Generalizaciones del concepto de "recta tangente a una circunferencia" en el contexto de su formación

Y. Karina Reyes Acosta & Otilio B. Mederos Anoceto
ykreyes@uadec.edu.mx & omederosa@gmail.com
Universidad Autónoma de Coahuila
Saltillo, México

Autor de correspondencia: Y. Karina Reyes Acosta

Resumen. En este trabajo se presenta una organización del conocimiento escolar con el objetivo de facilitar el diseño de actividades didácticas, que permitan a los estudiantes de la Enseñanza Media participar en los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de recta tangente, mediante su actividad y la medición de otros compañeros y el profesor. Esta propuesta se basa en un estudio longitudinal sobre lo que se hace, lo que no se hace y lo debería hacerse en la educación matemática en México que comienza en la Enseñanza Media Básica y termina en la Enseñanza Universitaria. El campo de investigación fueron las rectas tangentes a las cónicas, con las cuales consideramos que se logra una buena preparación para resolver problemas más complejos en la enseñanza universitaria.
Palabras clave. Medición, enseñanza, recta tangente

Abstrac. In this work, an organization of school knowledge is presented with the aim of facilitating the design of didactic activities that allow high school students to participate in the processes of training, development and generalization of the concept of tangent line, through their activity and the measurement of other classmates and the teacher. This proposal is based on a longitudinal study on what is done, what is not done and what should be done in mathematics education in Mexico that begins in Basic High School and ends in University Education. The field of research was the tangent lines to the conics, with which we consider that a good preparation is achieved to solve more complex problems in university education.
Keywords: Measurement, teaching, tangent line

Introducción

El estudio del concepto de recta tangente está presente en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto de la educación preuniversitaria como universitaria de muchos países. Al realizar una revisión de programas docentes, libros de texto y otros medios didácticos utilizados en la educación preuniversitaria de México, Matemáticas 3, Briseño (2005); Programa de Educación Media Básica. Secundaria. Matemáticas 2006, sin autor; libro para el maestro de Educación Media Básica. Secundaria. Matemáticas Alarcón, J. y otros, (1996); Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. Espinoza, H. y otros, (1999) y de Cuba, Muñoz y otros, (1990); Ministerio de Educación de Cuba [MINED], (2004a); MINED, (2004b); MINED, (2005a), MINED, (2005b); Quintana y otros, (2005), es apreciable que no siempre las concepciones didácticas, que de manera explícita o implícita aparecen en estos materiales, contribuyen a un adecuado estudio del concepto de recta tangente, de manera que en su formación, desarrollo y generalización, se satisfagan necesidades importantes del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas Sfard, (1998), se aprovechen las potencialidades existentes y se contribuya al aseguramiento de las condiciones previas necesarias para su articulación con su estudio en el nivel universitario.

Por otra parte, en la revisión de programas docentes y libros de texto que se utilizan en la educación universitaria de México, se observan insuficiencias que no contribuyen a satisfacer necesidades importantes del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática mediante el aprovechamiento de las potencialidades relativas al desarrollo de los alumnos y a las características del currículo.

En este trabajo se realiza un análisis − desde la perspectiva de la formación, desarrollo y generalización conceptual y de la articulación entre los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la educación preuniversitaria y universitaria − de *lo que se hace*, *lo que no se hace y lo que pudiera hacerse* en el estudio del concepto de recta tangente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en estos niveles educativos, a partir del análisis de programas docentes, libros de texto y de otros medios didácticos utilizados en México.

El *objetivo* fundamental de nuestro trabajo es realizar una organización del conocimiento escolar que facilite el diseño de actividades didácticas, que permitan a los estudiantes de la Educación Media Básica (EMB), Educación Media Superior (EMS) y Educación superior (ES) participar en los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de recta tangente mediante su actividad y medición en los procesos siguientes:

- Resolución intuitiva, imprecisa, del problema 1: problema, geométrico, de generalización del concepto de recta tangente.
- Transferencia del problema 1 al problema 2: determinación de una representación analítica de la recta tangente; para lo cual es de mucha ayuda la solución intuitiva del problema 1.
- Resolución del problema 2 y determinación de otros resultados analíticos.
- Transferencia de resultados analíticos a resultados geométricos y obtención de la solución geométrica rigurosa del problema 1.

En la figura 1 se presenta un diagrama que sintetiza estos cuatro procesos y sus resultados, los procesos se indican con flechas y los resultados con recuadros.

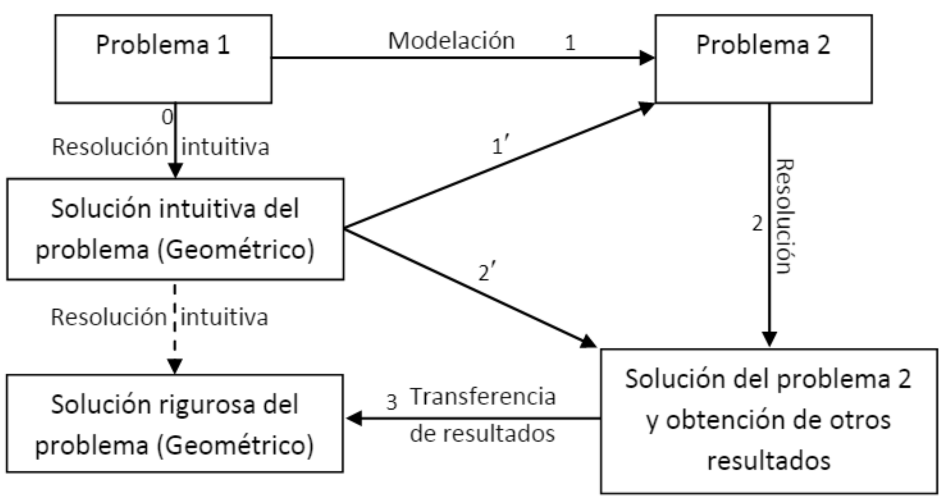

Fig. 1. Diagrama con los procesos, y sus resultados, que intervienen en los procesos de formación, desarrollo y generalización del concepto de recta tangente.

Entre los núcleos fundamentales que conforman el *marco teórico* utilizado en este trabajo se encuentran:

- El estudio de un concepto en términos de los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual, Martínez, (2003), Mederos y Martínez, (2005) y Mederos y Mederos (2007)
- La dialéctica herramienta-objeto, Douady, (1995); Douady, (2000); Douady y Parzysz, (1998).
- Los problemas como medios para facilitar la formación, desarrollo y generalización conceptual, Mederos y Martínez, (2005).

1. Comentarios, observaciones y sugerencias sobre la formación y desarrollo del concepto en la EMB

Los comentarios, observaciones y sugerencias que se hacen en esta sección se refieren a la forma en que está orientado el estudio del concepto de tangente en las secundarias federales de México, los cuales se basaron en la revisión hecha de los libros de texto, los programas de estudio 2006, el libro para el maestro y el fichero de actividades didácticas; los cuales tienen como objetivo fundamental contribuir a una organización del conocimiento escolar que ayude a formar y desarrollar el concepto de recta tangente a una circunferencia, de forma tal que facilite su generalización a otras curvas, cuando se estudia este concepto en la EMB y en la EMS.

1. En ninguno de los documentos consultados se orienta que el estudiante participe en un proceso de formación del concepto de recta tangente a la circunferencia. En sustitución de esto, se da la definición del concepto de recta tangente a la circunferencia siguiente: *una recta que sólo toca en un punto a una circunferencia se llama tangente.*
2. No se hace participar a los estudiantes en actividades que lo llevan a concluir que por todo punto de la circunferencia pasa *una* recta tangente y *sólo una* recta tangente.
3. Se da un procedimiento para la construcción de la recta tangente y se infiere que "La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia". Una manera más precisa de expresar esta propiedad puede ser: *toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.*
4. Dada una circunferencia y un punto P exterior, se presenta un procedimiento para la construcción de las tangentes a la circunferencia que pasan por P. Se concluye que *"Por un punto exterior a una circunferencia pasan dos rectas tangentes a esta"*. Una mejor forma de expresar esta conclusión pudiera ser: *por un punto exterior a una circunferencia pasan dos, y solo dos, rectas tangentes*.
5. Las propiedades que se exponen en los comentarios 2, 3 y 4 no tienen validez en curvas de otros tipos estudiadas en la EMS, entre ellas las parábolas, las hipérbolas y los gráficos de ciertas funciones. Sin embargo, en los medios didácticos revisados no se identificaron tareas (ejercicios o problemas) encaminadas a que los alumnos comprendan que la definición de recta tangente a una circunferencia es muy particular, porque no puede ser extendida a otras curvas; ya que aunque esa definición pone de manifiesto lo esencial de la tangente a una circunferencia, no revela los aspectos esenciales para otras curvas.
6. Todas las insuficiencias señaladas en el comentario cinco inciden en que:
   - No se llegue, aunque sea de manera intuitiva, a lo esencial del concepto de recta tangente
   - El concepto de recta tangente definido en el estudio del cálculo diferencial pueda percibirse por el alumno como algo muy diferente al concepto de recta tangente a una circunferencia y no como una generalización de éste.
   - Si se pretendiera estudiar el concepto de recta tangente a otras curvas, habría que elaborar una definición específica en cada caso o encontrar un procedimiento aplicable a una clase de curvas a la que pertenezca la circunferencia.
7. No se orienta utilizar mediadores informáticos que faciliten el desarrollo de proceso de formación del concepto de recta tangente de forma dinámica de modo que los estudiantes comprendan, intuitivamente, que toda recta tangente en un punto cualquiera de una

circunferencia es el “límite” de una familia de secantes por ese punto. Para ello pudiera seguirse la organización del conocimiento siguiente:

a. Considerar sobre una circunferencia y un punto sobre la circunferencia, que indicaremos por γ y T, respectivamente.
b. Tomar sobre la circunferencia γ otro punto Q y construir la recta secante a γ que pasa por los puntos T y Q (contiene a la cuerda TQ).
c. Desplazar el punto Q sobre la curva γ y comprobar que la secante TQ rota alrededor del punto T.
d. Desplazar el punto Q sobre la circunferencia γ en los dos sentidos posibles hasta que Q coincida con T, y comprobar visualmente que las secantes se transforman en la tangente por T.
e. Definir la tangente a γ por el punto T como la posición limite PT de la secante QT cuando el punto Q tiende al (a coincidir con el) punto T sobre la circunferencia.

Al referirnos al límite estamos proponiendo que se utilicen solo ideas intuitivas de este concepto.

8. Lo esencial e implícito en la organización del conocimiento desde (a) hasta (e) es que el ángulo QTP “tiende a cero” cuando la cuerda QT “tienda al punto T”.
9. En 6 y 7 se expresan varias ideas geométricas intuitivas que no es posible precisar en este nivel de educación, pero es importante que se expongan a los estudiantes y se les informe en qué nivel posterior se pudieran precisar.
10. Las ideas geométricas intuitivas expresadas en 6 y 7 se pueden precisar, en la Matemática IV (optativa) del Bachillerato de la Universidad Autónoma de Coahuila o en la Matemática V (Calculo Diferencial) de la Preparatoria del ITESM, por ejemplo, de la forma siguiente:
    a. Desplazar el punto Q a lo largo de la curva γ.
    Para ello se pueden tomar diferentes curvas γ con representaciones analíticas conocidas, por ejemplo, una circunferencia de centro (1, 2) y radio 5, cuya representación analítica es $(x\text{-}1)^2 + (x\text{-}2)^2 = 25$ y considerar diferentes puntos Q sobre la curva, lo que significa que sus coordenadas satisfacen la ecuación anterior, y desplazarlos sobre la curva; de modo que los estudiantes comprendan que desplazar un punto sobre una curva significa que su representación analítica vaya cambiando a medida que se mueve sobre la curva, sin dejar de satisfacer la representación analítica de la curva.
    b. El punto Q tiende al punto T sobre una circunferencia γ.
    Con el objetivo de que los estudiantes comprendan el significado de la afirmación anterior, se pueden tomar diferentes curvas γ con representaciones analíticas conocidas $y=f(x)$ donde f es una función, y sobre cada una de estas curvas tomar un punto fijo T y otro punto Q que se va a desplazar a lo largo de la curva de modo que se vaya aproximando “cada vez más” sobre la curva al punto T.

2. Generalización del concepto de “recta tangente a una circunferencia” en el contexto de su formación en la EMB

Las consideraciones y sugerencias que hacemos a continuación tienen como objetivo fundamental contribuir a una organización del conocimiento que ayude a desarrollar el concepto de recta tangente a una circunferencia en la EMB; de modo que facilite su generalización a otras curvas, cuando se estudie este concepto en la EMS y en la ES.

Después que los estudiantes conozcan el concepto de recta tangente a una circunferencia por la vía sintética, tomando como rasgo característico el de *"ser una recta que toca a la circunferencia en uno y sólo un punto"*, sugerimos que se haga una preparación para su generalización a otras curvas, consistente en la utilización de un mediador informático, con el objetivo de tomar una secante que pase por un punto fijo T y un punto Q de la circunferencia, y desplazar el punto Q sobre la circunferencia hasta hacerlos coincidir con el punto T; para que intuitivamente los alumnos comprendan que la recta tangente a la circunferencia por T, se puede considerar como el "límite" de una familia de rectas secantes que pasan por el punto T.

De esta manera, se es consecuente con parte del diagrama de la figura 1, puesto que se realiza una primera etapa de formación, intuitiva, (Resolución intuitiva, 0) por la vía sintética; es decir, sin el uso de representaciones analíticas y del sistema de coordenadas, para que después, en una segunda etapa, se transfiera el problema al marco analítico y se dé sentido analítico a los resultados obtenidos por la vía sintético-intuitiva.

Sin embargo, dado que los alumnos en este nivel de enseñanza no conocen la ecuación de la circunferencia y sólo han estudiado las funciones lineales representables por ecuaciones de la forma $y=mx+n$, $x\in\Re$, la transferencia del problema de la generalización del concepto de recta tangente al marco analítico es conveniente que se haga en el EMS en el contexto del estudio de las funciones cuadráticas.

Si se pretende que los estudiantes comprendan, intuitivamente, que toda recta tangente es un punto cualquiera de una circunferencia es el "limite" de una familia de secantes por ese punto; pudiera seguirse el procedimiento esbozado en la sugerencia 7 de la sección 1.

2.1 Determinación de una colección de propiedades que sean satisfechas por la tangente a una circunferencia

La primera acción podrá iniciarse con un diálogo entre el profesor y los alumnos, en el cual se concluya que la definición de "recta tangente a una circunferencia" se elaboró a partir de la comparación entre la longitud del radio y la distancia de distintas rectas al centro de la circunferencia. Seguidamente, el profesor llamará la atención sobre la necesidad de utilizar en la definición del concepto de "recta tangente" otra propiedad más general, válida para otras curvas, y orientará la resolución de una tarea como la siguiente, la cual puede ser resuelta con lápiz y papel o utilizando un mediador informático.

Tarea 1. Lo esencial e implícito en la organización del conocimiento desde a) hasta e) es que el ángulo QTP "tiende a cero" cuando la cuerda QT "tiende al punto T".

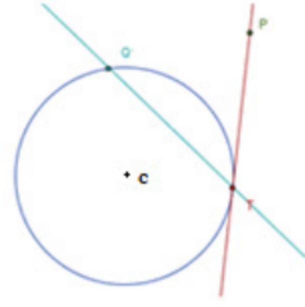

Fig. 2. El ángulo *QTP*.

En la figura 2 se ha representado la recta *TP*, tangente a la circunferencia de centro *O* y radio *r* en el punto *T*. También se ha representado la recta *TQ*, secante a la circunferencia que pasa por los puntos *T* y *Q*.

a) Selecciona puntos en el arco *TQ* cada vez más próximos a *T* y denótalos por Q_1, Q_2, Q_3, ...
b) Traza las rectas TQ_1, TQ_2, TQ_3..., secantes a la circunferencia.
c) Ordena las amplitudes de los ángulos intersección *PTQ*, PTQ_1, PTQ_2, PTQ_3...
d) ¿A medida que el punto *Q* se aproxima al punto de tangencia *T*, a qué valor se aproxima la amplitud del ángulo *PTQ* al tomar *Q* las posiciones Q_1, Q_2, Q_3, ...?
e) ¿Cuándo *Q* se aproxima al punto *T* la cuerda *QP* a qué objeto geométrico tiende?

En el análisis de la solución de esta tarea debe obtenerse como conclusión que una recta *TP* tangente a una circunferencia en un punto *T* tiene las propiedades: 1) pasa por el punto *T* y 2) a medida que un punto *Q* de la circunferencia se aproxima al punto *T*, la amplitud del ángulo intersección *PTQ* se aproxima a 0° y la cuerda se aproxima a un punto.

2.2 Argumentación de que la colección de propiedades caracteriza al concepto de tangente

La segunda acción didáctica, consistente en mostrar que las tangentes a una circunferencia son las únicas rectas que cumplen estas propiedades, puede iniciarse planteando una pregunta acerca de si las rectas exteriores y las secantes las satisfacen. Para ello el profesor puede orientar la resolución de una tarea como la siguiente:

Tarea 2. En la figura 3 se han representado una recta exterior y una secante a una circunferencia.

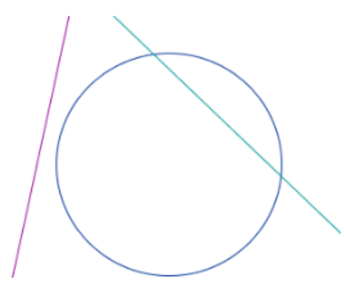

Fig. 3. Presentación de una recta exterior y una secante a una circunferencia.

a) Analiza si estas rectas satisfacen las propiedades determinadas en la resolución de la tarea 1.

b) ¿A qué conclusión has llegado después de haber respondido el inciso a?

Con el análisis de la resolución de la tarea 2 debe llegarse a la conclusión de que las dos propiedades determinadas como resultado de la resolución de la tarea 1 sólo son satisfechas por la tangente.

2.3 Análisis de la utilidad de la colección de propiedades para definir la tangente a otras curvas

El análisis de la utilidad de la colección de propiedades para definir la tangente a otras curvas requiere que se comprendan mejor las frases “aproximarse al punto” y “aproximarse a 0°”. Para ello puede orientarse la resolución de una tarea como la siguiente.

Tarea 3. En la figura 4 se han representado la recta *TP*, tangente a la curva en el punto *T* y la recta *TQ*, secante a la curva.

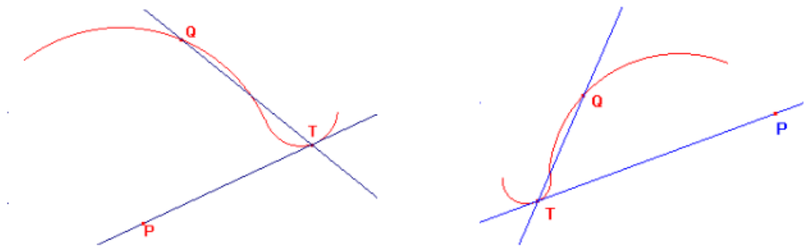

Fig. 4. Representación de la recta *TP*, tangente a la curva en el punto *T* y la recta *TQ*, secante a la curva.

a) Selecciona puntos en el arco *TQ* cada vez más próximos a *T* y denótalos por Q_1, Q_2, Q_3, …

b) Traza las rectas TQ_1, TQ_2, TQ_3…, secantes a la curva.

c) Ordena las amplitudes de los ángulos intersección *PTQ*, PTQ_1, PTQ_2, PTQ_3, ...

d) Analiza si en este caso es válida la proposición: “a medida que un punto *Q* de la curva se aproxima al punto *T*, la amplitud del ángulo intersección *PTQ* se aproxima a 0°”.

En el análisis de la respuesta al inciso d), debe obtenerse como conclusión que las amplitudes de los ángulos formados por la tangente y la secante no quedan ordenadas según la “proximidad” del punto *Q* al punto de tangencia, pues esto sólo es válido para cierto tipo de curvas entre las que se encuentra la circunferencia.

Al analizar la respuesta del inciso d) ha de concluirse que la proposición es válida, si la frase: “a medida que un punto *Q* de la curva se aproxima al punto *T*”, se interpreta en el sentido de que el “punto *Q* tiende a coincidir con *T*”. Entonces, se puede aprovechar la oportunidad para introducir la expresión “*Q* tiende a *T*”, como una abreviatura de esta frase.

Después de este análisis se llega a la conclusión que las dos propiedades determinadas como resultado de la resolución de la tarea 1, se pueden utilizar para definir el concepto de tangente a una circunferencia y a otras curvas que no son circunferencias, es decir, *una recta r es tangente a una curva en un punto T, si se cumplen las propiedades: 1) la recta r pasa por T y 2) cuando el punto Q de la curva tiende a T, la amplitud del ángulo intersección*[1]*, que contiene el arco TQ, formado por las rectas TQ y r se aproxima a 0°.*

---

[1] Se ha utilizado el concepto de ángulo intersección estudiado en grados para evitar el exceso de simbolismo.

2.4 Aplicación de las propiedades para determinar si rectas dadas son tangentes a curvas dadas

En este momento se puede pasar a utilizar estas propiedades para determinar si una recta es tangente a una curva en un punto, al resolver tareas como la siguiente:

Tarea 4. Analiza basándote en las dos propiedades que caracterizan la tangente a una curva en un punto, si las rectas representadas en la figura 5 son tangentes a las curvas a)–e) en el punto T.

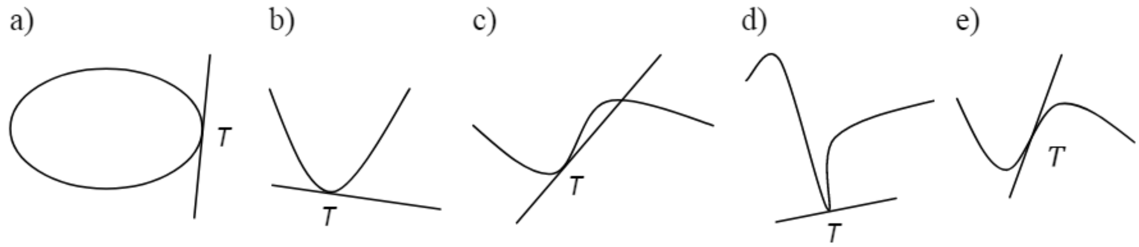

Fig. 5. Rectas que pasan por un punto *T* de diferentes curvas

En la resolución de la tarea 4 se obtiene que la recta representada en la figura del inciso d, es la única recta que no es tangente a la curva en el punto R.

2.5 Análisis de la validez en otras curvas de la propiedad utilizada en la definición de tangente a una circunferencia

Los resultados obtenidos en la resolución de la tarea 4 deben aprovecharse para mostrar que la propiedad de la tangente a una circunferencia, contenida en la definición, no es válida para tangentes a otras curvas y que pueden existir rectas que la cumplan sin ser tangentes. En efecto, la recta del inciso c es tangente a la curva en R y la corta en otro punto; la recta del inciso d tiene un único punto común con la curva y no es tangente a ella en ese punto y la recta del inciso e, corta a la curva en el punto de tangencia.

Con los resultados obtenidos por la vía sintética queda resuelto parcialmente el problema de la generalización del concepto de recta tangente, pues: 1) hay términos y frases como "Q tiende a T" que requieren de precisión y 2) no se dispone de herramientas para determinar la ecuación de la tangente y su construcción de manera precisa.

2.6 Ideas intuitivas utilizadas que deben precisarse en la EMS y la ES

Entre las ideas que es necesario precisar y que recomendamos utilizar representaciones analíticas para ello, están las siguientes: 1) desplazar el punto Q a lo largo de la curva γ, 2) el punto Q tiende a coincidir con el punto T a lo largo de la curva γ, 3) la cuerda QT tiende al punto T según γ, 4) la posición límite PT de la recta secante PQ según γ.

Para ello se sugiere plantear las tareas: 1) utilizar las representaciones analíticas de diferentes curvas, 2) utilizar representaciones analíticas de los objetos a que hacen referencia las afirmaciones del párrafo anterior, 3) definir con un vocabulario geométrico el concepto de tangente, utilizando su representación analítica.

3. Comentarios, observaciones y sugerencias para la formación y el desarrollo del concepto en la EMS

En este sección hacemos observaciones y sugerencias con el objetivo de contribuir a la realización de una organización del conocimiento que propicie un desarrollo amplio del concepto de recta tangente a una circunferencia en la EMS, de forma tal que facilite su generalización a otras curvas en este nivel de educación y en la ES.

Los comentarios, observaciones y sugerencias se basan en el análisis de los documentos oficiales del nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Coahuila (UAdeC) y del Instituto de Estudios Superiores del Tecnológico de Monterrey (ITESM).

Los documentos oficiales de la UAdeC corresponden al plan de Bachillerato 2000, el cual fue reestructurado en el 2004. Este plan de estudios lo llevan a cabo en todos los bachilleratos de la universidad, así como en todos los bachilleratos que están incorporados a la UAdeC.

Restringimos nuestro análisis a las cuatro Matemáticas que se cursan en estas instituciones, con el objetivo de determinar cómo se trata nuestro tema: Matemáticas I, Módulo 7 “Aritmética y Algebra” 1er semestre, Matemáticas II, Módulo 8, “Trigonometría”, 2º semestre; Matemáticas III, Módulo 15, “Geometría Analítica y Estadística”, 3er semestre; y Matemáticas IV, Módulo 24, “Cálculo Diferencial”, 4º semestre. Esta última es una materia optativa.

Después del análisis cuidadoso de los programas analíticos de las cuatro matemáticas llegamos a la conclusión que sólo en Matemáticas IV se orienta un estudio de tangente. Temas que son necesarios dominar para que los alumnos se preparen para el estudio de la tangente en Matemáticas IV se tienen en Matemáticas II.

En el Tecnológico de Monterrey se cursan 6 Matemáticas y todas son obligatorias. Matemáticas I PM1006 “Algebra”, Matemáticas II PM2006 “Algebra”, Matemáticas III PM3007 “Geometría y Algebra”, Matemáticas IV PM4006 “Algebra y Trigonometría”, Matemáticas V PM5006 “Cálculo con Geometría”, Matemáticas VI PM “Cálculo Integral”. Se revisaron los programas de estas 6 materias.

1. En ninguno de los documentos consultados se orienta una preparación, para la generalización a otras curvas, del concepto de recta tangente a una circunferencia.
2. Proponernos utilizar el procedimiento propuesto para la EBS, pero utilizando las representaciones analíticas de objetos geométricos y las cónicas.
3. Sugerimos utilizar un asistente informático para facilitar la participación de los estudiantes en el proceso de generalización del concepto de recta tangente a las cónicas.
4. Consideramos que es muy importante precisar analíticamente el sentido de las afirmaciones:
   4.1. Las ecuaciones de las secantes QT se “acercan” a la de la tangente T
   4.2. Las coordenadas del punto Q se “acercan” a las del punto T
   4.3. Las longitudes de las cuerdas QT se “acercan” a cero
5. Tenemos el criterio que se debe comprobar que las afirmaciones 4.1, 4.2 y 4.3 son equivalentes para el caso de las cónicas.

4. Generalización del concepto de “recta tangente a una circunferencia” en el contexto de su formación en la EMS.

Proponemos que se haga una preparación, para la generalización a otras curvas, del concepto de recta tangente a una circunferencia, consistente en la utilización de un asistente informático para dinamizar el proceso de formación del referido concepto, así como de las representaciones analíticas de las cónicas y de los objetos siguientes: dos puntos *Q* y *T* sobre el gráfico de la cónica, la secante *QT*, la tangente *TP* por *T*. El objetivo final de esta generalización es que los estudiantes participen en el aprendizaje de la cadena de implicaciones, cuando el punto *Q* se acerca al punto *T*, siguiente:

Las ecuaciones de las secantes QT se “acercan” a la de la tangente TP
⇓
Las coordenadas del punto Q se “acercan” a las del punto T
⇓
Las longitudes de las cuerdas QT se “acercan” a cero
⇓
Las ecuaciones de las secantes QT se “acerca a la de la tangente TP

Proponemos aplicar el mismo procedimiento propuesto para la EMB; pero utilizando las representaciones analíticas de los objetos.

5. Generalizaciones y formalizaciones de ideas intuitivas utilizando herramientas del cálculo diferencial.

En esta sección se supone que *Q* es un punto que se mueve sobre la representación gráfica de una curva γ, y que *T* es un punto fijo sobre la representación gráfica de la misma curva. El propósito de esta sección es formalizar las tres ideas intuitivas siguientes:

1. El punto *Q* se acerca a un punto *T* hasta llegar a coincidir con él.
2. Las cuerdas *TQ* se transforman en el punto *T*.
3. Las secantes *TQ* se transforman en la tangente *PT*

A continuación exponemos estas ideas con un vocabulario analítico.

$1'$. Las coordenadas del punto *Q* se acercan a las del punto *T* hasta llegar a coincidir con ellas.

$2'$. Las longitudes de las cuerdas *QT* se acercan a cero hasta llegar a ser cero.

$3'$. Las ecuaciones de las rectas secantes se acercan a la ecuación de la tangente hasta llegar a coincidir con ella.

Proponemos que en este nivel se utilicen sólo curvas que correspondan a los gráficos de funciones polinómicas.

5.1 Generalización y formalización de la idea 1, “El punto *Q* se acerca al punto *T*”

Sean $y=f(x)$ la expresión que define a una función real de variable real, *T* un punto de la gráfica de esta función de coordenadas (a, b); $b=f(a)$ y Q otro punto de coordenadas (x, y), $y=f(x)$; que vamos a mover sobre la representación gráfica del grafo de la función hasta llegar a coincidir con el punto *T*; pero con la restricción de que la abscisa x sea menor que la abscisa a.

Si los alumnos conocen los conceptos de límite y continuidad laterales izquierdos, entonces se podrán guiar fácilmente para que arriben a la conclusión de que para que tenga sentido la idea: las coordenadas de *Q* se acercan a las del punto *T* hasta llegar a coincidir con estas; es suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to a-} x = a \text{ y } \lim_{x \to a-} f(x) = f(a).$$

Si se cambia la restricción impuesta por la condición: la abscisa x es mayor que la abscisa a, entonces si los estudiantes conocen los conceptos de límite y continuidad laterales derechos, pueden ser guiados hasta que concluyan que analíticamente esa condición intuitiva se formaliza mediante las dos condiciones:

$$\lim_{x \to a+} x = a \text{ y } \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Si no se impone restricción alguna, entonces se pueden conducir a los estudiantes para que afirmen que la formalización de la idea intuitiva se obtiene con las dos condiciones:

$$\lim_{x \to a} x = a \text{ y } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si los estudiantes no conocen los conceptos de límites y continuidad laterales y de límite y continuidad puntual; entonces, las formalizaciones de estas ideas pueden utilizarse como problemas (herramientas) cuyas soluciones conduce a estos conceptos (objetos), según el caso.

Obsérvese que una condición necesaria y suficiente para que un punto *Q* se acerque a otro punto *T* y llegue a coincidir con él, siguiendo la representación gráfica de una función definida por $y=f(x)$, es que la función sea continua a la izquierda, derecha o en el punto a, según sea el caso.

5.2 Generalización y formalización de la idea 2, "Las cuerdas *QT* se transforman en el punto *T*"

Considerando que las coordenadas de los puntos *Q* y *T* se representan igual que en la sección 5.1, resulta que la longitud de una cuerda cualquiera *QT* está dada por la fórmula

$$|PQ| = \sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}$$

Si los alumnos conocen los conceptos de límite y continuidad laterales izquierdos, entonces podrán comprender que cuando las abscisas de *Q* son menores que la de *T*, la formalización de la idea 2 se obtiene con el límite lateral izquierdo:

$$\lim_{x \to a-} \sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2} = 0$$

Como la función definida por $y = \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$ se cumple que

$$\sqrt{\lim_{x \to a-} [(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2]} = 0;$$

y como el límite de una suma es igual a la suma de los límites resulta que

$$\sqrt{\lim_{x \to a-} (x-a)^2 + \lim_{x \to a-} (f(x) - f(a))^2} = 0$$

De la continuidad de la función definida por $y=x^2$ se tiene que

$$\sqrt{\left(\lim_{x \to a-} (x-a)\right)^2 + \left(\lim_{x \to a-} (f(x) - f(a))\right)^2} = 0\,;$$

Obviamente $\lim_{x \to a-} (x-a) = 0$ y $\lim_{x \to a-} (f(x) - f(a)) = 0$ si y solo si $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$; consecuentemente, las longitudes de las cuerdas *QT* se convierten en cero cuando las abscisas *Q* son menores y se acercan a la abscisa de *T* hasta coincidir con ella, si y solo si la función definida por $y = f(x)$ es continua a la izquierda de a. De forma similar se formaliza esta idea para los casos en que las abscisas de *Q* son mayores que la de *T*, o no tienen restricciones.

5.3 Generalización y formalización de la idea 3, "Las secantes *QT* se transforman en la tangente *PT*"

Para facilitar el proceso de formación del concepto de derivada se introducen las variables h y k definidas por las igualdades $h=(x-a)$ y $k=(y-b)$. Consecuentemente, las coordenadas (x, y) del punto *Q* toman la forma $(a+h, b+k)$.

Para cada valor de h (en un dominio adecuado) se tiene al punto *Q* en una sola posición sobre el gráfico de la función f y se tiene una secante *QT* cuya pendiente está determinada por la expresión $[f(c+h)-f(c)]/h$, para todo h diferente de cero en una cierta vecindad de cero. Luego, queda bien definida la función F_c, en una cierta vecindad de c, por

$$F_c(h) = [f(c+h) - f(c)]/h,\ h \neq 0. \tag{1}$$

Luego la ecuación (2) es la representación analítica de la pendiente de las secantes *QT* cuando h es distinto del cero y está en una cierta vecindad del cero

$$y - f(c) = F_c(h)(x-c), \tag{2}$$

Si los estudiantes conocen el concepto de límite, entonces pueden, con la mediación del profesor, concluir que si el límite (3) existe, es finito, igual a m y modela la pendiente de la recta tangente al gráfico de f por $(c, f(c))$.

$$lim_{h \to 0} F_c(h) \tag{3}$$

Por lo tanto, la ecuación de esta recta tangente es

$$y - f(c) = m(x - c), \tag{4}$$

que se obtiene de la ecuación (2) cuando h tiende a cero.

En general, las ideas 1´, 2´y 3´no son equivalentes. Para curvas que corresponden a las gráficas de funciones reales de variable real, la equivalencia se tiene en la clase de las funciones derivables. Las ideas 1´y 2´se mantiene equivalentes en la clase de las funciones continuas.

El proceso de formalización de esta idea se puede utilizar para que los estudiantes participen en el proceso de formación del concepto de derivada, y de esta forma dar cumplimiento a los procesos 1 y 2 de la figura 1. Para la EMS recomendamos que esto se haga primero con funciones polinómicas y posteriormente con las funciones que resultan de las ecuaciones de las cónicas.

5.4 Lo esencial en la organización del conocimiento propuesta

Damos solución rigurosa a la *Tarea 5: Lo esencial e implícito en la organización del conocimiento desde a) hasta e) es que la medida del ángulo QPT "tiende a cero" cuando la medida de la cuerda QP "tiende a cero".*

El ángulo *QTP* es la diferencia de los ángulos de inclinación de la secante *QT* y de la tangente *TP*, o sea,

$$<QTP = \text{ángulo de inclinación de } QT - \text{ángulo de inclinación de } TP$$

Indiquemos las medidas de los ángulos de inclinación de *QT* y de *TP* y del ángulo *QTP* por α, β y γ, respectivamente; entonces

$$\tan\gamma = (\tan\alpha - \tan\beta)/(1 - \tan\alpha\tan\beta)$$

Si las coordenadas de T y Q son $(c, f(c))$ y $(c + h, f(c + h))$ y la función f es derivable en c, entonces:

$$\tan\alpha = [f(c+h) - f(c)]/h \text{ y } \tan\beta = f'(c).$$

Luego,

$$\tan\gamma = \{[f(c+h) - f(c)]/h - f'(c)\}/\{1 - f'(c)\,[f(c+h) - f(c)]/h\}.$$

Consecuentemente,

$$Lim_{h\to 0} \tan\gamma = 0.$$

Teniendo en cuenta que la función tangente es continua en 0, resulta que la medida del ángulo $<QTP$ tiende a cero cuando la medida de cuerda *QP* tiende a cero.

5.5 Argumentación de una propiedad que caracteriza al concepto de recta tangente.

Tarea 6. Probar que la tangente no vertical, de ecuación $T_c(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$. $x\in R$, al gráfico de una función f derivable en el punto c interior de su dominio, es la única recta por $(c, f(c))$ que cumple la propiedad

$$lim_{h\to 0} \left| [f(x)- g(x)]/(x-c) \right| =0, \tag{5}$$

donde g es un elemento de la colección de las funciones lineales que corresponden a rectas no verticales por $(c, f(c))$.

En el análisis de la resolución de la tarea 6 debe llegarse a la conclusión de que las dos propiedades determinadas como resultado de la resolución de la tarea 3, al final del epígrafe 2.3., son satisfechas sólo por la tangente.

6. Utilización de resultados de las funciones derivables para el estudio de la tangente

Después de desarrollado el concepto de derivada, se está en condiciones de transferir resultados de la derivada para desarrollar el concepto de tangente y dar cumplimiento al proceso 3 de la figura 1. A continuación ampliamos los resultados relativos al concepto de tangente.

La función $f': A_1\to R$, es un modelo de la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f: A\to R$ en cada punto $(x, f(x))$ tal que $f'(x)$ existe, $A_1=\{x\in A: f'(x) \text{ existe}\}$. La función f' permite construir un modelo funcional T de la recta tangente no vertical r al gráfico de f en cada punto con abscisa t en A_1, de la forma siguiente: $t\to T_t$, donde por T_t se indica la función de R en R definida por $x\to T_t(x) = f(t) + f'(t)(x-t)$. Teniendo en cuenta que T_t es una función lineal e indicando la colección de las funciones lineales de R en R por $L(R,R)$, resulta que la función T tiene por dominio al conjunto A_1 y por codominio a $L(R,R)$.

Dado un punto c de A_1 entonces $y = f(c) + f'(c)(x-c)$ es la ecuación de una recta no vertical del plano XY que es tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$, $c \in A_1$.

Teorema 1. La tangente no vertical $T_c(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$, $x \in R$, al gráfico de una función f derivable en el punto c interior de su dominio, es la única recta que pasa por $(c, f(c))$ y que cumple la condición (5), donde g es un elemento de las funciones lineales que corresponden a rectas no verticales por $(c, f(c))$.

Demostración. Trivialmente se tiene que

$$lim_{h\to 0}\left| [f(x)- T_c(x)]/(x-c) \right| = lim_{h\to 0}\left| [f(x)- f(c)]/(x-c)-f'(c) \right| =0$$

Sea $g(x)=f(x)+m(x-c)$, $m\in R$, la ecuación de una recta no vertical cualquiera que pasa por el punto $(c, f(c))$ tal que $lim_{h\to 0}\left| [f(x)- g(x)]/(x-c) \right| =0$, entonces como

$$lim_{h\to 0}\left| [f(x)- g(x)]/(x-c) \right| = lim_{h\to 0}\left| [f(x)- f(c)]/(x-c)-m \right| =0$$

y la función valor absoluto es continua, se tiene que $m=f'(c)$ y por lo tanto $g = T_c$.

Este teorema nos permite afirmar que:

1. La representación analítica de la tangente al gráfico de una función f derivable en un punto c interior a su dominio es un polinomio T_c de primer grado tal que $T_c(c) = f(c)$ y $T_c'(c) = f'(c)$.
2. La diferencia $R(x) = f(x)–T_c(x)$ es un infinitesimal cuando x tiende a c; luego se ha logrado una aproximación de los valores de f en una vecindad de c mediante un polinomio T_c de primer grado. Esta aproximación tiene la ventaja de que determinados $f(c)$ y $f'(c)$, sus valores pueden obtenerse efectuando una multiplicación y una suma.
3. Teniendo en cuenta que los polinomios se encuentran entre las funciones más sencillas y con mejores cualidades que se utilizan en los análisis matemáticos, y que sus valores se pueden obtener efectuando solo un número finito de multiplicaciones y sumas, es natural el planteamiento del problema siguiente: aproximar el gráfico de una función f dos veces derivable, mediante un polinomio P de segundo grado que coincida, en un punto c interior del dominio de f, con f y sus dos primeras derivadas. En este caso las gráficas de f y P tendrían la misma recta tangente y la misma curvatura en $(c, f(c))$.
4. Si f es dos veces derivable se puede probar que la solución del problema planteado en 3 existe y es única. Consecuentemente, logramos una aproximación con una parábola.
5. En concepto de recta tangente, en el caso de la circunferencia, no está restringido a las rectas no verticales; por tanto queda abierto el problema de organizar el conocimiento escolar para facilitar la participación de los estudiantes en el proceso de generalización del concepto de derivada para que se pueda modelar analíticamente el caso de tangentes verticales.

Se ha presentado en esta sección una propuesta de organización del conocimiento escolar para que los maestros guíen a sus estudiantes en la participación del proceso 3 de la figura 1, para cualquier función derivable en un punto c de su dominio. Para el caso de la EMS recomendamos que este proceso se realice solo con funciones polinómicas.

Conclusiones generales

Se presentó en este trabajo un estudio longitudinal del concepto de recta tangente, sobre lo que se hace y lo que no se hace en los niveles de Educación Media Básica y Superior, respecto a los procesos de formación, desarrollo y generalización de este concepto; y se concluye que:

- En la EMB se hace solo un estudio del concepto de recta tangente para la circunferencia con herramientas de geometría analítica y partiendo de su definición (sin realizar un proceso de formación).
- No se realiza en la EMS la generalización del concepto de recta tangente a las cónicas ni a las gráficas de funciones polinómicas.

La conclusión anterior nos permite asegurar que, si esta situación no cambia o se modifica en la ES, es inadecuado utilizar el problema de la generalización del concepto de recta tangente a la gráfica de las funciones reales de variable real de cierta clase, como herramienta para desarrollar un proceso de formación del concepto de derivada.

Se hizo una propuesta sobre lo que consideramos debe hacerse en la EMB, que toma coma base un procedimiento, para que los estudiantes participen en el proceso de formación del concepto de recta tangente a la circunferencia que les permita llegar a una definición de este concepto, con ayuda de un asistente informático e ideas geométricas intuitivas. Tanto el proceso de formación sugerido como la definición del concepto pueden generalizarse a una clase de curvas suficientemente amplia: curvas correspondientes a funciones derivables.

Consideramos que en la EMS se debe generalizar el concepto de recta tangente a los cónicas y a funciones polinómicas formalizando el procedimiento propuesto para la EMB, con la utilización de las representaciones analíticas de las curvas y de objetos geométricos, y con la ayuda de un asistente informático y con herramientas, o ideas intuitivas, del cálculo diferencial. Se presentan en el trabajo los desarrollos suficientes y una organización del conocimiento escolar, para que un profesor de este nivel pueda escoger los elementos que considere y aplicar el procedimiento propuesto.

La organización del conocimiento para la EMS se ha presentado en varios epígrafes para funciones reales derivables de variable real, por lo puede utilizarse, también, para la ES. En la EMS el profesor puede utilizar lo que considere sea posible atendiendo al desarrollo de sus alumnos. Por ejemplo, puede aplicarlo a las gráficas de funciones polinómicas particulares y a las funciones que corresponden a las cónicas.

Bibliografía

Alarcón, J. y otros, (1996) *Libro para el maestro de Educación Secundaria*. México.

Briseño, L.A. y otros, (2005). *Matemáticas 3*, Ed. Santillana, México. p 112-115.

Douady, R. (2000). Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto. En G. Castrillón (Ed.), *Ingeniería didáctica* [versión electrónica]. Santiago de Cali. Colombia. (Trabajo original publicado en 1986). p. 171-177.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, p. 61-96. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. y Parzysz, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), ICMI Study: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. Capítulo 5 (V. Hernández, Trad.). Kluwer Academic Publishers. p. 159-192.

Espinoza, H. y otros, (2000). *Fichero de actividades didácticas*. Matemáticas. Educación secundaria. Elaborado en la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaria de Educación Básica y Normal de Educación Pública. México.

Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior*. Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas. Facultad de matemática, Física y Computación. Universidad Central "Marta Abreu", Santa Clara V.C. Cuba.

Mederos O. B. y B. J. Mederos, (2007) Veintitrés generalizaciones del concepto de derivada. *XL congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.* Octubre 2007. Monterrey N.L.

Mederos, O.B. y J. E. Martínez, (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Números,* 62. Islas Canarias. España. p. 53-64.

Ministerio de Educación de Cuba (2004a). Programa de Matemática de octavo grado. En *Programas de octavo grado*. Secundaria básica. La Habana: Pueblo y Educación. p. 2-37.

Ministerio de Educación de Cuba (2004b). Programa de Matemática de noveno grado. En, Programas de noveno grado. Secundaria básica (p. 2 a 35). La Habana: Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación de Cuba (2005a). *Programas Décimo grado de la Educación Preuniversitaria y primer año de la Educación Técnica y Profesional* [versión electrónica]. La Habana.

Ministerio de Educación de Cuba (2005b). *Programa de Matemática undécimo grado y segundo año de la ETP* [versión electrónica]. La Habana.

Muñoz, F., y otros (1990). *Matemática octavo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

Programa Analítico Oficial de UAdeC 2004 de nivel Bachillerato, Matemáticas (1, 4).

Programa Analítico Oficial del ITEMS 2007 del nivel Preparatoria Matemáticas (1, 6).

Programa Analítico Oficial de las Escuelas Secundarias Federales 2006. Matemáticas (1, 3).

Quintana A. y otros (2005). *Matemática noveno grado*. Cuaderno Complementario. La Habana: Pueblo y Educación.

Sfard, A. (1998). Balancing the unbalanceable: the NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. Paper to be presented at the *Conference on the Foundations to NCTM Standards*. Georgia. Atlanta. Recuperado de http://www.msu.edu/~sfard

Y. Karina Reyes Acosta
ykra73@hotmail.com
Otilio B. Mederos Anoceto
oma8111@yahoo.es