

# Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos

José Luis Díaz Gómez

[jdiaz@mat.uson.mx](mailto:jdiaz@mat.uson.mx)

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

México

**Resumen.** Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en el nivel de secundaria y preparatoria. Sin embargo, los estudiantes que ingresan a la universidad tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella. La presencia de errores algebraicos obstaculiza con frecuencia la articulación exitosa, y resulta por ello imprescindible un adecuado diagnóstico con el propósito de incidir sobre ellos. En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de un examen diagnóstico de álgebra a una muestra de estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial que, entre otros, tiene los siguientes propósitos: (a) detectar los errores algebraicos más frecuentes; (b) detectar los temas de álgebra en los cuales los alumnos tienen más dificultades; y (c) hacer un seguimiento del comportamiento de los alumnos a través de su paso por los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales.

**Palabras clave:** Álgebra, Cálculo Diferencial, Cálculo integral

**Abstrac:** Algebra is devoted to significant instructional time at the middle and high school level. However, students entering college have difficulty understanding and managing fundamental concepts related to it. The presence of algebraic errors frequently hinders successful articulation, and for this reason an adequate diagnosis is essential in order to influence them. This paper presents the results of the application of a diagnostic test of algebra to a sample of students from a Differential Calculus course that, among others, has the following purposes: (a) detect the most frequent algebraic errors; (b) detect the algebra topics in which students have the most difficulty; and (c) monitor the behavior of the students throughout their passage through the Differential Calculus, Integral Calculus and Differential Equations courses.

**Keywords:** Algebra, Differential Calculus, Integral Calculus

## 1. Introducción:

En el ámbito de la educación matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos: las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas. Matz (1980) distingue dos fases en la conducta de los alumnos ante un problema: en la primera, el conocimiento previo sobre el tema toma la forma de una regla o fórmula a aplicar, mientras que en la segunda se ponen en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas que no son familiares. Los errores sistemáticos en los que incurren los alumnos en la resolución de problemas son, según este autor, el resultado de un fracasado intento por adaptar conocimientos, adquiridos previamente, a una nueva situación. Brousseau, Davis y Werner (1986), señalan, en el mismo sentido, que los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza. En la actualidad el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas. Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en el nivel de secundaria y preparatoria, sin embargo los estudiantes que ingresan a la universidad tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella. En nuestro ámbito de trabajo, el primer año de la carrera de Químico Biólogo, la presencia de errores algebraicos obstaculiza con frecuencia la articulación exitosa, y resulta por ello imprescindible un adecuado diagnóstico que sustente una postura superadora.

Con este objetivo iniciamos un proyecto cuyo primer objetivo es tratar de responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué parte del álgebra no conocen los estudiantes?
- ¿Qué tipo de errores algebraicos cometen con más frecuencia los alumnos que comienzan estudios universitarios?
- ¿Pueden los errores algebraicos detener el avance de los estudiantes hacia el siguiente curso?,
- ¿Tienen razón los profesores cuando dicen que los alumnos no saben álgebra, y que por eso no aprueban Cálculo?

Para intentar dar una respuesta a estas preguntas aplicamos un examen de opción múltiple de álgebra a una muestra de estudiantes que cursan la materia de Cálculo Diferencial. El examen de álgebra tiene la característica de que cada pregunta del mismo contiene como opciones de respuesta errores algebraicos que con gran frecuencia cometen los alumnos. Aquí mostramos algunos resultados de este trabajo.

## 2. Fundamentos teóricos.

El error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos. El conocimiento humano es falible, esto es, unida a la capacidad que tiene el ser humano de conocer, se halla siempre presente la posibilidad de que conceptos y procedimientos deficientemente desarrollados, y aún completamente equivocados, sean considerados como verdaderos. Así ha ocurrido en numerosas oportunidades a lo largo de la historia, en que se han tenido por verdaderas concepciones que luego fueron rechazadas por no explicar adecuadamente la realidad.

Bachelard (1988) introdujo el concepto de *obstáculo epistemológico* para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento. Señala que los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de *obstáculo*: se conoce *en contra* de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error.

Brousseau (1983) tomó las ideas de Bachelard y las desarrolló en el ámbito específico del aprendizaje de la matemática. En su trabajo distingue entre obstáculos de origen *psicogenético*, que están vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz, los de origen *didáctico*, vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje, y los de origen *epistemológico*, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos. En todos los casos se destaca el carácter de resistentes que presentan estos obstáculos, y es necesaria su identificación, para luego alcanzar los nuevos conocimientos a partir de su superación.

El aprendizaje de las matemáticas genera a los alumnos muchas dificultades que son de diferente naturaleza. Algunas tienen su origen en el microsistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas, según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currícula de matemáticas y métodos de enseñanza. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

### 3. Errores en Matemáticas

Las teorías cognitivas sostienen que la mente del alumno no es una página en blanco: el alumno tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo en la formación del mismo. El conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total. Los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una suerte de retroalimentación del proceso educativo.

Mulhern (1989) señala las siguientes características de los errores:

- Surgen, por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor.
- Son persistentes y difíciles de superar, ya que requieren una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Pueden ser sistemáticos o por azar: los sistemáticos son más frecuentes y revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, y los cometidos por azar son ocasionales.
- Muchas veces los alumnos no toman conciencia del error ya que no comprenden acabadamente el significado de los símbolos y conceptos con que trabajan.

Hay patrones consistentes en los errores a dos niveles: a nivel individual, ya que las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares y a nivel colectivo, ya que distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje.

En razón de esta regularidad con la que suelen presentarse, varios autores han elaborado clasificaciones de los errores en el aprendizaje de la matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse. Puesto que nuestra intención en este momento no es clasificar los errores algebraicos, no los mencionaremos.

### 4. Sobre el diagnóstico.

Sin duda es innegable que una gran cantidad de alumnos llegan a la carrera de Q. B. con un bajo nivel de conocimientos antecedentes, motivados entre otros factores por programas de estudios de bachillerato que por lo regular no se cubren. Esto ocasiona que los estudiantes tengan un bajo aprovechamiento en el curso de Cálculo.

Un tema importante y prerrequisito necesario para el Cálculo es el álgebra, que según comentarios de los profesores que imparten el curso de Cálculo, “*los alumnos no saben álgebra*”, y es por eso que no tienen éxito en aprobar el curso. Esto sin tomar en cuenta otros temas también importantes como la trigonometría, la geometría y la geometría analítica.

Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en los niveles de secundaria y preparatoria, sin embargo, los estudiantes que ingresan a la carrera de Q. B. tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella.

Estas consideraciones nos llevaron a realizar este trabajo con el objetivo de profundizar en la comprensión sobre cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes que ingresan a las carreras de Q. B. al resolver ejercicios y problemas que involucran conocimientos algebraicos. El estudio lo realizamos analizando la información obtenida a partir de la aplicación de un examen de diagnóstico sobre álgebra, a 201 alumnos del primer semestre del curso de Cálculo en su mayoría de nuevo ingreso.

La bondad del instrumento de medición y la importancia estadística de la muestra, nos permite afirmar que las conclusiones obtenidas pueden servir no sólo como una medida del nivel de logro, sino como un elemento de reflexión. Los temas analizados son: Operaciones con racionales; Desarrollo binomial; Leyes de cancelación; Términos Semejantes; Exponenciación; Ley Distributiva; Uso del Cero; Factorización; Despeje de Variables. Medidos a través de errores algebraicos que cometen los estudiantes cuando trabajan con estos temas.

Al momento de aplicar el examen, los estudiantes no habían recibido antes un curso propedéutico sobre álgebra así que podemos suponer entonces que los resultados reflejan los conocimientos recibidos en los niveles de secundaria y preparatoria. En este marco situamos las pruebas de diagnóstico, a las que podemos asignar los siguientes objetivos específicos:

- Retroalimentar al sistema escolar preuniversitario regional para que pueda optimizar sus esfuerzos en mejorar la enseñanza de la matemática.
- Informar a los docentes del curso de Cálculo el nivel de conocimientos de los alumnos, con el fin de que puedan diagramar una enseñanza acorde a la situación real.
- Alertar a los propios estudiantes acerca del nivel de sus conocimientos matemáticos.

### 5. Sobre el examen diagnóstico de álgebra.

El examen consta de 28 preguntas de opción múltiple y es el resultado de una investigación que se realizó sobre los errores de álgebra más frecuentes entre los estudiantes de los niveles desde secundaria hasta la universidad (Díaz, 1995).

Cada pregunta consta de 4 opciones, las primeras tres (A, B, C) representan errores que con frecuencia cometen los estudiantes al realizar operaciones algebraicas. En la cuarta opción (D) se espera que los estudiantes escriban la respuesta correcta, ya que en las opciones de cada pregunta no se encuentra la respuesta correcta. El examen si bien no es exhaustivo sobre el álgebra, si representa una muestra de temas que son básicos para el curso del cálculo. Un ejemplo de una pregunta es la siguiente:

19. Al efectuar la operación  $(a^2)^3$  ¿cuál es el resultado que se obtiene?

(A)  $a^5$

(C)  $a^8$

(B)  $a a^{2^3}$

(D) Ninguno de los anteriores. Da tu propia respuesta.

### 6. Análisis de las respuestas.

Al aplicar el examen, se les hizo hincapié a los estudiantes que primero resolvieran cada problema de cada pregunta y después contestaran la pregunta. Se espera que los estudiantes contesten D y den la respuesta correcta. A aquellos que seleccionaron D y no dieron una respuesta se les tomó como respuesta incorrecta. Es claro que las opciones A, B, C, son respuestas incorrectas.

### 6.1. Resultados sobre los errores.

La siguiente tabla nos muestra algunos de los errores que con más frecuencia seleccionaron los alumnos en el examen.

Error	%	Error	%	Error	%
$a^3 - b^3 = (a - b)^3$	41	$a(b/c) = ab/ac$	56	$k/0 = 0$	65
$(x - y)^2 = x^2 - y^2$	33	$c^2 = a^2 + b^2, c = a + b$	29	$a^{12} / 5 a^4 = 4 a^3$	48
$(a^2)^3 = a^5$	52	$cb = a + b, c = a$	33	$a/a(a + b) = a + b$	49
$x^3 - x^2 = -x^5$	31	$z^2 = x + y, z = \sqrt{x + y}$	42	$x^0 = 0$	36
$2x(x - 1) = 2x^2 - 2$	34	$x + y = xy$	55	$4x^2 - = 9 (2x - 3)^2$	33
$a^m + a^n = a^{m+n}$	39	$2/3 \times 5/4 = 8/15$	38	$a(x)(y) = (ax)(ay)$	52

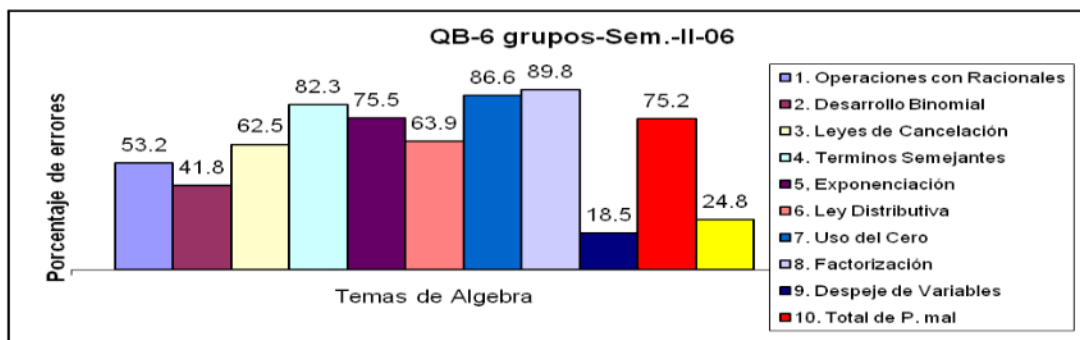
Se encontró un error no contemplado en el examen que 56 de los alumnos dieron como respuesta en la opción D y es el siguiente:  $x^3 - x^2 = x$ .

### 6.2. Resultados sobre los temas de álgebra

Los resultados que se muestran son un porcentaje de las *respuestas incorrectas* que obtuvieron los alumnos encuestados en cada uno de los temas de álgebra. Para leer los datos. En la gráfica de izquierda a derecha: 53.2% de los estudiantes tienen problemas con las operaciones con racionales; 41.8% tiene problemas con el desarrollo binomial, etc.

### 6.3. Resultados globales del examen.

75.2% es el total de respuestas incorrectas al examen diagnóstico, 24.8 % el total de respuestas correctas al examen.



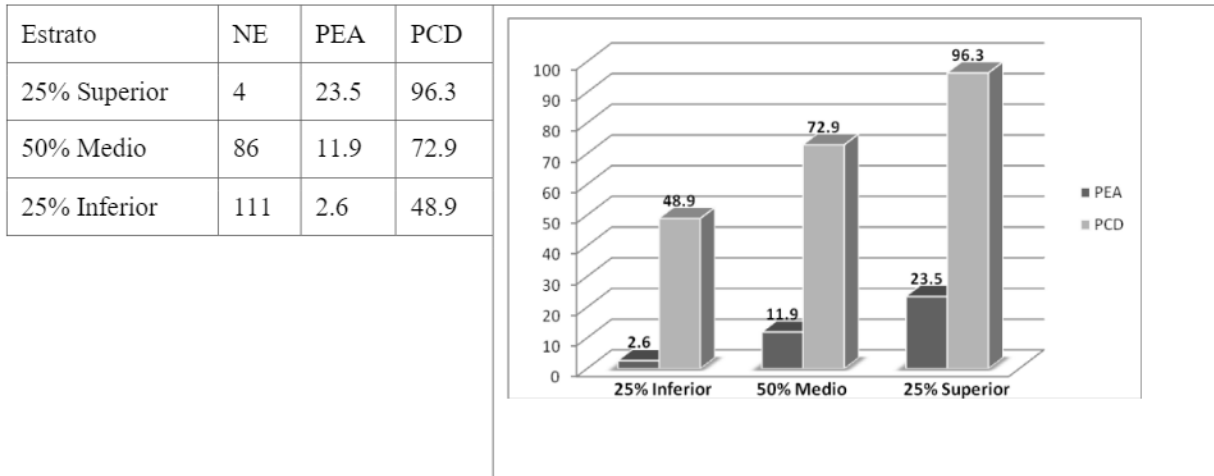
### 6.4. Resultados por estratos en álgebra y cálculo

Dividimos el número de preguntas del examen en tres estratos para analizar el comportamiento de la muestra, los resultados son los siguientes.

El 25% superior representa el número de alumnos que obtuvieron de 28 a 22 aciertos.

El 50% medio representa el número de alumnos que obtuvieron entre 7 y 21 aciertos El 25% inferior representa el número de alumnos que obtuvieron de 0 a 6 aciertos.

Al final del curso de Cálculo diferencial se recopilaron las calificaciones finales para analizar el comportamiento de la muestra en este curso. Los resultados se muestran en la tabla.



En la tabla se muestra el número de estudiantes (NE) en cada uno de los estratos y el promedio de aciertos en el examen diagnóstico de álgebra (PEA) y el promedio de las calificaciones que obtuvieron en el curso de Cálculo Diferencial (PCD).

### 6.5. Comportamiento de los alumnos en los cursos de cálculo.

Los estudiantes de Q. B. cursan durante su carrera tres cursos muy relacionados, y son el Cálculo Diferencial (C. Dif.), el Cálculo Integral (C. Int.) y las Ecuaciones diferenciales (E. Dif.). Se recolectaron las calificaciones finales de estos cursos para ver el comportamiento de los estudiantes; los resultados son los siguientes:

Semestre	Materia	Alumnos	Aprobados%	P.Cal.	P.A.D.	Reprobados%	P.Cal.	P.A.D.
2006-2	C. Dif	201	60.7	79.1	9	39.3	30.8	4
2007-1	C. Int	111	69.4	78	10	30.6	41.6	7
2007-2	E. Dif.	51	78.4	77.5	11	21.6	32.6	8

Nota: **P. Cal** significa promedio de calificaciones en el curso. **P.A.D.** significa, promedio de aciertos en el examen diagnóstico de álgebra.

El número de estudiantes que no aprobaron el curso de Cálculo diferencial fue de 101, es decir el 50%, pero con el examen extraordinario el porcentaje de aprobados subió al 60.7%. El número de estudiantes a los cuales se les aplicó el examen diagnóstico de álgebra en el curso de Cálculo Diferencial fue de 201, de este grupo de 201, 122 lo aprobaron y solo 111 se inscribieron en el curso de Cálculo Integral, de este grupo de 111, 77 aprobaron el curso de Cálculo Integral, del grupo de 77 solo 51 se inscribieron en el curso de Ecuaciones Diferenciales, de los cuales sólo 41 aprobaron el curso, la pregunta aquí es dónde quedaron los restantes 160, ¿están repitiendo los cursos anteriores?, o ¿desertaron?, o están descansando de las matemáticas.

En el curso de Cálculo Diferencial del semestre 2008-1 de la muestra de 201 estudiantes encontramos a 9 cursando por tercera vez la materia y a 6 cursándola por cuarta vez para un examen especial, el promedio de respuestas correctas que tuvieron estos 15 estudiantes en el primer examen diagnóstico de álgebra fue de 2. Le aplicamos el mismo examen diagnóstico de álgebra a 7 de los 15 estudiantes y encontramos que su media de respuestas correctas fue de 7. En el curso de cálculo Integral encontramos 15 estudiantes, estos estudiantes han repetido el curso de Cálculo Diferencial y el de Integral o están por tercera ocasión en el de Integral, su media en el examen diagnóstico es de 3.5 aciertos.

## 7. Conclusiones.

Se detectaron los temas de álgebra en los que la muestra de estudiantes tiene poco conocimiento y los errores algebraicos que con más frecuencia cometen. Por otro lado, el examen nos muestra que los alumnos ingresaron con un nivel muy bajo de conocimientos algebraicos y aunque no se puede afirmar categóricamente que aquellos alumnos que tienen un bajo rendimiento en álgebra no aprobarán el curso de Cálculo, se tiene evidencia de que los que muestran un nivel muy bajo repetirán más de una vez el curso de Cálculo.

## Bibliografía.

- Matz, M.** (1980). *Towards a computational theory of algebraic competence*. Journal of Mathematical Behavior, 3(1), 93-166.
- Bachelard, G.** (1978). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.
- Brousseau, Guy** (1986) *Fundements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques. Vol 7, N°2.
- Brousseau, G., Davis, R., Werner, T.** (1986). *Observing Students at Work*. En Christiansen, B, Howson, G., Otte, M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Díaz Gómez, J.L.** (1995) "Un estudio regional sobre errores algebraicos". Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba. Agosto de 1995.
- Mulhern, G.** (1989). Between the ears: Making inferences about internal process. En Greer, B. & Mulhern, G. /Eds.) *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

