Un acercamiento funcional a inecuaciones

Jesús Alfonso Riestra Velázquez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN
México

Autor de correspondencia. Jesús Alfonso Riestra Velázquez

Resumen. Esta propuesta didáctica y curricular se inscribe en dos proyectos académicos que han surgido en el DME del Cinvestav y que tienen en común el posponer las definiciones generales de los conceptos involucrados. En particular, desarrollar inicialmente la teor´ıa para funciones rela-tivamente sencillas. Ambos, también, contemplan introducir el continuo aritmético (los números reales) de manera intuitiva y significativa en contraposición al esquema Cantoriano de postular su existencia, impl´ıcitamente determinada por un sistema de axiomas (axiomas de campo, axiomasde orden y el axioma de completitud o de continuidad). Cualquier profesor de Cálculo admite que tal introducción resulta muy abstracta y difícil de digerir por el estudiante. Sin embargo, muchos argumentan que tal preámbulo es necesario, pues se requiere, por ejemplo, para la resolución de inecuaciones que esta´ contemplada en el programa. Ofrecemos aqu´ı una alternativa para resolver inecuaciones, reduciéndolas a ecuaciones del mismo tipo y utilizando un principio (intuitivo) de continuidad para funciones.
Palabras clave. Didáctica, función, cálculo diferencial, axiomas

Abstrrac. This didactic and curricular proposal is part of two academic projects that have emerged in Cinvestav's DME and that have in common the postponement of the general definitions ofthe concepts involved. In particular, initially develop the theory for functions relatively simple. Both, too, contemplate introducing the arithmetic continuum (the numbers real) in an intuitive and meaningful way as opposed to the Cantorian scheme of postulating its existence, implicitly determined by a system of axioms (field axioms, axioms order and the axiom of completeness or continuity). Any Calculus teacher admits that Such an introduction is very abstract and difficult for the student to digest. However, many argue that such a preamble is necessary, since it is required, for example, for the resolution of inequations that is contemplated in the program. We offer here an alternative to solve inequalities, reducing them to equations of the same type and using an (intuitive) principle of continuity for functions.
Keywords. Didactics, function, differential calculus, axioms

1. Introducción

El escrito pretende dar a conocer una serie de ideas y reflexiones que son parte del diseño de un curso de Cálculo Diferencial en el que el desarrollo del mismo sea más acorde al desarrollo histórico del Cálculo, tanto en el aspecto conceptual como en el de las aplicaciones. Sólo con esto se conseguiría una presentación más didáctica que la tradicional que pretende introducir los conceptos o ideas a través de definiciones o reglas abstractas dadas en toda su generalidad de golpe y porrazo, cuando en el devenir histórico tales conceptos (o ideas) partieron de casos concretos o particulares primero en forma rudimentaria y pasaron por varias etapas hasta al- canzar el actual grado de refinamiento. Ha de decirse que no se pretende aqu´ı emular de una manera ingenua el desarrollo histórico, sino más bien en forma de síntesis, así que esto deja muchos huecos por llenar. También está el asunto de que las diversas partes del curso de Cálcu- lo sufrieron desarrollos cronológicamente distintos. Las derivadas, por ejemplo, se calcularon y se aplicaron poderosamente antes de tener un modelo sólido del continuo aritmético, esto es, de los números reales.

Esta propuesta didáctica y curricular se inscribe en dos proyectos académicos que han surgido en el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav. Uno referente a investiga- ciones educativas acerca del concepto de función (Pluvinage&Cuevas 2006) y el otro referente a alternativas para introducir el concepto de derivada (Andreu&Riestra 2005 y 2007, Agui- lar&Riestra 2009). Estos dos proyectos tienen en común el posponer las definiciones generales de los conceptos involucrados. En particular, desarrollar inicialmente la teor´ıa para funcionesrelativamente sencillas. En ambos, también, se contempla introducir el continuo aritmético (los números reales) de manera intuitiva y significativa en contraposición al esquema Cantorian

Fecha de recepción: 08-03-2010
Fecha de aceptación:04-06-2010

de postular la existencia de una estructura matemática, en este caso la de los números reales, implícitamente determinada por un sistema de axiomas (axiomas de campo, axiomas de orden y el axioma de completitud o de continuidad). Casi cualquier profesor de Cálculo admite que tal introducción resulta muy abstracta y difícil (si no imposible) de digerir por el estudiante. Sin embargo, muchos argumentan que tal preámbulo es necesario, pues se requiere, por ejemplo, para la resolución de inecuaciones la cual está contemplada en el programa y resulta además importante o útil. Ofrecemos aquí, entre otras, una alternativa para resolver inecuaciones, reduciéndolas a ecuaciones del mismo tipo y utilizando un principio (intuitivo) de continuidad para funciones algebraicas, mismo que se utiliza para determinar los intervalos de monotonía o concavidad en las aplicaciones del Cálculo Diferencial. En algunos casos, previa factorización, las desigualdades se reducen a la conocida álgebra de signos. Estos acercamientos en la resolución de inecuaciones pretenden, eventualmente, perfilar cuál podría ser un modelo natural y significativo para los números reales que sirva de base.

2. Inecuaciones Lineales y cuadráticas

¿En base a qué propiedades mínimas de los números reales y a qué reglas fundamentales, se va a estar preparado para resolver inecuaciones lineales y cuadráticas? Esta es la pregunta a responder en esta sección.

2.1 Resolviendo inecuaciones lineales

Iniciaremos la discusión, planteando y resolviendo en forma efectiva inecuaciones lineales.

(a) Resolver para x real: $3x - 20 > 2x + 50$

Procederemos como si se tratara de una ecuación ¿Cómo procederíamos si fuese una ecuación? Consideremos pues primero el problema dual (la ecuación en vez de la inecuación). Esto es

Resolver para x real: $3x - 20 = 2x + 50$.

De acuerdo al procedimiento usual, se trata de despejar la incógnita (i.e., la x), utilizando las conocidas reglas de *transposición* para igualdades.

1. Una igualdad se mantiene, si lo que está sumando en un miembro pasa al otro restando y viceversa (si lo que está restando en un miembro pasa al otro sumando).

2. Una igualdad se mantiene, si lo que multiplica a todo un miembro pasa al otro dividiéndolo y viceversa.

$$
\begin{aligned}
3x - 20 &= 2x + 50 \\
3x &= 2x + 50 + 20 \\
3x &= 2x + 70 \\
3x - 2x &= 70 \\
x &= 70
\end{aligned}
$$

Partiendo de la ecuación original, -20 del miembro izquierdo pasa al miembro derecho sumando 20. Luego de efectuar esto último (tercera fila), el sumando $2x$ del segundo miembro pasa al primero restando (i.e., como $-2x$). En el miembro izquierdo, restamos $2x$ de $3x$, lo que nos da x (¿Cómo justificamos esto? Ver 2.4, Ley distributiva.). La x ha sido despejada, su valor es 70. Se comprueba sustituyendo en ambas expresiones que efectivamente es solución: $3(70) - 20 = 190$ y $190 = 2(70) + 50$ ¿Esta comprobación es necesaria o simplemente conveniente?

Nota 1. *Sustituir el valor encontrado ($x = 70$) es, desde luego, una práctica conveniente al resolver una ecuación (como mecanismo de comprobación). Pero pensando en términos generales en resolver* algebraicamente *una ecuación, tal sustitución comprobatoria debería ser una práctica obligada. Nos explicamos, a continuación. Una ecuación, como todo mundo sabe, es una igualdad propuesta que involucra a (por lo menos) una cantidad desconocida o incógnita. El procedimiento algebraico echa mano de la llamada "técnica del problema resuelto", que parte del supuesto de que cada incógnita representa efectivamente el valor buscado (número real, en este caso) que convierte la igualdad propuesta en una verdadera identidad. A continuación se echa mano de las reglas del álgebra para las operaciones entre números reales e igualdades entre ellos, las cuales se dirigen a "despejar" cada incógnita (dejándola sola en un miembro de la igualdad). Si se ha tenido éxito en despejar cada incógnita, no se garantiza con ello que el valor encontrado, en cada caso, resuelve la ecuación original. Este proceso, suponiendo que se ha realizado correctamente, debe leerse de punta a punta, ejemplificado en nuestro caso, como sigue: si x representa una solución de la ecuación $3x - 20 = 2x + 50$ entonces necesariamente $x = 70$, pero el procedimiento algebraico no garantiza (en general) que el valor encontrado sea efectivamente solución. Lo que sí nos dice (y esto tiene la mayor importancia) es que el único candidato a ser solución es $x = 70$. Así que al comprobar, como se hizo antes, que efectivamente este valor es solución de la ecuación estamos, ni más ni menos,* demostrando *que $x = 70$ es la* única *solución de dicha ecuación.*

Procediendo de la misma manera con la desigualdad (y dejando del lado izquierdo la resolución de la ecuación como testigo), obtenemos

$$
\begin{aligned}
3x - 20 &= 2x + 50 \\
3x &= 2x + 50 + 20 \\
3x &= 2x + 70 \\
3x - 2x &= 70 \\
x &= 70
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
3x - 20 &> 2x + 50 \\
3x &> 2x + 50 + 20 \\
3x &> 2x + 70 \\
3x - 2x &> 70 \\
x &> 70
\end{aligned}
$$

¿De veras funciona? Intentando cerciorarnos de que la solución de la inecuación es efectivamente $x > 70$, comprobemos que $x = 71$ satisface la inecuación original, mientras que $x = 69$ no:

Sustituyendo $x = 71$ en la expresión $3x - 20 > 2x + 50$, nos preguntamos $3(71) - 20 \overset{?}{>} 2(71) + 50$, o sea $193 \overset{?}{>} 192$, lo cual respondemos afirmativamente: $3(71) - 20 > 2(71) + 50$.

Mientras que sustituyendo $x = 69$ en la expresión $3x - 20 > 2x + 50$, preguntamos $3(69) - 20 \overset{?}{>} 2(69) + 50$, o sea $187 \overset{?}{>} 188$, lo cual respondemos negando. De hecho se cumple la relación $<$, esto es, se tiene realmente $3(69) - 20 < 2(69) + 50$. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} 3(71) - 20 &> 2(71) + 50 \\ 3(69) - 20 &< 2(69) + 50 \end{aligned}$$

Pareciera demasiado pobre esta prueba, como para cantar victoria ¿Qué tal que existe un $x_2 > 70$ o un $x_1 < 70$, satisfaciendo lo opuesto a $x = 71$ y a $x = 69$, respectivamente? Esto es

$$\begin{aligned} 3x_2 - 20 &\leq 2x_2 + 50 \quad \text{(No cumple la inecuación aunque } x_2 > 70\text{)} \\ 3x_1 - 20 &> 2x_1 + 50 \quad \text{(Sí cumple la inecuación aunque } x_1 < 70\text{)} \end{aligned}$$

En el primer caso, puesto que $x_2 > 70$, la igualdad es imposible, pues la *única* solución a la ecuación $3x - 20 = 2x + 50$ es $x = 70$ (véase Nota 1).

Así, en realidad, estamos planteando las posibilidades

$$\begin{aligned} & 3x_2 - 20 < 2x_2 + 50 \quad \text{(No cumple la inecuación aunque } x_2 > 70\text{)} \\ \text{o bien} \quad & 3x_1 - 20 > 2x_1 + 50 \quad \text{(Sí cumple la inecuación aunque } x_1 < 70\text{).} \end{aligned}$$

Así que en el *primer caso* tendríamos la existencia de dos valores para x, ambos mayores que 70, satisfaciendo

$$3x - 20 < 2x + 50\,,\ \text{a saber, } x = x_2 \quad \text{y} \quad 3x - 20 > 2x + 50\,,\ \text{a saber, } x = 71,$$

lo que implicaría, por un *principio de continuidad*, la existencia de un valor intermedio de x entre x_2 y 71 (y por lo tanto mayor que 70) satisfaciendo la ecuación $3x - 20 = 2x + 50$, contradiciendo que la *única solución* a dicha ecuación es $x = 70$, por lo que queda descartada la existencia de una tal $x_2 > 70$ satisfaciendo la desigualdad invertida. Por consiguiente tenemos que

$$\text{Si } x > 70 \text{ entonces necesariamente} \quad 3x - 20 > 2x + 50\,.$$

De manera similar, el suponer la existencia de $x_1 < 70$ que cumpla con la inecuación conduce a tener dos valores para x, ambos menores que 70, uno cumpliendo con la relación "$>$" y el otro con la "$<$" al comparar dos expresiones en x, luego a la existencia de un valor intermedio x y por lo tanto también menor que 70 satisfaciendo la igualdad, esto es, la ecuación, lo cual contradice que la única solución es el valor 70. En conclusión se tiene

$$\text{Si } x < 70 \text{ entonces necesariamente} \quad 3x - 20 < 2x + 50\,.$$

Juntando los dos resultados anteriores con el tan mencionado de que la igualdad tiene como única solución $x = 70$, llegamos a que la solución general de la inecuación $3x - 20 > 2x + 50$ es $x > 70$, mismo resultado al que se había llegado emulando el procedimiento utilizado para resolver ecuaciones, a saber, utilizando (hasta ahora) para despejar la incógnita sólo la primera ley de transposición (que será referida como *aditiva*), que en su versión para desigualdades queda:

1. Una desigualdad se mantiene, si lo que está sumando en un miembro pasa al otro restando y viceversa

Podría creerse que basta con resolver la igualdad correspondiente y cambiar el signo igual $(=)$ por el de "mayor que" $(>)$ ¿Pero, es eso correcto? Veamos otro ejemplo:

(b) Resolver para x (real): $-3x + 20 > -2x + 90$

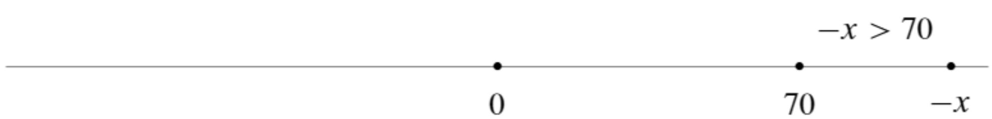
Problema dual (la ecuación en vez de la inecuación)

Resolver para x real: $-3x + 20 = -2x + 90$

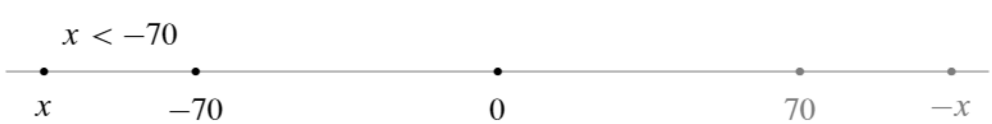
Resolvamos simultáneamente con el procedimiento usual:

$$
\begin{aligned}
-3x + 20 &= -2x + 90 \\
-3x &= -2x + 90 - 20 \\
-3x &= -2x + 70 \\
-3x + 2x &= 70 \\
-x &= 70 \\
x &= -70
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
-3x + 20 &> -2x + 90 \\
-3x &> -2x + 90 - 20 \\
-3x &> -2x + 70 \\
-3x + 2x &> 70 \\
-x &> 70 \\
x &< -70
\end{aligned}
$$

¿Cómo entender el paso de $-x > 70$ a $x < -70$? Primero *algebraicamente:* partiendo de $-x > 70$ transponer x y también 70, obteniendo $-70 > x$ que es lo mismo que $x < -70$, siendo el efecto neto cambiar el signo a ambos miembros e invertir la desigualdad.
Geométricamente: Partiendo de la representación de $-x > 70$ (o lo que es lo mismo $70 < -x$)



Vemos que considerando los aditivos inversos de $-x$ y 70, también llamados *simétricos* (por tener esa característica geométrica), a saber x y -70, obtenemos la siguiente disposición que muestra que $x < -70$:



¡Pero ya no funcionó esa idea que teníamos de resolver la ecuación y luego cambiar el signo igual $(=)$ por el símbolo de desigualdad $(>)$ de la inecuación original!

Y todavía tenemos otro problema de transposición cuando el coeficiente de x no es la unidad. Por ejemplo el siguiente:

(c) Resolver para x (real): $3x + 20 > x + 90$

Como siempre, resolveremos simultáneamente la ecuación correspondiente

$$\begin{aligned} 3x + 20 &= x + 90 & \qquad 3x + 20 &> x + 90 \\ 3x - x &= 90 - 20 & 3x - x &> 90 - 20 \\ 2x &= 70 & 2x &> 70 \\ x &= 35 & x &> 35 \end{aligned}$$

Suena razonable el paso de $2x > 70$ a $x > 35$, pero ¿cómo lo justificamos? La solución está en los signos. Para empezar observe que por simple transposición en una dirección o en la otra, tenemos

$$2x > 70 \quad \text{es equivalente a} \quad 2x - 70 > 0 \quad (\text{léase “}2x - 70\text{” es positivo})$$

Lo que estamos diciendo es que una relación se deduce de la otra. Ahora bien $2(x - 35) = 2x - 70 > 0$. De acuerdo a las reglas de los signos, como 2 es positivo el otro factor, a saber $x - 35$, debe ser positivo también para que el producto sea positivo. Luego se obtiene $x - 35 > 0$, o lo que es lo mismo $x > 35$. Pero para ese caso desde el comienzo pudimos haber planteado: Resolver (x real): $3x + 20 > x + 90$, equivale a resolver $3x + 20 - (x + 90) > 0$. Más generalmente, como veremos, los siguientes enunciados, a continuación, son equivalentes entre sí

$$\begin{aligned} 3x + 20 &> x + 90 && (1) \\ 3x + 20 - (x + 90) &> 0 && (2) \\ 2x - 70 &> 0 && (3) \\ 2(x - 35) &> 0 && (4) \\ x - 35 &> 0 && (5) \\ \text{(y trasponiendo de nuevo)} \qquad x &> 35 && (6) \end{aligned}$$

Esto es, la condición sobre x es la misma en cada enunciado. Veámoslo. Si x es un número real que satisface (1) entonces necesariamente satisface (2) (¿Por qué? por la ley de trasposición aditiva para desigualdades). Y si satisface (2) entonces x satisface (3) (de nuevo la ley de trasposición aditiva). Y así hasta llegar a que entonces x satisface necesariamente (6). Lo que significa que en cada paso obtenemos una condición necesaria para que x sea solución de cualquier inecuación anterior, lo cual está acorde con lo que dijimos del procedimiento algebraico en la Nota 1. Sin embargo, a cada trasposición (aditiva) efectuada, corresponde una trasposición inversa. Así, por ejemplo, (6) se dedujo de (5) trasponiendo el número 35 que estaba restando y pasó sumando (a cero) del lado derecho, luego partiendo de (6) podemos trasponer 35 (que está sumando a cero en el miembro derecho, pensémoslo así) el cual pasará restando de x en el miembro derecho, obteniendo por una trasposición la relación (5), así que (5) es también una condición necesaria para (6). Cada una es condición necesaria para la otra, luego (6) se cumple cuando y sólo cuando se cumple (5). Y podemos empleando la trasposición inversa hacer ver que para el cumplimiento de la relación (5) es condición necesaria el cumplimiento de la relación (4) para ese mismo valor de x.

Nota 2. *En Lógica (y en matemáticas formales), cuando partiendo de una propiedad A se deduce (o es consecuencia) otra propiedad B, se dice que el cumplimiento de la propiedad B es una* condición necesaria *para (el cumplimiento) de la propiedad A, o brevemente,* B es una condición necesaria para A *y significa, desde luego, que* si se cumple A entonces, *necesariamente*, se cumple B. *Pues bien, en tal caso, también suele decirse que* A es una condición suficiente para B. *Cuando ocurre que B es una condición necesaria para A y simultáneamente A es condición necesaria para B (luego los papeles de necesario y suficiente son intercambiables), suele resumirse diciendo que una es una condición necesaria y suficiente para la otra. Este es el caso las relaciones (1) a (6) leídas como condiciones sobre x, donde cada una es una condición necesaria y suficiente para cualquier otra. Así x es solución de una de ellas cuando y sólo cuando es solución de cualquier otra.*

Tal reversibilidad en la ley de trasposición aditiva consigue, pues, que las inecuaciones de cada enunciado del (1) al (6) tengan exactamente las mismas soluciones. Y ya casi tenemos nuestro método que será una combinación de la ley (aditiva) de trasposición, del algebra de signos y argumentos de continuidad. Para verlo en acción, lo aplicaremos primero al problema anterior (del cual por el enunciado (6) tenemos ya la solución) y posteriormente, de manera menos trivial, a una inecuación cuadrática.

Empecemos, como antes, transformando la inecuación original en otra equivalente, pero sólo hasta el paso (3)

$$\begin{aligned} 3x + 20 &> x + 90 \\ 3x + 20 - (x + 90) &> 0 \\ 2x - 70 &> 0 \\ [\,g(x) &> 0 \quad \text{donde } g(x) = 2x - 70\,] \end{aligned}$$

Luego, para resolver la última desigualdad, a saber, $g(x) = 2x - 70 > 0$, resolvemos la ecuación correspondiente, $2x - 70 = 0$ que, desde luego, nos da $x = 35$ y ésta es su única solución (¿Por qué?). Así que ya sabemos donde exactamente se anula la función $g(x) = 2x - 70$, a saber $g(35) = 0$. Así que dicha función, por continuidad, tendrá uno y el mismo signo en cada uno de los intervalos abiertos

$(-\infty, 35)$ y $(35, \infty)$ identificados a las desigualdades $x < 35$ y $x > 35$, resp.

El signo de la función en el primer intervalo, $(-\infty, 35)$, no puede cambiar, porque entonces para un punto intermedio, también en dicho intervalo, la función tendría que ser cero (y eso sólo ocurre en $x = 35$ que no pertenece al intervalo), luego su signo será el mismo que el de $x = 34$, a saber, $g(34) = -2$, esto es, signo negativo; mientras que para el segundo intervalo tomemos $g(36) = 2$, que nos dice que será positivo (justamente el que nos interesa). La siguiente figura ilustra la situación de los signos de la función y la validez:

negativo $(-)$ [NO] — 35 — positivo $(+)$ [SÍ]

Intervalo solución

Donde el SÍ, se refiere a que sí cumple el signo requerido y NO a lo contrario. Así que la solución de la inecuación $2x-70 > 0$ (y por lo tanto de la ecuación original) es el intervalo $(35, \infty)$, que no es otra cosa que la traducción literal de la condición (6), a saber $x > 35$. Entonces el lector se preguntará, por qué la hicimos tan larga. La respuesta, es que el método, aunque en este caso particular resulte más largo, tiene como compensación su carácter más general, como empezará a apreciarse en la solución de ecuaciones cuadráticas y de manera todavía más contundente más adelante, en la siguiente subsección, reservada a los casos difíciles.

2.2 Resolviendo inecuaciones cuadráticas

(d) Resolver para x (real): $x^2 - 20x > -4x + 17$.

Empezamos trasponiendo y luego simplificamos, como se muestra:

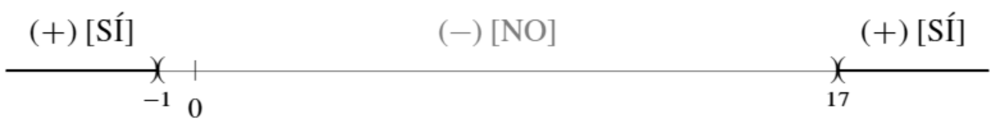
$$\begin{aligned} x^2 - 20x &> -4x + 17 \qquad (7)\\ x^2 - 20x - (-4x + 17) &> 0\\ x^2 - 20x + 4x - 17 &> 0\\ x^2 - 16x - 17 &> 0\\ f(x) &> 0\,, \quad \text{donde } f(x) = x^2 - 16x - 17 \qquad (8) \end{aligned}$$

Entendemos que resolver la inecuación original (7) y la última (8) es la misma cosa: las dos inecuaciones son equivalentes y por lo tanto tienen exactamente las mismas soluciones (¿Por qué? La reversibilidad de la ley de trasposición aditiva).

Ahora bien, para resolver la última inecuación, resolvamos primero la ecuación $f(x) = x^2 - 16x - 17 = 0$ que nos da ($x = 8 \pm \sqrt{64 + 17}$) las raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 17$. Quitando las dos raíces (ceros de la función f) del conjunto de los números reales, obtenemos tres intervalos abiertos, en cada uno de los cuales la función debe tener el mismo signo (pues no hay ya raíces de la función en cada uno de ellos).

En el intervalo $(-\infty, -1)$, el valor $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(-2) = 4 + 32 - 17 > 0$.
En el intervalo $(-1, 17)$, $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(0) = -17 < 0$.
En el intervalo $(17, +\infty)$, $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(20) = 400 - 320 - 17 > 0$.

A continuación su representación geométrica, con nuestras convenciones



En resumen, $x^2 - 16x - 17 > 0$ para x en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(17, +\infty)$. Suele decirse que el *conjunto solución* de la inecuación es $(-\infty, -1) \cup (17, +\infty)$ (la unión de los intervalos).

2.3 Los casos excepcionales

El método que estamos desarrollando parece funcionar bien. Sin embargo, existen casos excepcionales. Los primeros dos los ejemplificamos en el caso *lineal*, pero igualmente se podrían presentar en el caso cuadrático.

(e) Resolver para x (real): $2x + 20 > 2x + 90$.

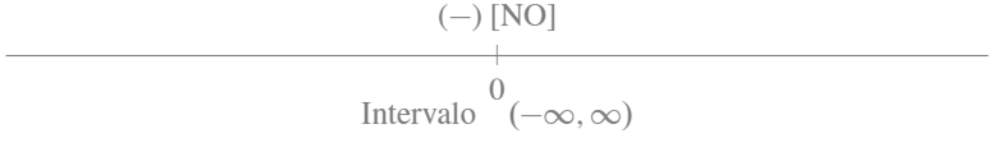
Como antes, empezamos trasponiendo y luego simplificamos, como se muestra:

$$\begin{aligned} 2x + 20 &> 2x + 90 \\ 2x + 20 - (2x + 90) &> 0 \\ -70 &> 0 \end{aligned}$$

¿Pero qué ha pasado aquí? Intentábamos llegar a una inecuación en términos de signos y en vez de eso acabamos con una relación absurda que nos dice algo evidentemente falso: “-70 es mayor que cero”. Pero en vez de entrar en pánico, procedamos de acuerdo al método pero esta vez hasta el final:

$$\begin{aligned} 2x + 20 &> 2x + 90 && (9) \\ 2x + 20 - (2x + 90) &> 0 && (10) \\ -70 &> 0 \\ g(x) &> 0\,, \quad \text{donde } g(x) \equiv -70 && (11) \end{aligned}$$

En (11), $g(x) \equiv -70$ (léase “$g(x)$ es idénticamente -70”) significa que g es una función constante de valor -70. Recordemos que la inecuación original (9) y la inecuación final (11) son equivalentes, esto es, tienen exactamente las mismas soluciones. Naturalmente, de acuerdo al método, procedemos a resolver la última inecuación. Para ello, planteamos primero la ecuación $g(x) = 0$, la cual en este caso no tiene solución (los valores de la función todos coinciden entre sí y son iguales a -70. En cada uno de los intervalos que resulten, después de quitar las raíces, la función debe tener el mismo signo. En este caso, el único intervalo que resulta, $(-\infty, \infty)$, al quitar nada al conjunto de todos los números reales y entonces la función g debe tener el mismo signo en dicho intervalo y lo tiene en efecto, la función es negativa siempre (siempre obtiene el valor -70). O lo que viene a ser lo mismo, nunca cumple $g(x) > 0$ para x real alguno. En vez de decir que la inecuación original (9) *no tiene solución*, suele decirse que su conjunto solución es el *conjunto vacío*, denotado con $\emptyset$. La siguiente representación geométrica trata de ilustrar la situación:



Veamos otro ejemplo para apreciar el reverso de la moneda:

(f) Resolver para x (real): $5x - 2 > 5x - 9$.

Como siempre, primero trasponemos todo al miembro izquierdo, simplificamos y finalmente introducimos la función:

$$
\begin{aligned}
5x - 2 &> 5x - 9 && (12)\\
5x - 2 - (5x - 9) &> 0 && (13)\\
7 &> 0 &&\\
f(x) &> 0\,, \quad \text{donde } f(x) \equiv 7 && (14)
\end{aligned}
$$

Hay que resolver primero la ecuación $f(x) = 0$. Pero de nuevo no hay valor real alguno de x que la cumpla, pues se tiene $f(x) = 7$ para cualquier x real. Así que el intervalo que resulta de quitar nada al conjunto de los reales es otra vez $(-\infty, \infty)$, donde la función f mantiene su signo, que ya sabemos que es positivo. Así pues en dicho intervalo $(-\infty, \infty)$, la función es positiva, lo que quiere decir que $f(x) > 0$ para todo x real. El conjunto solución de la inecuación (14) es el intervalo $(-\infty, \infty)$, o si se quiere el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. A continuación intentamos la representación geométrica (no hay ceros; y se tiene un mismo signo):

(+) [SÍ]

0

Intervalo Solución $(-\infty, \infty)$

No está por demás ver un último ejemplo que presenta características distintas que lo hacen merecedor de ser incluido en esta sección.

(g) Resolver para x (real): $1 - 2x^2 < 9 - 8x$.

Como siempre, primero trasponemos todo al miembro izquierdo, simplificamos y finalmente introducimos la función:

$$
\begin{aligned}
1 - 2x^2 &< 9 - 8x && (15)\\
1 - 2x^2 - (9 - 8x) &< 0 &&\\
-2x^2 + 8x - 8 &< 0 && (16)\\
-2(x^2 - 4x + 4) &< 0 && (17)\\
x^2 - 4x + 4 &> 0 && (18)\\
g(x) &> 0\,, \quad \text{donde } g(x) = x^2 - 4x + 4 && (19)
\end{aligned}
$$

Pudimos haber cortado en el paso (16), esto es ahorrarnos las relaciones en (17) y (18), tomando $g(x)$ como la expresión del miembro izquierdo en (16), pero preferimos factorizar por razones estéticas (deshaciéndonos de “estorbos”). Es importante, sin embargo, notar que los pasos son reversibles. Así, por ejemplo, (18) establece la condición de que x haga positiva a la expresión $x^2 - 4x + 4$, que de cumplirse hará negativo al producto de -2 por dicha expresión, lo que justamente establece la condición (17). Tal reversibilidad de los pasos es la que garantiza que la condición (implícita) en la desigualdad original (15) es equivalente a la condición de la última (19).

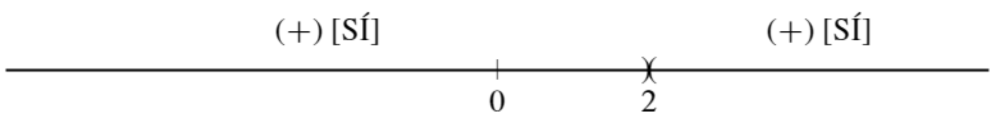
Regresando a nuestro asunto, para resolver (19), empezamos, como siempre, resolviendo la ecuación $g(x) = 0$, esto es,

$$x^2 - 4x + 4 = 0\,; \quad \text{resolviendo obtenemos } x = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 4} = 2\,.$$

Como se comprueba inmediatamente que $x = 2$ resuelve dicha ecuación cuadrática, resulta que esta es la única solución a $g(x) = 0$. Quitando al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales el valor 2, obtenemos los intervalos abiertos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$ en cada uno de los cuales la función g tiene un mismo signo. Para encontrar dichos signos basta conocer el signo de un punto cualquiera de cada intervalo:

$$\begin{aligned} g(0) &= 4\,, \text{ luego } g(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en el intervalo } (-\infty, 2). \\ g(3) &= 1\,, \text{ luego } g(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en el intervalo } (2, \infty). \end{aligned}$$

El conjunto solución de (15) será entonces la unión $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Ilustramos geométricamente la situación de los signos:



La característica distintiva del ejemplo es que la función no registra un cambio de signo al pasar de un intervalo a otro, como ocurría en los ejemplos precedentes en los que se tenían dos intervalos abiertos o más separados por las raíces de la función.

2.4 Propiedades Básicas Necesarias

En esta subsección intentamos rescatar las propiedades esenciales que se requieren para resolver inecuaciones, no sólo como recursos técnicos, sino para que el método empleado resulte convincente y, de hecho, didácticamente adecuado.

Ya hemos dejado establecidas unas propiedades fundamentales, a la que hemos recurrido sistemáticamente en la resolución de inecuaciones. Están en primer sitio la *ley de trasposición aditiva*:

> *Una igualdad o desigualdad se mantiene, si lo que está sumando en un miembro pasa al otro restando y viceversa.* Simbólicamente: De $a + b = c$ se deduce que $a = c - b$. Y de $a + b > c$ se deduce que $a > c - b$.

Riestra Velázquez, J. A. Un acercamiento funcional a inecuaciones. *El Cálculo y su Enseñanza* ©2009 Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D. F.

Luego la *regla de los signos*:

> *El producto de dos números que tienen el mismo signo es positivo, mientras que el de dos números de signo contrario es negativo, esto es,* $(+)(+) = (-)(-) = (+)$ *y* $(+)(-) = (-)(+) = (-)$

Y la ley distributiva, probablemente todo el tiempo leída a la inversa (como regla de factorización):

> *Para cualesquiera tres reales a, b y c se tiene* $ab + ac = a(b + c)$

Está, también, la representación geométrica de los números reales como puntos de una recta orientada que posee un origen y una escala (una unidad), mejor conocida como *eje real*. Esto es básico y no sólo para la representación geométrica de la relación de orden (y con ella la de los intervalos), sino que además permite obviar otras propiedades básicas que hemos estado empleando (algunas implícitamente), como es el caso de la *ley de tricotomía* que para el caso del cero, se puede enunciar:

> *Cualquier número real* x *satisface una y sólo una de las siguientes tres posibilidades* $x < 0$ *o* $x = 0$ *o* $x > 0$.

Si se le mira geométricamente resulta muy natural: Un número real cualquiera x se ubica en el eje real ya sea a la izquierda del origen (cuando es negativo), o bien coincidiendo con el origen (cuando es cero), o bien, por último, a la derecha del origen (cuando es positivo) y desde luego dichas posibilidades son mutuamente excluyentes.

Resulta sorprendente, por decir lo menos, que la mayoría de los textos de Cálculo le presten tan poca atención a la representación geométrica de los números reales y nada a la representación de la relación de orden (Bartle 1980 y Lang 1968). Hay honrosas excepciones (Haaser, LaSalle y Sullivan, 1970), donde se enfatiza la correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta orientada (eje real), se representa geométricamente la relación de orden y se tiene una sección de un capítulo dedicada a la representación geométrica de los números reales donde se representa incluso la adición de números reales. Hay que admitir, sin embargo, que se queda muy corta: sólo se ilustra una operación (adición), sólo se intenta justificar geométricamente uno de los axiomas (la conmutatividad de la adición, incorrectamente por cierto), esta sección es posterior a la introducción de los axiomas de campo (i.e. no precede a la parte algebraica), aunque hay que reconocerle que apunta en la dirección correcta representado a los reales como segmentos dirigidos.

Retomando el hilo conductor, recordemos la conveniencia de introducir el aditivo inverso de un número real a, también llamado *simétrico de a* (justamente por su representación geométrica), el cual se denota con $-a$. Ya tuvimos oportunidad de utilizarlo cuando en el proceso de despejar obteníamos $-x$ de un lado de la desigualdad y un número en el otro miembro, digamos $-x > a$ y deseábamos acabar de despejar a x, el argumento de la representación geométrica es que los simétricos cumplían la desigualdad invertida ($x < -a$). El asunto tiene sus bemoles, pues los alumnos tienden a pensar que $-x$ es siempre negativo. Así que se impone una pequeña digresión al respecto que tiene por propósito hacer una fina distinción entre *signo aritmético* y *signo algebraico*.

Empezaremos diciendo que no existe tal cosa como números constantes y números variables. Todos los números son constantes. La clasificación en constantes y variables se refiere a los *símbolos* (Tarski, 1965). Una *constante* (por ejemplo a, b, c, etc.) se refiere a un símbolo que representa a un objeto particular y una *variable* (por ejemplo r, t, x, etc.) es un símbolo que representa a un objeto cualquiera de cierta colección. Para nuestros fines, pensaremos en constantes y variables numéricas, así que una constante representará a un número particular y una variable es un símbolo que representa a un número cualquiera de una cierta colección.
El *signo aritmético* se refiere al signo aplicado a un numeral. Por ejemplo, para el numeral "12.34" ausencia de signo significa que es positivo (o sea, 12.34 se identifica con $+12.34$) y el numeral precedido del signo "–" que es negativo:

12.34 es positivo (no hay signo presente), mientras que -12.34 es negativo (está precedido de "–").

El *signo algebraico*, en cambio, se refiere al signo aplicado a un símbolo (numérico), esto es, a una constante numérica o a una variable numérica. Así por ejemplo:

a puede igualmente representar a un positivo o a un negativo (la ausencia de signo no garantiza el signo del número representado por a).

$-a$ también puede representar a un positivo o a un negativo (aunque ahora está precedido de "–", tampoco sabemos el signo del número representado por $-a$, aunque sí sabemos que dicho número tiene el signo *opuesto* al número representado por a).

Más precisamente, $-a$ denota al simétrico de a, sea este último positivo o negativo. La situación se representa geométricamente en ambos casos.

Esta, la de simétrico, es la noción más general pues -12.34 es el simétrico de 12.34, pero recíprocamente también 12.34 es el simétrico de -12.34 (estamos diciendo que $-(-12.34) =$

12.34). Por supuesto, también resulta útil pensar que $-a$ representa cambiarle el signo a a y funciona bien (dos cambios seguidos de signo, nos regresan al original). De hecho, juega un papel fundamental en la definición de *resta algebraica*. Pero antes empecemos con la *suma algebraica*.

Cuando escribimos el signo "+" entre dos numerales, estamos denotando la *suma aritmética* de los números. Pero el mismo signo entre dos símbolos, digamos $a + b$, denota la *suma algebraica* de a con b. Si a y b denotan números con el mismo signo, se trata efectivamente de la *suma aritmética* de dichos números, pero si tienen distinto signo, tendremos de hecho una *resta aritmética*. En el primer caso sumamos las magnitudes de los números y luego le ponemos el signo común. En el segundo caso, del de la magnitud mayor restamos la magnitud menor y al resultado le ponemos el signo del número de mayor magnitud, suponiendo que tienen magnitudes diferentes (y en el caso de magnitudes iguales la resta da cero en cualquier orden y éste es el resultado). Ejemplificando, si $a = -2$ y $b = -1$ entonces $a + b = -(2 + 1) = -3$ (sumamos las magnitudes y ponemos el signo común). Y si $a = -2$ y $b = 1$ entonces $a + b = -(2 - 1) = -1$ (restamos la magnitud menor de la mayor y ponemos el signo del de magnitud mayor).
Similarmente, la *resta algebraica*, digamos $a - b$ se define en términos de la suma algebraica por

$$a - b = a + (-b) \quad \text{(i.e., restar es sumar el simétrico)},$$

que se traduce efectivamente en una resta (aritmética) si a y b tienen el mismo signo, o bien, en una suma en caso contrario.

De hecho la *suma* y la *resta* mencionadas en la ley de trasposición aditiva se refieren justamente a la suma y la resta algebraicas. Más aún, nuestra representación simbólica de la ley (e.g. de $a + b = c$ se deduce que $a = c - b$) ilustra el caso de la suma algebraica. Mas ello es suficiente, pues la resta se reduce a la suma con la utilización del simétrico. Y ya casi por último está el "rollo" de que el álgebra es la "ciencia de las condiciones necesarias", lo cual tendremos oportunidad de apreciarlo en la siguiente sección. Finalmente, el recurso más poderoso, el que nos permitió reducir inecuaciones en ecuaciones, el de *función* con la idea intuitiva de continuidad asociada (para cambiar de signo hay que pasar por cero).

3. Inecuaciones más generales

En esta sección se trata de mostrar que el método desarrollado en la sección anterior funciona para inecuaciones mucho más generales. Se empezará abordando una omisión notable: inecuaciones de primer o segundo grado con valor absoluto.

3.1 Inecuaciones con valor absoluto

Iniciamos con una sencilla y luego pasamos a inecuaciones que son clásicas.

(h) Resolver para x (real): $|2x - 1| < 9$.

Como siempre, primero trasponemos todo al miembro izquierdo, simplificamos y finalmente introducimos la función:

$$\begin{aligned}
|2x-1| &< 9 \\
|2x-1|-9 &< 0 \\
g(x) &< 0\,, \quad \text{donde } g(x) = |2x-1|-9
\end{aligned}$$

Resolvemos primero la ecuación $g(x) = 0$. Hay que tomar en cuenta que el valor absoluto nos da, en principio, dos posibilidades, dependiendo del signo de $2x-1$:

$$\begin{array}{rcrl}
 & |2x-1|-9=0 & & \\
(2x-1)-9=0 & \text{o} & (1-2x)-9 & =0 \\
2x-10=0 & \text{o} & -8-2x & =0 \\
x=5 & \text{o} & x & =-4
\end{array}$$

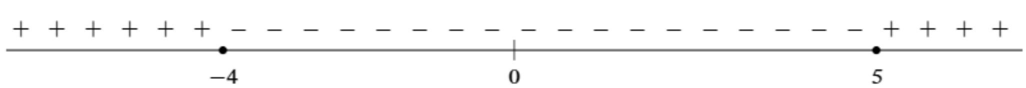
Se comprueba que $g(5) = |9|-9 = 0$ y también que $g(-4) = |-9|-9 = 0$. Debemos, pues, examinar el signo de $g(x)$ en tres intervalos, a saber, $(-\infty,-4)$, $(-4,5)$ y $(5,\infty)$.

En $(-\infty,-4)$ el signo de la función es *positivo*, pues $g(-5) = 2$

En $(-4,5)$ el signo de la función es *negativo*, pues $g(0) = -8$

En $(5,\infty)$ el signo de la función es *positivo*, pues $g(6) = 2$

Así que el conjunto solución de $g(x) < 0$, o sea de la inecuación original, es el intervalo abierto $(-4,5)$. A continuación se describe geométricamente la situación de los signos de la función g, con las raíces (también referidas como los *ceros*) de g marcadas con pequeños círculos negros:



De la figura, vemos también que la solución de la ecuación $|2x-1| \geq 9$ por ser equivalente a $g(x) \geq 0$ (una se deduce de la otra por transposición aditiva) es la unión de los intervalos cerrados donde g es positiva o cero, esto es,

$$\text{el conjunto solución de} \quad |2x-1| \geq 9 \quad \text{es} \quad (-\infty,-4] \cup [5,\infty)\,.$$

Lo cual no debiera sorprender, pues cambiando $<$ por $\geq$ en una tal expresión se consigue la negación de la misma, luego el conjunto solución de esta última es el complemento del de la primera.

Similarmente, de la representación de los signos de g, vemos que el conjunto solución de $|2x-1| \leq 9$ es $[-4,5]$.
Lo cual sólo agrega los valores de la igualdad a la ecuación original $|2x-1| < 9$ que se traducen en los ceros de g (a saber, $x=-4$ y $x=5$). Así que con el método que hemos

desarrollado, que introduce una función y sus signos se “matan varios pájaros de un tiro”, por decirlo llanamente. Esta característica del método se aprovecha para resolver, simultáneamente, varias desigualdades clásicas en el ejemplo siguiente.

(i) Resolver para x (real): $|x-a| > c$, $|x-a| \geq c$, $|x-a| < c$ y $|x-a| \leq c$.

Todas ellas dependen exclusivamente de los ceros y signos de f, donde $f(x) = |x-a| - c$. En efecto, las inecuaciones equivalen, respectivamente, a $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ y $f(x) \leq 0$. Empezamos, desde luego, con las raíces:

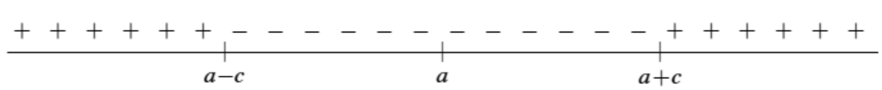
$$\begin{aligned} &|x-a| - c = 0 \\ (x-a) - c = 0 \quad &\text{o} \quad (a-x) - c = 0 \\ x - (a+c) = 0 \quad &\text{o} \quad (a-c) - x = 0 \\ x = (a+c) \quad &\text{o} \quad x = (a-c) \end{aligned}$$

Notamos que $f(a+c) = f(a-c) = |c| - c$, pues $|c| = |-c|$. Ahora tendremos tres casos, dependiendo del signo de c:

$\mathbf{c < 0}$ luego $-c > 0$ y $f(a+c) = f(a-c) = |c| - c = 2(-c) > 0$, lo que significa a la vez que f no tiene raíz alguna y que $f(x) > 0$ para todo x en $\mathbb{R}$. Así que el conjunto solución de las dos primeras inecuaciones es $\mathbb{R}$, mientras que el de las dos últimas es $\emptyset$ (conjunto vacío: no hay solución).

$\mathbf{c = 0}$ luego $f(a) = f(a+c) = f(a-c) = |c| - c = 0$, lo que significa que la única raíz de f es $x = a$. Así que en cada uno de los intervalos $(-\infty, a)$ y (a, ∞), $f(x) = |x-a|$ tendrá un mismo signo, a saber, respectivamente, el de $f(a-1)$ (pues $a-1$ pertenece al primer intervalo) y el de $f(a+1)$ (pues $a+1$ pertenece al segundo intervalo) resultando ambos positivos, pues $f(a-1) = |-1| = 1 > 0$ y también $f(a+1) = |1| > 0$. Luego el conjunto solución de la primera inecuación es $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ (todo $\mathbb{R}$, excepto a), $\mathbb{R}$ el de la segunda, $\emptyset$ (no hay solución) el de la tercera y $\{a\}$ (únicamente $x = a$ es solución) el de la cuarta.

$\mathbf{c > 0}$ luego tanto $a-c$ como $a+c$ son raíces de f, pues $|c| = c$. Así que debemos averiguar los signos de f en los tres intervalos $(-\infty, a-c)$, $(a-c, a+c)$ y $(a+c, \infty)$ que resultan ser, respectivamente, positivo ($f(a-c-1) = |-(c+1)| = c+1$), negativo ($f(a) = -c$) y positivo ($f(a+c+1) = |c+1| = c+1$). Luego, la situación de los signos de f queda:



Luego, en este último caso ($c > 0$) los conjuntos solución son:

$(-\infty, a-c) \cup (a+c, \infty)$ solución de $|x-a| > c$, $(-\infty, a-c] \cup [a+c, \infty)$ solución de $|x-a| \geq c$, $(a-c, a+c)$ solución de $|x-a| < c$ y finalmente, $[a-c, a+c]$ solución de $|x-a| \leq c$.

Referencias bibliográficas

Aguilar, A. M. (2007). *Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. D. F.

Aguilar, A. M. y Riestra, J. A. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. Manuscrito presentado para publicación.

Andreu, M.E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico epistemológica de su desarrollo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza*(157-174). Morelia, Mich., México: Morevallado Editores.

Andreu, M. E. y Riestra, J. A. (2007). ET SI NOUS EN RESTIONS À EULER ET LAGRANGE? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des ètudiants non mathématiciens en début d'etudes supérieures. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg, 12, 165-187.

Bartle, R. (1980) *Introducción al Análisis Matemático* (traduccción de The elements of real analisis, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc.). México, D.F., México: Editorial Limusa, S.A. de C.V.

Haaser, LaSalle y Sullivan (1970) *Análisis Matemático 1: Curso de introducción* (Traducción de Introduction to Analysis, 1st edition, 1959, Blaisdell Publishing Company) México, D.F., México: Editorial Trillas S.A.

Lang, S. (1968). *A First Course in Calculus*. Reading, Massachusetts, USA: Addison-Wesley Plublishing Company Inc.

Pluvinage, F. y Cuevas A. (2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función. En E. Filloy (autor y compilador) *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 141–167). México, Aula XXI, Santillana.

Tarski, A. (1965) *Introduction to Logic*. Third Edition, Revised. New York: Oxford University Press.

Jesús Alfonso Riestra Velázquez
riestra@cinvestav.mx