El calculo de raíces de polinomios. Una historia sin fin.

Humberto Madrid de la Vega
hmadrid@g,ail.com
Centro de Investigacion en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autonoma de Coahuila, México

Resumen. El cálculo de las raíces de un polinomio o solución de ecuaciones ha sido un factor generador importante en el desarrollo de las matemáticas. Baste para ello mencionar que era la forma de entender el álgebra en sus inicios. Además, constituye una propiedad fundamental del objeto función y consecuentementetrascendental para el estudiodel Cálculo Diferencial e Integral. A pesar de que existen vestigios de su búqueda desde el tercer milenio a. C. y su búsqueda ha sido motor del desarrollo de las matemáticas desde ese entonces hasta el día de hoy, es un sentir común que este es un problema resuelto desde hace tiempo. Veremos que tal supuesto no es del todo cierto: el cálculo numérico de las raíces y sus multiplicidades es problema vigente, apenas recién resuelto para polinomios de una variable, quedando cosas pendientes. Haremos una reseña de esta apasionante historia de búsqueda.

Palabras clave: Cálculo diferencial, polinomio, ecuaciones

Abstrac. The calculation of the roots of a polynomial or solution of equations has been an important generating factor in the development of mathematics. Suffice it to mention that it was the way to understand algebra in its beginnings. In addition, it constitutes a fundamental property of the function object and consequently essential for the study of Differential and Integral Calculus. Although there are vestiges of his search from the third millennium BC. C. and his search has been the engine of the development of mathematics since then until today, it is a common feeling that this is a problem solved for a long time. We will see that this assumption is not entirely true: the numerical calculation of the roots and their multiplicities is a current problem, only recently solved for polynomials of one variable, pending issues. We will review this exciting search story.

Keywords: Diferential calculus, polynomial, equations

1. Importancia del calculo de raíces

Los polinomios son uno de los conceptos más importantes en álgebra y son fundamentales en matemáticas y ciencia en general. Determinar las raíces de un polinomio es uno de los problemas más antiguos en matemáticas; se han encontrado problemas de este estilo en el libro chino "Chu Chang Suan Shu" o "Arte Matemático en Nueve Secciones", que data del año 200 A.C.

Puesto que las ecuaciones polinomiales aparecen en un amplio rango de áreas de la ciencia, desde química y física básica hasta economía, el problema de determinar raíces de polinomios es, con frecuencia, un paso obligado en la resolución de problemas. Consideremos como ejemplo cualquier software educativo. Las únicas funciones que pueden emplearse en dicho software son funciones racionales, que son simplemente cocientes de polinomios.

La razón es que las funciones racionales son las únicas que pueden ser evaluadas en una computadora mediante una secuencia de instrucciones que envuelven operaciones elementales (suma, multiplicación, división), que son operaciones de punto flotante que usualmente están implementadas en el hardware. Todas las otras funciones (trigonométricas, logarítmicas, exponenciales) se calculan mediante aproximaciones construídas en ciertos intervalos por funciones racionales (y probablemente algún proceso iterativo).

Si el polinomio que aparece en el numerador de la función racional es 1, la función con la que se tiene que lidiar es una funcio´n relativamente simple. Sin embargo, en la mayoría de los casos la función con la que se trabaja es un cociente de polinomios que debe ser reducido al máximo con el objetivo de simplificar su manejo. Dicha simplificación se lleva a cabo eliminando factores comunes, y la tarea de encontrar dichos factores esta´ estrechamente ligada al cálculo de las raíces de los polinomios que aparecen en el numerador y el denominador. Consideremos, por ejemplo, la función

Fecha de recepción: 01-02-2010
Fecha de aceptación:21-04-2010

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - x^3 - 6x^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \\ &= \frac{x^2(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

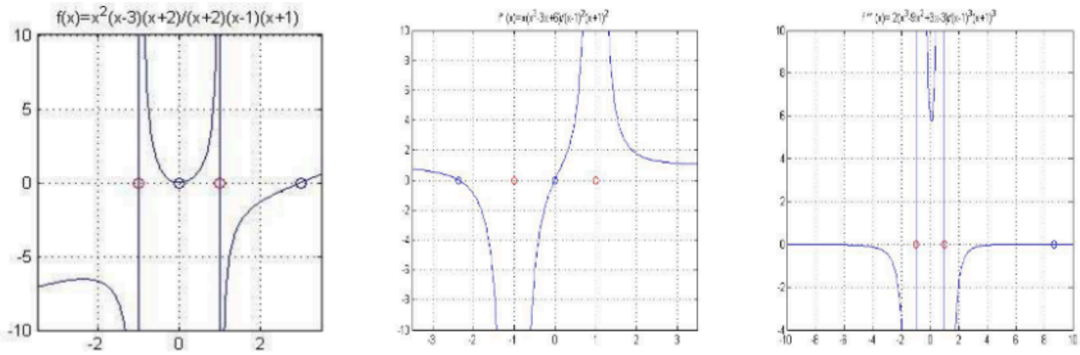
Esta función tiene una singularidad removible en $x = -2$. Si eliminamos el factor $(x+2)$ en el numerador y el denominador, obtenemos la función

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{p(x)}{q(x)}. \end{aligned}$$

la cual coincide con $f(x)$ excepto en $x = -2$. Las raíces involucradas en esta función son:

- raíces de $p(x)$: 0, 3,
- raíces de $q(x)$: -1, 1.

Para analizar el comportamiento de $f(x)$, una vez eliminado el factor $(x+2)$, se debe tomar en cuenta que estas raíces, organizadas en orden creciente (-1,0,1,3), indican los intervalos de estudio que deben considerarse para la función. Observe la Figura 1(a); las raíces de $p(x)$ señalan los puntos en que f interseca el eje de las x mientras que las raíces de $q(x)$ indican asíntotas de la función.



(a) (b) (c)

Figura 1: Raíces de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$

Si además deseamos conocer los puntos en los que $f(x)$ posee máximos y mínimos locales, el procedimiento consiste en encontrar las raíces de $f'(x)$; observe la Figura 1(b). Si, para rematar, queremos ubicar los puntos de inflexión de la función, es necesario ahora encontrar las raíces de $f''(x)$; observe la Figura 1(c).

Así, el problema de analizar $f(x)$ requiere, principalmente, del cálculo de raíces de polinomios. Consideremos ahora el problema de calcular la integral dada por

$$\int \frac{dx}{x^6 - 14x^5 + 80x^4 - 238x^3 + 387x^2 - 324x + 108}.$$

La técnica que debe emplearse para calcular esta integral consiste en encontrar la descomposición en fracciones parciales de la función integrando, es decir, expresar la función como una suma de fracciones cuyo denominador es irreducible, en otras palabras, contiene sólo una raíz del polinomio que representa el denominador de la función original. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^6 - 14x^5 + 80x^4 - 238x^3 + 387x^2 - 324x + 108} &= \\ \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3} &= \\ -\int \frac{dx}{8(x-1)} - \int \frac{2dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} &+ \\ + \int \frac{17dx}{8(x-3)} - \int \frac{5dx}{(4(x-3)^2} + \int \frac{dx}{2(x-3)^3}&.\end{aligned}$$

De modo que, para calcular esta integral se deben conocer las raíces y multiplicidades del denominador polinomial.

Y así, convencidos de que el cálculo de raíces polinomiales es un problema de importancia que aparece hasta en el arte (Kalantari, 2008) y en la sopa[1], comienza nuestra historia.

2. Algunos métodos “clásicos” para calcular raíces

Por el momento vamos a suponer que hablamos sólo de raíces reales (el caso general es semejante pero más complicado). Podemos decir que encontrar una raíz es como una cacería:

- Primero hay que localizar la presa (raíz) y aislarla,
- Acercarse a la raíz, mediante pasos sucesivos,
- Paramos cuando estemos suficientemente cerca de la raíz.

[1]En (Banolu, 2004) se utiliza una ecuación polinomial de segundo orden para predecir la viscosidad de una sopa.

En otras palabras, lo que se hace es construir una sucesión de números que converja a la raíz.

Es importante señalar que este proceso es infinito. Si fuera finito, sería posible encontrar raíces mediante un determinado número de operaciones básicas (suma, resta, división, radicación), pero está demostrado que eso es imposible para un polinomio de grado mayor o igual a 5.

Recordemos que cuando se trata de un polinomio de grado 2, es posible encontrar las raíces mediante la conocidísima fórmula general. Aunque menos populares, también se conocen fórmulas para los polinomios de grado 3 ó grado 4 desde el siglo XVI; en ambos casos las fórmulas implican tantos pasos, que tienen un valor práctico casi nulo.

Las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de quinto grado o mayores. Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se ocupa del estudio detallado de las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios.

Ahora, volviendo a nuestra cacería de raíces, veamos brevemente en qué consisten tres de los métodos más usados en el cálculo de raíces.

2.1 Un cazador cauto y seguro: Bisección

Primero se localiza un intervalo $[a, b]$ en donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos. Si la función es continua, por el teorema del Valor Intermedio, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

En otras palabras, la filosofía del método es "divide y conquistarás":

- Se divide el intervalo en partes iguales y mediante el signo de $f(x)$ en el punto medio $m = (a + b)/2$ se determina en cual intervalo se encuentra la raíz.
- Se repite lo anterior cuantas veces sea necesario.

Esto se ilustra a continuación en la siguiente figura:

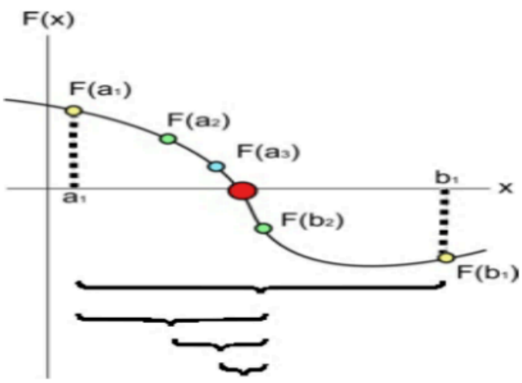


Figura 2: Método de bisección

Ejemplo 1. *Consideremos el polinomio*

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \\ &= x^6 - 14x^5 + 80x^4 - 238x^3 + 387x^2 - 324x + 108 \end{aligned}$$

Lo primero que es importante destacar es que este método no calcula la raíz $x = 2$ debido a que $P(x)$ no cambia de signo en una vecindad de $x = 2$.

Aplicando el método obtenemos las iteraciones que se muestran en la siguiente tabla.

Iter.	[0.7, 1.5]	[2.7, 3.5]
1	1.100000000000000	3.100000000000000
2	0.900000000000000	2.900000000000000
3	1.000000000000000	3.000000000000000
4	1.000000000000000	3.000000000000000

A pesar de que el método de bisección es un método seguro, tiene dos importantes limitaciones:

- No puede encontrar raíces de multiplicidad par; y
- No proporciona información sobre la multiplicidad de las raíces.

2.2 Un cazador agresivo: Newton

Si $f(x)$ es derivable, y $f'(x) \neq 0$, entonces, partiendo de una x_0 "cercana" a una raíz r nos podemos acercar rápidamente a r. El procedimiento puede resumirse de la siguiente manera:

- Encontramos la recta tangente a la curva en $(x_0, f(x_0))$.
- Localizamos la intersección de esta recta en el eje X, esta es la siguiente aproximación.
- Repetimos los pasos anteriores hasta encontrar la aproximación deseada.

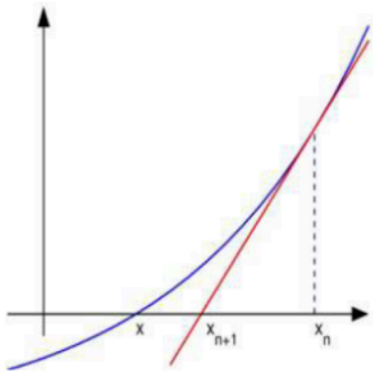


Figura 3: Método de Newton

Ejemplo 2. *Consideremos nuevamente el polinomio del ejemplo anterior. La siguiente tabla muestra las iteraciones que se obtienen al considerar tres diferentes puntos iniciales: 0.7, 1.5 y 2.5.*

Iter	0.7	1.5	2.5
1	0.861913357400722	**1**.750000000000000	**3**.250000000000000
2	**0.9**58046043324170	**1**.860294117647059	**3**.178797468354430
3	**0.99**4777925829033	**1**.923642774357139	**3**.125983470215378
4	**0.9999**06643976921	**1.9**59488686034683	**3.0**87609370555552
5	**0.9999999**69508473	**1.9**79016159995617	**3.0**60257689960044
6	**0.99999999999999**4	**1.9**89301226208940	**3.0**41085134007524
7	**1.**000000000000001	**1.99**4595179883428	**3.0**27827830379282
8		**1.99**7283218187873	**3.0**18757102572366
9		**1.99**8637948552381	**3.0**12599388982457
10		**1.999**318050415663	**3.00**8442746896179
11		**1.999**658793124606	**3.00**5648013742978
12		**1.999**829338288772	**3.00**3774113926069
13		**1.9999**14653808768	**3.00**2520003022099
14		**1.9999**57322307946	**3.00**1681752793204
15		**1.9999**78659653613	**3.00**1121927313416
16		**1.9999**89329590846	**3.000**748425265836
17		**1.99999**4667275866	**3.000**498898405205
18		**1.99999**7321413638	**3.000**332686724332
19		**1.99999**8658352604	**3.000**220849717706
20		**1.999999**293875701	**3.000**148257677209
21		**1.999999**535376950	**3.000**103454192187
22		**1.999999**780062682	**3.0000**62749685668
23		**1.999999**780062682	**3.0000**24262982823
24		**1.999999**780062682	**3.000**120812931330
25		**1.999999**780062682	**3.0000**76692841637
26		**1.999999**780062682	**3.0000**50926618578
27		**1.999999**780062682	**3.0000**80143318844
28		**1.999999**780062682	**3.0000**38852204692
29		**1.999999**780062682	**3.0000**63950086430
30		**1.999999**780062682	**3.0000**73213634369
31		**1.999999**780062682	**3.00000**2532265978
32		**1.999999**780062682	**3.00000**2532265978

Si en la tabla anterior centramos nuestra atención en los dígitos que aparecen en negritas (los dígitos significativos), observamos lo siguiente:

- En el caso de la raíz simple ($x = 1$), en cada iteración se duplica la cantidad de dígitos correctos y en el paso 7 se alcanza la mejor aproximación.

- En el caso de la raíz doble ($x = 2$), aproximadamente cada tres iteraciones se gana un dígito correcto, pero la máxima cantidad de dígitos correctos (en este caso) es siete.

- Finalmente, en el caso de la raíz triple ($x = 3$), se consigue un nuevo dígito correcto aproximadamente cada siete iteraciones. Sin embargo, también puede observarse que llega un momento en que no se logra ningún dígito correcto extra. El número máximo de dígitos correctos que es posible obtener es cinco.

En resumen, podemos decir que el método de Newton es rápido y requiere pocos pasos si la raíz es simple, pero tiene las siguientes limitaciones:

- Requiere conocer $f'(x)$
- x_0 debe estar suficientemente cercano a r,
- Si la raíz es múltiple el proceso se "degrada", se vuelve lento y la máxima precisión alcanzable disminuye,
- No proporciona información sobre la multiplicidad de las raíces.

2.3 Un cazador más cauteloso: Secante

Esta es una variante del método de Newton. La idea fundamental de este método es usar una secante a la curva en lugar de la recta tangente. En resumen, el procedimiento es el siguiente:

- Tomamos dos puntos iniciales distintos, cercanos a la raíz buscada, x_0 y x_1. Encontramos la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$.
- Localizamos la intersección de esta recta en el eje X, esta es la siguiente aproximación x_2.
- Repetimos los pasos anteriores, ahora tomando los puntos x_1 y x_2, hasta encontrar la aproximación deseada.

La figura 4 ilustra gráficamente el procedimiento.

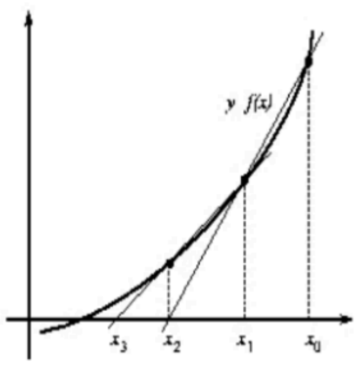


Figura 4: Método de la secante

Este método es mejor que el método de bisección, pero es más lento que el método de Newton. En general, podemos decir que el método de la secante tiene las mismas ventajas y limitaciones que el método de Newton. En resumen, podemos afirmar que los dos últimos métodos:

- No determinan la multiplicidad de las raíces
- La máxima precisión alcanzable (MPA) disminuye con el orden de la multiplicidad. De hecho se sabe (Zeng, 2005) que

$$MPA = (\text{\# dígitos de la máquina})/(\text{multiplicidad de la raíz}).$$

En los ejemplos presentados en este trabajo, se utilizaron aproximadamente quince dígitos. Eso explica que cuando la multiplicidad de la raíz era 1 obtuviéramos quince dígitos de precisión, y cuando la multiplicidad de las raíces era 2 y 3, obtuviéramos siete y cinco dígitos correctos, respectivamente.
Los tres métodos descritos en esta sección están entre los más populares. Existen variantes de ellos, métodos más sofisticados, pero cada uno tiene sus limitaciones y–lo que es más importante en la historia que estamos contando–ninguno de ellos determina la multiplicidad de las raíces que aproxima.

3. Cacería masiva: métodos matriciales

Existe otro tipo de métodos, llamados *métodos matriciales*, que son capaces de aproximar *todas* las raíces simultáneamente, independientemente de su multiplicidad.

Esto nos lleva a pensar que una posibilidad para resolver nuestro problema es aplicar uno de estos métodos y luego contar las raíces repetidas.

Una de las formas de aplicar un método matricial es la siguiente:

- A $P(x)$ se le asocia una matriz C (matriz compañera), tal que

$$P(\lambda) = \det(C - \lambda I),$$

  es decir, $P(\lambda)$ es el polinomio característico de C. En otras palabras las raíces de $P(x)$ son los valores propios de C.

- $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Se aplica a C un método para calcular todos sus valores propios. Un método estándar es el llamado algoritmo QR.

Ejemplo 3. *Consideremos otra vez el polinomio*

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \\ &= x^6 - 14x^5 + 80x^4 - 238x^3 + 387x^2 - 324x + 108. \end{aligned}$$

Es posible utilizar un programa como MATLAB, usando el comando roots para $P(x)$, obteniendo lo siguiente:

3.000071998190568 + 0.000124686892890i
3.000071998190568 - 0.000124686892890i
2.999856003612552
2.000001399946054
1.999998600060220
1.000000000000064

Lo que observamos es decepcionante. Los tres primeros resultados deberían ser $x = 3$, en lugar de eso encontramos dos números complejos y un tercer número que, aunque real, tiene sólo cuatro dígitos correctos. Los siguientes dos resultados, que corresponden a $x = 2$, sólo tienen 6 dígitos correctos. El último resultado, correspondiente a la raíz simple $x = 1$, es el único que puede dejarnos satisfechos.

Observemos que todas los resultados son distintos entre sí y no es posible saber cuáles son las raíces repetidas. Además, mientras mayor es la multiplicidad de la raíz, más se alejan los resultados obtenidos de la raíz exacta, dándose el caso en que incluso se introducen raíces complejas donde no las hay (como en nuestro ejemplo).

3.1 Sobre la multiplicidad de las raíces

¿Cómo podemos explicar el "fracaso" del método anterior? Lo primero que debemos entender es que, a falta de información sobre la multiplicidad de las raíces, los métodos tratan de encontrar n raíces simples.

Además, el polinomio almacenado en la computadora no es precisamente $P(x)$ sino uno ligeramente diferente, ¡esto destruye la multiplicidad de las raíces! (Kahan, 1972) (Wilkinson, 1963). En otras palabras, el polinomio almacenado *efectivamente* tiene n raíces distintas entre sí que se aproximan a las raíces del polinomio original.

El sentir común sobre los polinomios es que son funciones nobles y sencillas, quizá porque, entre otras cosas, los polinomios

- son fáciles de evaluar,
- son infinitamente diferenciables y fáciles de derivar,
- una función con n derivadas continuas puede ser aproximada localmente por un polinomio (teorema de Taylor),
- toda función continua definida en un intervalo compacto de los reales puede ser aproximada en todo el intervalo, tan cerca como se desee, por un polinomio (teorema de Stone-Weierstrass),
- frecuentemente se usan para interpolar funciones,
- etc., etc.

En resumen, los polinomios tienen fama de muy bien comportaditos. Más bien son “mosquitas muertas”. Wilkinson (Wilkinson, 1963) señala:

> *Una tendencia a desestimar las dificultades que representa trabajar con polinomios generales es quizá una consecuencia de la experiencia personal en el Análisis Clásico. Es natural considerar a un polinomio como una función muy conveniente ya que es acotada en cualquier región finita y tiene derivadas de todos los ordenes. Sin embargo, en el trabajo numérico los polinomios que tienen coeficientes más o menos arbitrarios son engorrosos de manejar en forma completamente automatizada.*

4. Sensibilidad de las raíces

Aunque usted no lo crea, así como hay personas de carácter inestable, algunos polinomios tienen carácter inestable y son conocidos como polinomios mal comportados.

¿En qué sentido son mal comportados? Para estos polinomios *pequeños cambios* en los coeficientes provocan *grandes cambios* en las raíces. Es decir, para este tipo de polinomios, las raíces son muy sensibles a los cambios en los coeficientes (como pudo observarse en el ejemplo resuelto por métodos matriciales). Técnicamente este fenómeno se conoce como “mal condicionamiento”.

Las malas noticias son que los polinomios con raíces múltiples pertenecen a esta clase de polinomios, en otras palabras, prácticamente *todos* son mal comportados en mayor o menor medida.

Resumiendo: Las raíces múltiples de un polinomio no se pueden calcular con toda la precisión que la computadora puede manejar. La máxima precisón alcanzable, con los métodos convencionales, depende de la multiplicidad de la raíz y se va degradando conforme aumenta la multiplicidad. Al almacenar un polinomio con raíces múltiples, en la computadora, se destruye la estructura de multiplicidades, una raíz de multiplicidad k, da lugar a un cúmulo o racimo de k raíces, del polinomio almacenado, que aproximan a la raíz del polinomio exacto.

Aparentemente nos encontramos en un callejón sin salida. En efecto el problema que tratamos de resolver es un problema complicado y sólo recientemente ha sido resuelto. Como es natural, se ha tenido que replantear el problema y verlo desde un nuevo punto de vista.

Para entender este nuevo punto de vista, vamos a hacer una comparación de los polinomios mal comportados con personas con caracter, digamos, inestable.

A menudo una persona con mal genio, suele tener su lado amable. “En el fondo es una buena persona, solo hay que saber tratarlo”, nos pueden decir personas que lo conocen bien. El problema es justamente cómo saber llegarle.

El gran compositor mexicano José Alfredo Jiménez, filósofo y músico popular dice en su canción "El Rey":

Después me dijo un arriero
que no hay que llegar primero
pero hay que saber llegar

Esta analogía nos será útil en lo que sigue.

Como hemos visto, el simple hecho de almacenar los coeficientes de un polinomio provoca en general un cambio pequeño en ellos, bastando eso para destruir la estructura de multiplicidades. Kahan en un célebre reporte técnico en 1972, demuestra que cierto tipo de perturbaciones al polinomio original no afectan demasiado a las raíces. Para entender esto veamos dos ejemplos.

Ejemplo 4. *Sea $p(x) = (x-2)^2$, sea $t \approx 2$, entonces el polinomio $q(x) = (x-t)^2 = x^2 + (-2t)x + t^2$, tiene una raíz de multiplicidad 2, que aproxima la raíz de $p(x)$.*

De otra manera, sea $q(x) = x^2 + a_1x + a_2$, si $a_1 = -2t$, $a_2 = t^2$ y $t \approx 2$, entonces $q(x)$ tiene una raíz de multiplicidad 2 que aproxima a la raíz de $p(x)$. El vector de coeficientes $(a_1, a_2) = (-2t, t^2)$ define una curva paramétrica en $\Re^2$, a saber, la parábola mostrada en la figura 5. Si nos acercamos al punto (2,2) con puntos sobre dicha parábola, estaremos construyendo una sucesión de polinomios, cada uno de ellos con una raíz doble, y una sucesión de números, la raíz doble de este polinomio, que converge a la raíz de $p(x)$.

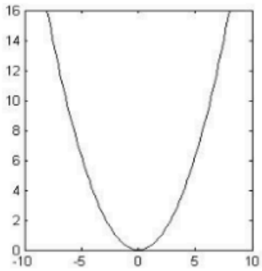


Figura 5: Gráfica de $(-2t, t^2)$

Ejemplo 5. *Sean*

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x-2)^2 &&= x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \\ q(x) &= (x-s)(x-t)^2 &&= x^3 + (-s-2t)x^2 + (2st + t^2)x + (-st^2) \end{aligned}$$

Aquí los coeficientes satisfacen $(a_1, a_2, a_3) = (-s-2t, 2st + t^2, -st^2)$, lo cual define una superficie en $\Re^3$, como se muestra en la figura 6.

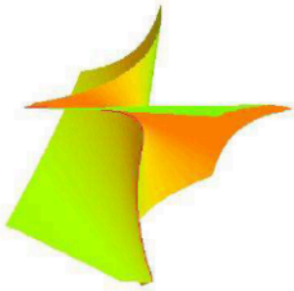


Figura 6: variedad $(-s-2t, 2st+t^2, -st^2)$

De nuevo, si nos acercamos al punto (1,2), pero sobre esta superficie, estaremos generando una sucesión de vectores que converge a (1,2), cuyos elementos son raíces de un polinomio, una raíz simple y la otra doble.

En general los coeficientes con la misma estructura de multiplicidad que $p(x)$ formarán lo que se llama una variedad. En estos ejemplos conocemos las raíces y sus multiplicidades. Nosotros tenemos el problema inverso, dado un polinomio inexacto, construir una variedad tal que sus elementos definan polinomios con la misma estructura de multiplicidad del polinomio exacto original y encontrar una aproximación a las raíces de dicho polinomio.

Este nuevo punto de vista nos plantea dos retos, ambos difíciles de resolver desde el punto de vista numérico

- Determinar la estructura de multiplicidad del polinomio original.
- Diseñar una forma de construir una sucesión de polinomios que conserve esa estructura de multiplicidad y que converja al polinomio original

Debemos recordar que el polinomio en cuestión no es el polinomio original, sino uno perturbado, es decir, inexacto.

Antes de continuar conviene hacer un comentario sobre el primer punto. Existe un algoritmo basado en el algoritmo de Euclides, pero este no funciona a nivel de cálculo simbólico. En el terreno numérico, se producen polinomios inexactos y el problema numérico es en realidad también mal condicionado (Zeng, 2005)

5. El trabajo de Zeng

Tuvieron que pasar más de 25 años para implementar computacionalmente las ideas de Kahan. En 2005 es publicado un artículo de Z. Zeng (Zeng, 2005) en el que resuelve los dos retos planteados de forma muy satisfactoria. Los detalles técnicos quedan fuera de los objetivos de este trabajo. Zeng recurre a herramientas teóricas y numéricas sofisticadas, tales como variedades (geometría diferencial), mínimos cuadrados no lineales (optimización) y como base de ello, técnicas de Álgebra Lineal Numérica. Sin embargo podemos mostrar los resultados de sus algoritmos en algunos ejemplos.

Ejemplo 6. *Retomemos un ejemplo anterior.*
$p(x) = (x-1)(x-2)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,$
$q(x) = (x-s)(x-t)^2 = x^3 + (-s-2t)x^2 + (2st + t^2)x + (-st^2),$
$G(s,t) = (-s-2t, 2st + t^2, -st^2)$
$G(s,t)$ *determina una variedad en* $\Re^3$ *donde cada valor de* $G(s,t)$ *representa un polinomio* $q(x)$ *con la misma estructura de multiplicidad que tiene* $p(x)$.

En la figura 7 se muestran algunas iteraciones sobre la variedad que convergen a las raíces 1 y 2.

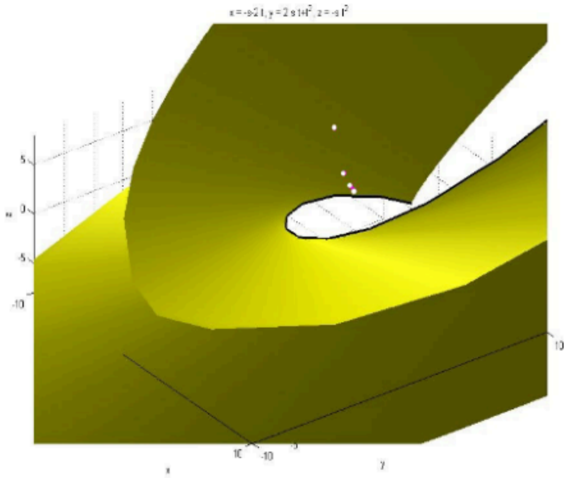


Figura 7: Iteraciones sobre la variedad $G(s,t)$

Ejemplo 7.

$$p(x) = (x-1)^{20}(x-2)^{15}(x-3)^{10}(x-4)^5$$

Raíz	Multiplicidad
1.000000000000000	20
2.999999999999997	15
3.000000000000011	10
3.999999999999985	5

Un hecho impresionante es que entre más grandes son las multiplicidades de las raíces, mayor es la precisión con la que son calculadas.

6. Finalmente

Hemos visto que el problema de determinar las raíces de un polinomio y sus respectivas multiplicidades es un problema bastante complicado. Esto nos hace ver que la elaboración de software educativo de calidad tampoco es tarea fácil y requiere de trabajo interdisciplinario.

Adicionalmente queremos comentar que la historia no termina aquí. Han aparecido recientemente en la literatura, sugerencias de mejoras a este método, así como caminos alternativos.

Referencias bibliográficas

Atkinson, K. (2005). *Theoretical numerical analysis : a functional analysis.* Springer; 2nd ed.; New York, USA.

Banolu, E. (2004). *Effect of dilute lactic acid hydrolysis on the cooked viscosity of a fermented white wheat flour–yogurt mixture.* Journal of Food Engineering, Volumen 64, Num. 3, pp 343-346.

Kahan, W. (1972). *Conserving Confluence Curbs Ill–Condition*. University of California. Berckeley. TR-6.

Kalantari, B. (2008). *Polynomial root-finding and polynomiography*. Ed. World Scientific.

Kincaid, D. (1991). *Numerical analysis : mathematics of scientific computing*. Pacific Grove CA : Brooks/Cole.

Moler C.B. (1997). *Numerical computing with Matlab*. SIAM.

Uspensky, J. V. (2007). *Teoría de ecuaciones*. Limusa; México.

Wilkinson J. H. (1963). *Rounding errors in algebraic processes*. Ed. Prentice-Hall

Zeng, Z. (2005). *Computing multiple roots of inexact polynomials*. Mathematics of Computation; N0.74;(2005); pp 869 - 903.

Humberto Madrid de la Vega
hmadrid@gmail.com