas, donde el maestro es el que enseña y el alumno escucha y repite lo que hace el maestro, han dado resultados insuficientes.

Por lo general, el tema de optimización se trata al final del curso de cálculo diferencial, de tal manera que hay ocasiones en que los docentes no alcanzan a cubrirlo. Quienes sí lo hacen, suelen resolver, por métodos algorítmicos, algunas aplicaciones de máximos y mínimos; en dichos cursos no se utilizan los graficadores, mucho menos la hoja de cálculo, para analizar el comportamiento de las funciones presentes en los problemas de optimización. Pero no solo existen métodos algorítmicos para resolver problemas a este nivel. Revisando los contenidos de cálculo diferencial, se encontró que la mayoría de los programas contienen los temas de funciones, límites, la derivada y sus aplicaciones y con Excel se pueden aproximar tanto como se desee los valores de una función hasta obtener su gráfica. Y, si desde el inicio del curso, se planteara un problema contextualizado sobre optimización, el avance cotidiano de conocimientos capacitaría al estudiante para entenderlo y resolverlo.

Habida cuenta que las escuelas deben tener los materiales necesarios para cumplir las encomiendas inherentes a la enseñanza, los docentes pueden utilizar diversos medios electrónicos con algún software que facilite el aprendizaje y perder el miedo al uso de la tecnología. Con Geogebra, por ejemplo, los estudiantes realizan actividades interactivas, tales como hallar la tangente a una curva para diferentes valores de la variable independiente; estas herramientas permiten comprobar la solución de los problemas que previamente realiza con lápiz y papel, y hace más interesante la clase, pues el alumno se divierte y aprende.

1.2 Planteamiento del problema

Los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo diferencial han priorizado el uso de algoritmos, cuya finalidad ha sido el uso de fórmulas de derivación, pero difícilmente se hace uso de representaciones para que el estudiante relacione los conceptos involucrados en esas fórmulas; aún menos utilizando la tecnología. Por esto, urge rediseñar la enseñanza del cálculo aprovechando que la mayoría de los estudiantes cuenta con un dispositivo electrónico.

1.3 Justificación de una nueva propuesta didáctica

Después de revisar el programa de estudio de cálculo diferencial de las nueve escuelas referidas, se encontró que, al menos en sus programas, todas abordan los temas de máximos y mínimos, velocidad instantánea y el problema de la tangente. También, se incluyen el dominio y rango, raíces, intervalos donde $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$, monotonía de la función, punto de inflexión y concavidad; cobertura que muestran la pertinencia del cuestionario con el que comenzamos la aplicación de la estrategia. Sin embargo, los resultados que se obtuvieron mostraron que los estudiantes no comprendieron el significado de los conceptos utilizados en el tema en cuestión. En cuanto a los docentes, titulares de la materia en estudio, todos tienen formación académica en alguna ingeniería o licenciatura en matemáticas, otros cursan el posgrado en las áreas afines.

Cuevas (2014) apunta que uno de los cursos de mayor índice de reprobación, alrededor del 70% en las escuelas de ingeniería en México, es el primer curso de cálculo diferencial. Aunado a esto, señalamos que los altos índices de reprobación en esta materia han sido una causa de abandono en las carreras profesionales que en su currícula consideran dicha materia: 30% del estudiantado nacional está inscrito en carreras profesionales que tienen algo que ver con las matemáticas, mientras que el 70% está inscrito en carreras que poco o nada tienen que ver con esta rama del conocimiento. Sobre las causas, cabe señalar que, de acuerdo a la experiencia de los autores en la labor docente, el alto índice de reprobación está ligado a la necesidad de hacer más ameno el aprendizaje de la materia, pues el método tradicional basado en la exposición del profesor, sostenido por la solución de ejercicios repetitivos hasta entender un concepto, ya no es viable en un entorno en donde el estudiante tiene distractores electrónicos como el teléfono celular.

1.4. Referencias conceptuales

Dolores (2007) señala que la introducción a la derivada frecuentemente se presenta priorizando la regla de los cuatro pasos, i.e., $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, minimizando su significado geométrico y prácticamente reduciendo a cero su relación con la variación física; Riestra (2003), respecto a la tangencia, expresa que es posible profundizar en la interpretación geométrica de la derivada, analizando lo referente al parecido (tipo de contacto) que existe entre la curva continua $y=f(x)$ y la recta tangente $y-f(a) = f'(a)(x-a)$ en el punto de tangencia (a, f(a.)) y Cuevas (2014) dice que, en la enseñanza estrictamente operativa, se plantean esquemas y modelos algorítmicos de resolución en donde se busca que el estudiante reproduzca los patrones operativos de acuerdo a los esquemas en que fue ilustrado; plantea, el autor además, que en esta forma tradicional de enseñanza, el significado de los conceptos queda ausente y cualquier problema que no sea del tipo enseñado y requiera del significado de derivada, causa desconcierto o frustración.

En México, el enfoque variacional recién ha sido propuesto como una herramienta de aplicación en los cursos de cálculo diferencial; así, Cantoral (2013) dice que para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos. En este contexto, se resolvió atender las demandas mencionadas considerando actividades lúdicas y de convivencia para que los estudiantes, que hablan el mismo lenguaje, analizaran situaciones reales pensadas *ad hoc* por el docente para adquirir nuevo conocimiento. Además, sin necesidad de fastidiarlos con tediosas demostraciones, con el uso de Excel, Geogebra y a través de tareas específicas se les indujo a entender intuitivamente los conceptos inherentes a la optimización.

1.5. Antecedentes académicos

Hitt (2003) arguye que la visualización matemática tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, pizarrón o computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o gráficos. En este sentido, cuando los estudiantes resuelven diversos problemas siguiendo los métodos algorítmicos, al cometer algún error, difícilmente identifican en dónde se equivocan; por lo tanto, adquiere importancia la realización de alguna representación matemática en el pizarrón, en la libreta, o bien, haciendo uso de la tecnología, cuya herramienta ha generado cambios en la forma de cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Gamboa (2007) afirma que una característica de los ambientes de aprendizaje basados en el ordenador es su carácter cognitivo intrínseco: la interacción entre un estudiante y una computadora se basa en responder a su demanda de una representación simbólica o de cálculo, donde la retroalimentación se realiza a través de un registro propio que permite leerse como un fenómeno matemático.

A este tenor, Goldenberg y Cuoco (1998) señalan que el uso de software dinámico, ofrece una herramienta poderosa para examinar relaciones geométricas desde diversos ángulos. De igual forma, Santos (2001) menciona que el uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otras componentes dentro de esa misma configuración; resolviendo con esto, la dificultad de imaginar el lugar geométrico que describe un punto cuando se mueve dentro de la misma disposición de elementos.

Por su lado, Arcavi y Hadas (2000) afirma que los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo contribuye a la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta), una instancia particular a fin de estudiar variaciones, invariantes visuales y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones.

1.6 Objetivos específicos

Estos son los siguientes: a) partiendo de problemas contextualizados, que el estudiante entienda el lenguaje y contenido de problemas planteados para calcular la velocidad instantánea de un móvil y el volumen máximo de un recipiente; b) que aprenda el uso de Excel y Geogebra para graficar diversas funciones, a fin de que pueda manejar los conceptos de dominio y rango de f(x); que encuentre, las raíces de la función para determinar los intervalos donde f(x) > 0 y f(x) < 0, así como, c) que use la tecnología en la representación de conceptos fundamentales del cálculo diferencial, tales como el problema de la tangente a una curva en un punto y la derivada para encontrar los máximos y mínimos, la monotonía y la concavidad de una función.

1.7 Metodología

Considerando el programa de estudios, se seleccionó el tema de optimización, como una salida de aplicación del cálculo diferencial. A continuación, se analizaron los resultados que los estudiantes lograron en los exámenes que habían presentado sobre este tema y se encontró un alto índice de reprobación. Enseguida se diseñó un cuestionario de preguntas y problemas típicos de los textos; y, después de su aplicación, los resultados mostraron que los estudiantes no entendían el lenguaje ni los conceptos vinculados al tema. Además, demandaban el planeamiento de problemas contextualizados a fin de sentir la utilidad del cálculo diferencial para la vida, pues argumentaban que seguramente nunca encontrarían un problema como los que se planeaban en los libros de texto. Para satisfacer la solicitud planteada se diseñó el primer problema. Los otros problemas vieron la luz cuando la curiosidad de los estudiantes salió a flote a través de la formulación de preguntas sobre problemas de su entorno.

Después de compilar la información de inquietudes, incluyendo las referidas al uso de Excel y Geogebra, afloró la presente propuesta didáctica. Su fundamentación se sustenta en la teoría constructivista y está diseñada para promover el pensamiento crítico a partir de problemas reales y contextualizados. Se pretende, además, que el estudiante comience *motu proprio* con la identificación de sus necesidades de aprendizaje previo y que sirvan de acicate para primar la búsqueda de la información necesaria para comprender y resolver el problema. Para vencer el escollo planteado por la estigmatización del lenguaje matemático, los estudiantes trabajan en equipo; pues entre ellos tienen una manera común de comunicarse. Curiosamente se descubrió que, si uno de ellos entiende los términos matemáticos, se encarga de comunicar el conocimiento a sus compañeros. Este trabajo entre pares, estimula el aprendizaje significativo y se contrapone al método tradicional, en donde prevalece la exposición del docente y el papel del estudiante es pasivo y centrado en la memorización.

1.7a Presentación del cuestionario

El sondeo contiene los siguientes tres problemas.

1.- A partir de una lámina galvanizada que mide 3 m de largo y 2 m de ancho, se desea construir un recipiente de forma rectangular sin tapa. Si en cada esquina se recorta una cantidad “x” de material y después se dobla cada pestaña a fin de formar el recipiente, tal como se muestra en la Figura 1, ¿cuál será el volumen máximo posible que puede contener el recipiente construido?

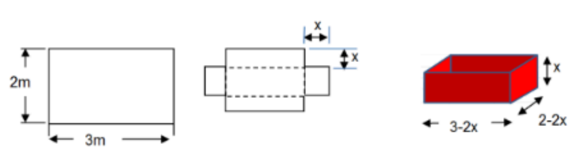


Figura 1. Elementos de ayuda para la construcción de un recipiente de volumen máximo.

2.- En la feria de mi pueblo, un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba y la altura ***d*** está gobernada por la relación $d=16t-1.6t^2$ cuya gráfica de movimiento se muestra en la Figura 2, calcular: a) La velocidad instantánea que lleva el cohete 3 segundos después de haber sido lanzado, b) la ecuación de la recta tangente cuando t=3 segundos.

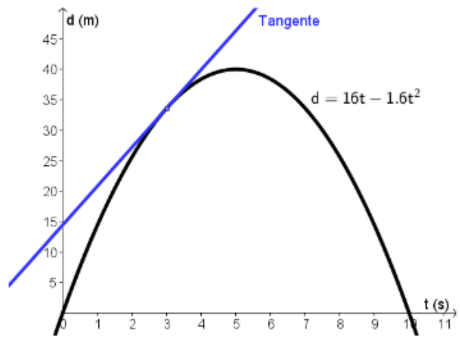


Figura 2. Descripción del movimiento ideal de un cohete en el aire.

3.- Dada la función $f(x) = (3 - 2x)(2 - 2x)x$, cuyas gráficas de f(x), f´(x) y f´´(x) son las curvas que se ilustran en la Figura 3, contesta lo que se te pide a continuación:

a) ¿Cuál es el intervalo del dominio de la función? ________________________________

b) ¿Cuál es el intervalo del rango de la función? __________________________________

c) ¿Cuáles son las raíces de la función? ____

d) ¿En qué intervalos la función es positiva? _____________________________________

e) Escribe los intervalos donde la función es negativa ______________________________

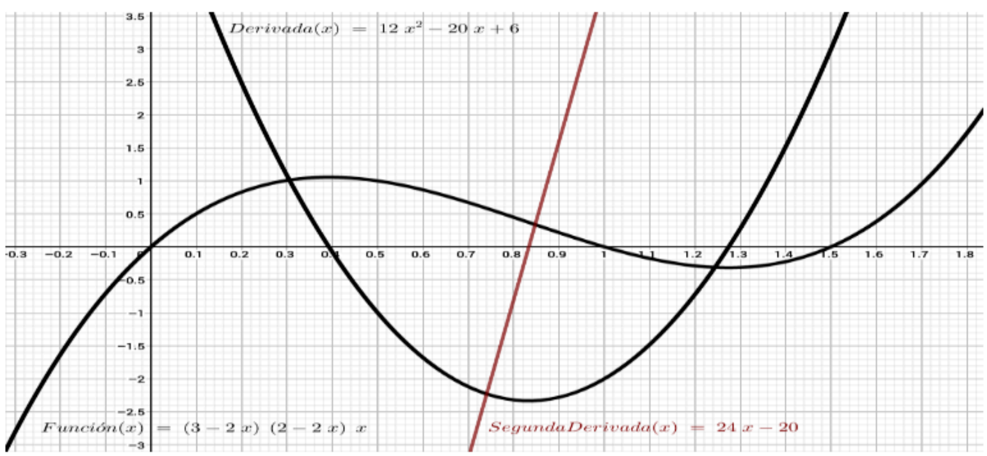


Figura 3. Gráfica de la función $f(x) = (3 - 2x)(2 - 2x)x$, más su primera y segunda derivada.

f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto máximo relativo de la función? _____________

g) ¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo relativo de la función? _____________

h) ¿Cuáles son los intervalos donde la función crece? _____________________________

i) Escribe las coordenadas del punto de inflexión _________________________________

j) ¿En qué intervalo la función es cóncava? ______________________________________

k) Escribe el intervalo donde la función es convexa ________________________________

El problema 1 corresponde al tema de optimización, y se pide calcular el máximo de la función. Con este problema se pretende saber si el estudiante analiza y conceptualiza la variación del volumen en función de sus lados; pues debe transformar el lenguaje coloquial del problema a una expresión matemática a fin de poder calcular el volumen del recipiente. Aunque se representan sus respectivas imágenes sobre el proceso de construcción, es necesario relacionar el largo, ancho y alto del recipiente para hallar su volumen y llegar a la función $\boldsymbol{V = (3 - 2x)(2 - 2x)x}$. Al asignar valores a la variable $\boldsymbol{x}$, puede obtener el volumen correspondiente y registrarlo en una tabla de valores y con ello buscar una aproximación del volumen máximo. Otra forma de resolverlo es representando gráficamente la función de volumen y con ella identificar el máximo, o bien, seguir el algoritmo para determinar el máximo y mínimo de f(x) usando la derivada.

Con el problema 2, a partir de la función de desplazamiento y su respectiva gráfica, se aborda el tópico de la velocidad instantánea para un tiempo dado. Se espera que el estudiante infiera, al cambiar la posición del móvil con respecto al tiempo, que se trata de un problema de variación. La tasa de cambio es velocidad instantánea. En consecuencia, para conocerla, debe calcular la primera derivada y evaluarla para el tiempo dado. Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva, necesita calcular la pendiente de la recta, que se logra conociendo la primera derivada de la función, y evaluándola para el tiempo dado. Además, una vez conocido el punto de tangencia y la pendiente, se puede determinar la ecuación de la recta tangente. El problema 3 tiene el propósito de identificar, a partir de la gráfica de una función y de su primera y segunda derivada, los intervalos del dominio y rango de f(x), que determine los intervalos donde f(x) < 0 y f(x) >0, la monotonía de la función y la concavidad.

Cabe señalar que las curvas de la Figura 3, se identificaron con su respectivo nombre; a saber, función, primera derivada y segunda derivada. El cuestionario se aplicó al finalizar el ciclo escolar 2014–2015, en una semana se trabajó con los trescientos estudiantes en sus respectivas escuelas y en presencia de sus respectivos docentes; se entregó en hojas impresas y se estimó un tiempo aproximado de dos horas para resolverlo.

2. Puesta en ejecución de la propuesta y resultados

La solución de los problemas con las prerrogativas expuestas en la metodología y dejando en libertad al estudiante para disfrutar sus aciertos y sus errores, los resultados son los siguientes.

La Figura 4 muestra la construcción con cartulina de un recipiente sin tapa de volumen máximo, resuelto a lápiz y papel, utilizando el algoritmo de máximos y mínimos; asimismo, en el fondo, se presenta el trazo de las gráficas de la función, de su primera y segunda derivada.

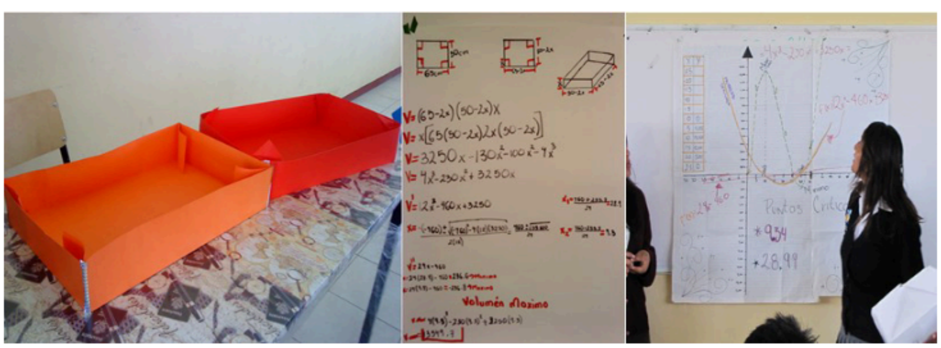
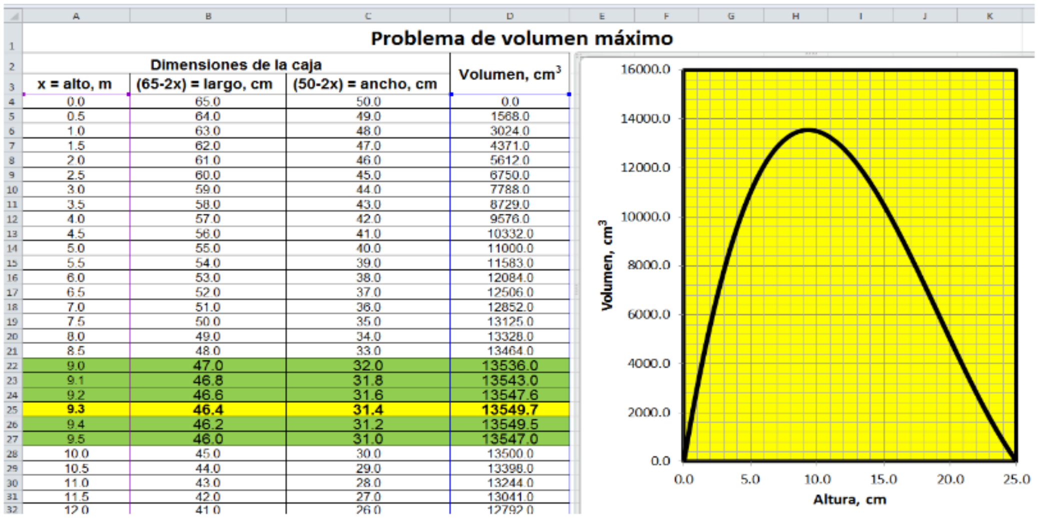


Figura 4. Recipiente sin tapa y obtención de su volumen máximo.

La Figura 5 hace patente al volumen máximo obtenido con Excel, en este caso V=13549.7 cm^3, y la gráfica de la función; obsérvese que hay un análisis más exhaustivo para una altura comprendida entre 9 y 9.5 cm, pues se dieron cuenta los estudiantes que en ese intervalo se encontraba el volumen máximo. Todavía se podían obtener valores con mayor aproximación al máximo solicitado, pero en este punto se cerró el análisis.



Problema de volumen máximo

x = alto, m	(65-2x) = largo, cm	(50-2x) = ancho, cm	Volumen, cm^3
0.0	65.0	50.0	0.0
0.5	64.0	49.0	1568.0
1.0	63.0	48.0	3024.0
1.5	62.0	47.0	4371.0
2.0	61.0	46.0	5612.0
2.5	60.0	45.0	6750.0
3.0	59.0	44.0	7788.0
3.5	58.0	43.0	8729.0
4.0	57.0	42.0	9576.0
4.5	56.0	41.0	10332.0
5.0	55.0	40.0	11000.0
5.5	54.0	39.0	11583.0
6.0	53.0	38.0	12084.0
6.5	52.0	37.0	12506.0
7.0	51.0	36.0	12852.0
7.5	50.0	35.0	13125.0
8.0	49.0	34.0	13328.0
8.5	48.0	33.0	13464.0
9.0	47.0	32.0	13536.0
9.1	46.8	31.8	13543.0
9.2	46.6	31.6	13547.6
9.3	**46.4**	**31.4**	**13549.7**
9.4	46.2	31.2	13549.5
9.5	46.0	31.0	13547.0
10.0	45.0	30.0	13500.0
10.5	44.0	29.0	13398.0
11.0	43.0	28.0	13244.0
11.5	42.0	27.0	13041.0
12.0	41.0	26.0	12792.0

Figura 5. Análisis del volumen máximo con su gráfica realizada con Excel.

Por otro lado, Geogebra se caracteriza por ser interactivo; además, provee una vista algebraica y otra gráfica, lo cual permite al estudiante comprobar su solución y cualquier corrección la puede discutir de inmediato con el docente. En la Figura 6, se presenta la gráfica de la función de volumen construida con este software, aquí el volumen máximo que puede contener el recipiente es V=13549.93 cm^3, también se muestra la gráfica de su primera y segunda derivada.

Al construir los estudiantes su modelo de solución, relacionan variables cuando cambian el lenguaje coloquial del problema a un lenguaje matemático. Y una vez conocida la función de volumen, así como su gráfica, determinan el dominio y rango de la función; al conocer las raíces de f(x), establecen los intervalos donde $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$. Después de localizar los máximos y mínimos, analizan la monotonía y con el punto de inflexión la concavidad de la función.

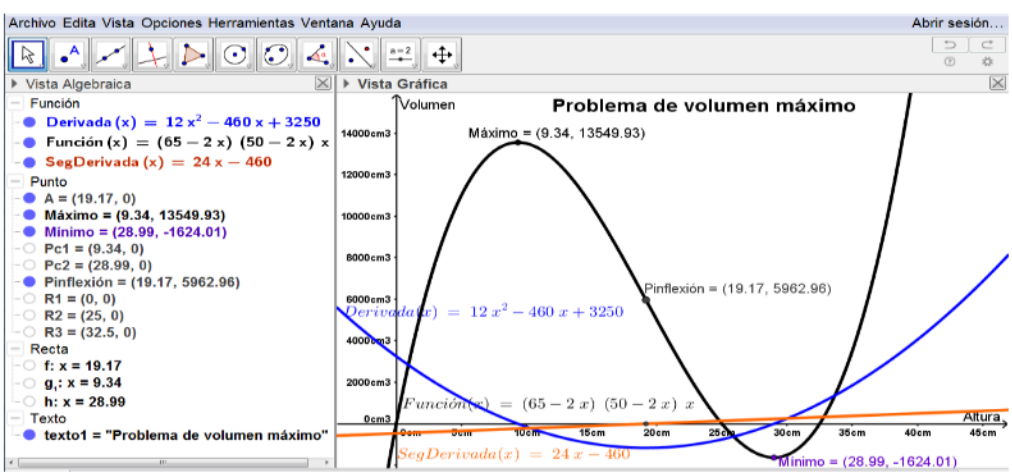


Figura 6. Análisis de la función de volumen máximo con Geogebra.

El permitir que los estudiantes expresen sus propuestas de solución a los problemas planteados, dimana en un mayor interés por la materia y se evita caer de inmediato en procesos algebraicos, lo cual es común encontrar en algunos libros de texto.

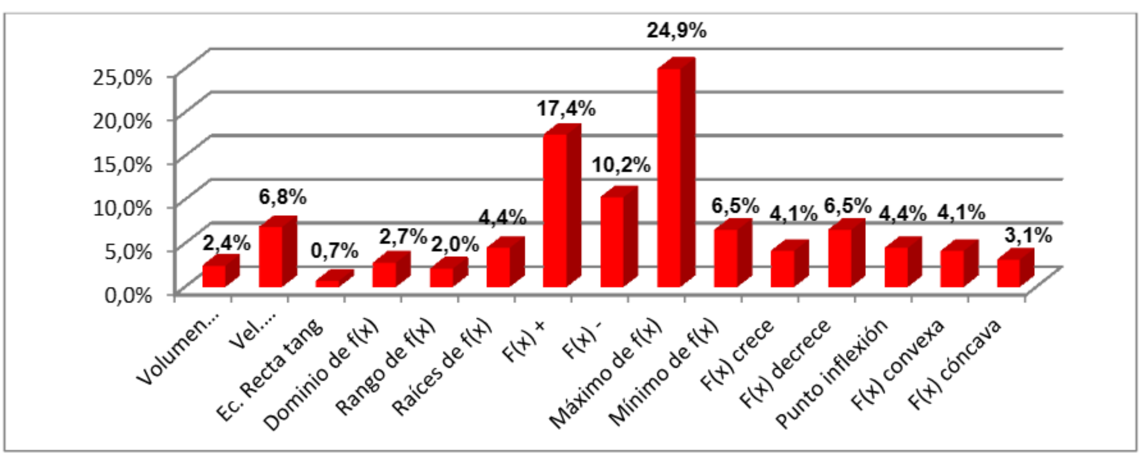
No siempre llegan a la respuesta correcta en su primer intento; en ocasiones se requiere hacer una revisión a cada uno de los procesos de solución a fin de identificar sus errores -de hecho, es de donde más aprenden- antes de sugerir una enmienda. Así mismo, cuando conoce la gráfica de la función, el estudiante construye su conocimiento, pues les encuentra un significado a los conceptos involucrados. En la liga http://astro.inaoep.mx/archivos/nathalie/Corona/Tareas.pdf se encuentran algunas actividades propuestas a los estudiantes para ser realizadas en Excel y Geogebra.

3. Discusión

La Gráfica 1 muestra que el 2.4% de los 300 estudiantes resolvió el problema de volumen máximo. Se observaron dificultades para relacionar el volumen del recipiente en función de sus lados, así como problemas algebraicos. La mayoría no realizó un análisis dimensional, mucho menos notó que las unidades volumétricas son producto de las tres dimensiones lineales de la caja. Algunos siguieron el algoritmo de máximos y mínimos con diversos errores en su proceso; otros obtuvieron un volumen negativo. De los estudiantes que determinaron la respuesta correcta algunos siguieron otros métodos; por ejemplo, la encontraron con procesos mentales no escritos, pues solo presentaron algunas operaciones considerando las dimensiones de la caja.

En la misma gráfica se observa que el 6.8% de los estudiantes calculó la velocidad instantánea. En este problema varios estudiantes obtuvieron la primera derivada, pero les faltó evaluarla para t=3 s; otros localizaron en la gráfica la altura para t=3 s; algunos más expresaron su resultado en km/h, cuando las unidades dadas eran m/s. Solo el 0.7% determinó la ecuación de la recta tangente.

Por lo que concierne a la tercera parte del cuestionario, los estudiantes no se dieron cuenta que las gráficas de la función, de su primera y segunda derivada correspondían a la solución del problema 1 de volumen máximo. La Gráfica 1 indica que menos del 3% de los estudiantes logró identificar los intervalos del dominio y rango de f(x); de ellos, menos del 50% utilizó la notación correcta de intervalos. El 4.4% determinó las raíces de la función, demostrando con ello que desconocen el concepto de raíz de una función. El 17.4% reconoció los intervalos donde $f(x) > 0$ y el 10.2% donde $f(x) < 0$. El 24.9% ubicó el máximo de f(x), mientras que el mínimo de f(x) lo identificó sólo el 6.5%. Menos del 7% determinó los intervalos donde la función crece y decrece. El punto de inflexión fue identificado por el 4.4% de estudiantes, mientras que el 4.1% pudo determinar la concavidad de la función.



Gráfica 1. Resultados del cuestionario aplicado a 300 estudiantes.

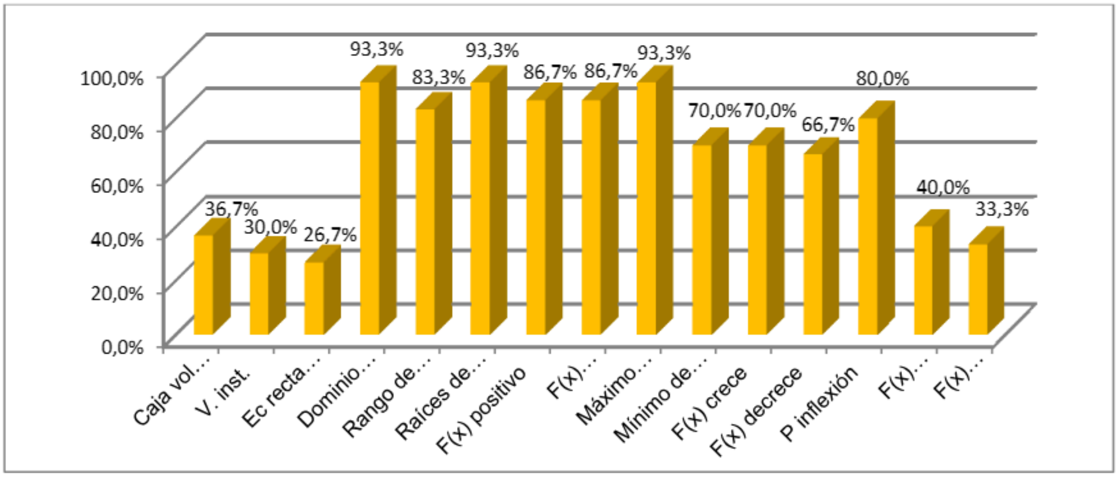
Fuera de contexto, pero digno se hacer mención, es que algunos cuestionarios fueron regresados sin ser resueltos; también se notó que, durante su aplicación, algunos estudiantes trataron de pedir las respuestas a sus compañeros, pero después del llamado de atención de sus docentes, continuaron trabajando. Durante la aplicación, se notó prestancia por parte de los profesores, pues, cuando se lo solicitaban, les hacían sugerencias a sus estudiantes.

A continuación, discutiremos los resultados del cuestionario después de haber aplicado la propuesta al grupo piloto. No se aplicó a los 300 estudiantes porque no teníamos participación como docentes en esos bachilleratos, sólo en uno: el Bachillerato EMSAD Octavio Paz. Vale la pena señalar que este plantel se localiza en la periferia de la ciudad de Puebla; en donde, además, se tienen situaciones de inseguridad, adicciones, problemas socioeconómicos y poco interés de los estudiantes en continuar con estudios a nivel superior.

La Gráfica 2 presenta los resultados del mismo cuestionario aplicado a esos 40 estudiantes del plantel mencionado; indica, también, que el 36.7% resolvió el problema de volumen máximo. En el caso de la velocidad instantánea, el 30% de los sustentantes la calculó de manera correcta, mientras que el 26.7% logró determinar la ecuación de la recta tangente. También se aprecia que el 93% de los estudiantes acertó en los intervalos del dominio, las raíces y el máximo de f(x). Los intervalos donde $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$ lo hallaron correctamente el 86.7%, en tanto que el 83.3% logró situar el rango de la función. De la misma manera, el 80% identificó el punto de inflexión y solo el 70% consiguió localizar el mínimo de la función y los intervalos donde crece. Los intervalos donde f(x) decrece fue resuelto de forma correcta por el 66.7%. El 40% pudo determinar los intervalos donde la función es convexa y solo el 33.3% donde es cóncava.

Debido a que las muestras no son iguales, no podemos establecer comparaciones de manera contundente; sin embargo, se puede hacer notar que, sin la aplicación de la propuesta, el promedio porcentual de respuestas correctas es 6.8% (Cf. Gráfica 1) y con la propuesta, es del 66% (Cf. Gráfica 2), lo cual muestra la viabilidad del método. No obstante, crear las condiciones para aplicar la propuesta a una muestra mayor, antes y después de su aplicación, y con ello probar de manera contundente su validez, es una tarea para ampliar el trabajo.

El hacer construcciones a escala en la presentación de sus modelos de solución y complementar las actividades con el software, crea diversas formas de pensamiento lógico en los estudiantes, amén de hacer más ameno y divertido el trabajo en el aula. Además, con anterioridad, los estudiantes utilizaban el teléfono celular sólo como calculadora; ahora, con Geogebra descargado en su dispositivo electrónico, se han dado cuenta de su amplia utilidad en las matemáticas.



Gráfica 2. Resultados del cuestionario aplicado a estudiantes del Bachillerato Octavio Paz

Debe agregarse que, debido a los diversos análisis requeridos para resolver los problemas, las fórmulas lógicas, usadas en Excel, desarrollan tanto el razonamiento lógico matemático como el proceso de abstracción. En el caso de Geogebra, los estudiantes disfrutan interactuar con este software. Asimismo, el aprendizaje se torna significativo; pues no solo resuelven los problemas con lápiz y papel, sino que al interactuar con el dispositivo juegan con su modelo de solución. Cuando se equivocan, vuelven a revisar su proceso de solución y corrigen a manera de diversión sus errores.

4. Conclusiones

Con base en los datos obtenidos antes y después de aplicar la propuesta didáctica expuesta en el presente trabajo *videlicet* 6.8% contra 66%, respectivamente, podemos afirmar que la propuesta funciona y es de viabilidad general. Además, se comprueba que el uso de representaciones en la computadora para conocer el comportamiento de una función y resolver diversos problemas de optimización, cobra importancia debido a que en el aula se tienen estudiantes con diferentes formas de aprendizajes, visuales, auditivos y kinestésicos. Así mismo, la incorporación de medios tecnológicos a los procesos de aprendizaje, prueba que, además de mejorar el quehacer en el aula, el aprendizaje se vuelve divertido y constructivo; ya que, durante el tiempo que dedican los estudiantes a interactuar con el software, intercambian comentarios con sus compañeros y entre ellos se explican y corrigen; al docente le preguntan solo en caso de que sus compañeros de grupo no puedan auxiliarlos. Queda como trabajo futuro hacer las adecuaciones pertinentes para ampliar la muestra de aplicación a fin de darle una evaluación contundente de validez general.

Agradecimientos

Sean estas líneas pública protesta de nuestra gratitud y reconocimiento a los directores, docentes y estudiantes que respondieron a los cuestionarios para llevar a cabo el presente trabajo, a saber: Preparatoria Alfonso Calderón Moreno de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Bachillerato del Benemérito Instituto Normal del Estado (BINE), a los Bachilleratos Generales Estatales: Ignacio Manuel Altamirano, Vicente Suárez Ferrer, San Andrés, Francisco I. Madero, Justo sierra y los Bachilleratos EMSAD: José Ignacio Roxas, Catalina Salvatori Colombo y Octavio Paz.

Finalmente, uno de los autores (LRE) dedica el presente trabajo a su esposa Evelia y a sus hijas Isabela Ixchel, Lucía e Iris Monserrat, en agradecimiento por el tiempo y paciencia que le han brindado para llevarlo a cabo.

5. Referencias

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). *Computer mediated learning: An example of an approach*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5: 25-45.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* Subsecretaría de Educación Media Superior. México, Distrito Federal.

Cuevas, V., Rodríguez, E. y González, O. (2014). *Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales*. El Cálculo y su Enseñanza. Año 5. Vol.5. septiembre 2013 a septiembre 2014. Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN). México. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_cálculo/

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México. Díaz de Santos.

Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis*. Lecturas en didáctica de las matemáticas SME-CINVESTAV. México.

Gamboa, A. R. (2007). *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 2, Número 3.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). *What is Dynamic Geometry*? In Lehrer, R. & Chazan, D. (Eds.), Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, London: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Rescatado de http://www.academia.edu/807014/ Dificultades_en_el_aprendizaje_del_c%C3%A1lculo

Riestra, J. A. y Ulin, C.A. (2003). *Tangencia, contacto y la diferencial*. En E. Filloy (Ed.) Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual. México. Fondo de Cultura Económica.

Santos, T. L. M. (2001). *El Uso de Software Dinámico en el Desarrollo de Significados y Conexiones en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Cinvestav–IPN.