Matemática visual: simulaciones relativas al teorema fundamental del cálculo

Miguel Delgado Pineda
francois.pluvinage@math.unistra.fr

Universidad Nacional de Educación a Distancia
Madrid, España

Resumen. En este trabajo se presenta un laboratorio interactivo cuyo foco de atención se corresponde con las propiedades de locales de las funciones definidas bajo el signo de integral. La fuerza educativa de este laboratorio estriba en el uso de las representaciones visuales que se hacen de los conceptos y resultados teóricos principales. Las aplicaciones informáticas que aproximan a la realidad teórica están desarrolladas en código Maple, y el usuario puede interactuar en modo comando con la aplicación y realizar diversos experimentos. La pila de instrucciones se presenta con los correspondientes comentarios teóricos formando una unidad didáctica.

Palabras claves: Matemática visual, laboratorio virtual, simulación educativa, enseñanza con ordenador.

Abstrac: This work presents an interactive laboratory whose focus corresponds to the properties of premises of the functions defined under the integral sign. The educational strength of this laboratory lies in the use of visual representations that are made of the main theoretical concepts and results. The computer applications that approximate the theoretical reality are developed in Maple code, and the user can interact in command mode with the application and perform various experiments. The stack of instructions is presented with the corresponding theoretical comments forming a didactic unit.

Keywords: Visual mathematics, virtual laboratory, educational simulation, computer teaching.

1. Introducción

Un problema importante, en el proceso de aprendizaje matemático de un alumno, se presenta al iniciarse en las materias que suelen ser descritas dentro del Cálculo o Análisis Matemático. En esa etapa, el alumno debe hacer evolucionar, necesariamente, su forma de pensar en objetos matemáticos. Suele ocurrir, que durante largo tiempo, ese alumno ha sido adiestrado adecuadamente en cuestiones de índole discreta; de carácter algebraico o geométrico, y debe ser adiestrado, ahora, en cuestiones de carácter continuo; métrico y topológico. Evidentemente, en este instante puede aparecer una dificultad didáctica que denominamos "Efecto Frontera", descrito por la esencial desaparición de los conceptos, y donde, el aprendizaje del Cálculo se transforma en una mera banalización algebraica de los elementos básicos de dicha área de conocimiento.

Lo cierto es que una vez que se produce esta dificultad, dicho efecto frontera suele perdurar bastante tiempo a lo largo del desarrollo académico del alumno, incluyendo su etapa de formación universitaria. Si este efecto no se tiene en cuenta y no se corrige, entonces se mantiene activo en la vida profesional del alumno una vez superada su formación universitaria. No es raro encontrar profesionales con dicho efecto activo, e incluso profesores de Matemáticas, de cualquier nivel de enseñanza, donde este efecto sigue manteniéndose firme y combativo.

Algunos de los elementos básicos de esta parte de las Matemáticas son: los números reales, las funciones, y los conceptos de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. La actuación sutil del efecto frontera permite mantener la creencia de que el aprendizaje relativo a estos elementos, se basa en adquirir un dominio adecuado de los procedimientos algorítmicos utilizados en su manipulación y tratamiento. Este efecto hace pensar, que tales elementos matemáticos tienen una naturaleza estática, y que son manipulados, por expertos, como si se trataran de píldoras valiosas y muy eficaces. Así pues, bajo la acción de efecto frontera se sobreentiende que llegar a ser un experto en dicha manipulación simbólica es el objetivo único del aprendizaje de los elementos del Cálculo.

Este trabajo presenta la naturaleza dinámica de algunos elementos del Análisis, mostrando algún tipo de representación dinámica de ellos. El objetivo principal es mostrar dichas representaciones con el fin de que los alumnos puedan adquirir tales elementos matemáticos de forma coherente, y puedan visualizarlos. Las representaciones que se presentarán se realizan en el marco de influencia del Teorema Fundamental del Cálculo.

La idea de realizar este trabajo, emerge en aquellos instantes en los que el autor era un estudiante y profesor de Enseñanza Secundaria. Un estudiante interesado en completar la indispensable memoria de investigación para obtener el título de doctor. El instante inicial se produjo con la formulación de la pregunta, que le hacía su director de tesis Dr. Enrique Linés Escardó: "… estos resultados están muy bien, pero Miguel, ¿sabe usted que es una función $L^p(\mathbf{R})$?". Aquel doctorando no dudó en responder con la correspondiente contestación académica correcta, a tal pregunta tal contestación. Pudo comprobar que tal respuesta no le satisfacía suficientemente al maestro, y después de unos instantes dijo: "…usted debe pensar que esas funciones son como chimeneas muy altas…". Es evidente, que aquel buen profesor no sólo se interesaba por la corrección de los razonamientos matemáticos realizados por su alumno, si no que le intentaba, que ese alumno adquiriera una "imagen aproximada" de aquellos objetos que el alumno manipulaba en su tesis.

Hay quienes piensan que sólo las vivencias dolorosas hacen evolucionar los comportamientos de aquellos que las padecen. La mencionada pregunta fue, sin duda, una experiencia positiva, que ha hecho cambiar la práctica de mi profesión docente desde su inicio, poco a poco y sin pausa. Se ha transformado en una necesidad irrenunciable, manteniendo su espíritu, la búsqueda de situaciones que haga visual aquello que enseño o demuestro. Desde aquel instante cambió la forma de acceder a todos los conceptos y a todos los resultados, que como profesor he comunicado a mis alumnos. Igualmente, cambió la forma de interpretar aquellos artículos de investigación con los que trabajo en mi tarea investigadora. La decisión tomada fue buscar y disponer de alguna imagen o aproximación visual que aclarase los resultados que comunicase o que tuviese que estudiar.

2. Aproximaciones visuales de objetos matemáticos

Es evidente que algunos objetos del Análisis Matemático parecen incorporar de forma natural una representación gráfica. Como paradigma de estos objetos podemos considerar al concepto de función, si bien, la representación gráfica tan sólo representa un primer paso para visualizar el concepto.

Por un lado, la mayoría de los objetos matemáticos, y sobre todo los resultados teóricos, no suelen incorporar representación alguna. Este hecho queda patente analizando las imágenes que acompañan a los conceptos y teoremas en los textos impresos.

Por otro lado, en aquellos objetos con representaciones, la descodificación de la información visual suele quedar implícita en la imagen. Esas imágenes son utilizables por quienes las muestran y por expertos, pero inutilizables para aquellos que las estudian. No se puede, o no se debe, aportar información visual creyendo ingenuamente que será utilizada por aquel que observe y estudie el resultado al cual se adjunta. Un ejemplo que no deja de sorprender a este profesor es la ocultación, no intencionada, del factor “escala” con que se muestran las gráficas de funciones habituales. Es claro que este factor puede hacer resaltar la gráfica de una función y obviar la de otra.

¿Es fácil generar imágenes sobre objetos matemáticos? La respuesta es algo que cada uno debe pensar, por ello, simplemente afirmaré esa relativa facilidad pensando en el caso paradigmático de las funciones reales de variable real, sobre todo si se utiliza cualquier ordenador, o computador, dotado de un programa de cálculo numérico que disponga de capacidades graficas.

¿Qué imágenes se generan con ordenador? Contestar a esta pregunta es menos fácil, puesto que requiere analizar el conjunto de números que emplea un ordenador.

Conviene aclarar que un ordenador tan sólo opera con dos conjuntos discretos de números: Un conjunto acotado de números enteros y otro conjunto acotado de números racionales de expresión decimal finita. El tamaño y las cotas de esos conjuntos dependen de la precisión que se emplee en la representación binaria (codificación) de esos números. Así pues, ni los números racionales ni los números reales existen en un ordenador.

Los números utilizables tienen un tamaño decimal preestablecido por codificación, y esta codificación define el máximo y el mínimo del subconjunto de números decimales positivos. Es un hecho, que si sólo se dispone de doble precisión para representar números decimales, entonces aquellos números reales que se diferencian en los decimales 17, 18, 19… son tratados por el ordenador como un mismo número decimal.

Si el conjunto de números es discreto, es evidente, entonces el conjunto de puntos de la gráfica de una función no deja de ser discreto y la gráfica de una función no deja de ser una nube de puntos en la pantalla de un ordenador. Muchos profesores se sorprenderían ver el tamaño real, muy pequeño, de la nube de puntos que se genera al solicitarle la representación gráfica de una función.

En general, los programas con capacidades gráficas calculan una pequeña nube de puntos de la función y ponen en marcha un proceso de interpolación que permite mostrar en pantalla una "gráfica continua". Sin duda, lo que el programa muestra en pantalla es una aproximación de la gráfica de la función. Esencialmente, este proceso de representación gráfica no es más que un proceso de simulación gráfico y, como toda simulación, puede ocultar características importantes de la gráfica. Un ejemplo del efecto simulador se puede apreciar en la gráfica que la mayoría de los programas construyen para la función $f(x) = \frac{x^2}{x}$. En esta gráfica no suele apreciarse la discontinuidad evitable existente en el punto $x = 0$, y en su lugar suele aparecer la gráfica de la función $g(x) = x$.

Por otro lado, existen funciones cuyas gráficas son lo suficientemente complejas para superan con creces las posibilidades interpoladoras de cualquier nube de puntos, por grande que estas sean, por ejemplo $f_1(x) = \text{sen}\,\frac{1}{x}$ y $f_2(x) = \text{sen}\,x^2 . x$

Este autor se sitúa en el punto de vista de la Simulación Gráfica para generar imágenes, que aproximen conceptos y teoremas, con el fin de favorecer un proceso de visualización interna del alumno.

Una vez aclarado algunas cuestiones, podemos asegurar que es relativamente fácil generar imágenes y simulaciones con un ordenador. No resulta tan fácil transferir esas imágenes a otro, de forma positiva, es decir, de manera que ese otro observe aquello que ejemplifican, o que simulan. En el aula se suele hacer un pre-interpretación de la simulación, pero en la Enseñanza a Distancia, la experiencia y los conocimientos de ese otro son las herramientas disponibles para la auto-interpretación de esa simulación. En este aspecto cada uno de nosotros ve aquello que está acostumbrado a ver siguiendo los principios básicos que rigen el estudio de la Inteligencia Visual.

Lo verdaderamente difícil es conseguir que el otro visualice los conceptos ejemplificados. Es evidente, que no entendemos "visualizar" como un sinónimo de ver o mirar, si no de adquirir conocimiento y eso requiere la construcción de una, o varias, imágenes mentales, que codifican internamente el concepto que se adquiere.

En el proceso de visualización se crea una imagen genérica producto de la reflexión del estudiante. Esta imagen es la que suele ser invocada cuando al estudiante se le requiere el empleo del concepto, o del resultado, que codifica. Imagínese el lector que este trabajo versara sobre unos animales como la vaca. ¿Qué podría entender el lector si no tuviera su imagen mental de una vaca?, ¿cómo definir una vaca?... Es claro que basta cambiar ese animal por otro desconocido para poder comprender la intencionalidad de estas dos preguntas. Pero si disponer de una imagen genérica propia de una vaca es peculiar, aun peor si no se entiende el objeto como tal y se entiende por la función que desempeña. Imagínese el lector que estuviésemos hablando de mesas. ¿Qué no podríamos decir de algunos conceptos abstractos-estadísticos como la bondad, la belleza…?

De vuelta a las Matemáticas, no es extraño que un profesor diga: ¿Ves este teorema? Cabe preguntarnos: ¿Qué ha preguntado ese profesor?

Si se trata de la pregunta a un alumno, entonces se interpreta como la necesidad de saber si dicho alumno ha entendido lo expuesto. Ahora bien, ¿qué información almacena el alumno cuando ha visto el teorema? Antes de que un profesor formulara tal pregunta cabría esperar que se hubiera aportado algún conjunto de imágenes que ayudaran al alumno a la compresión de lo expuesto.

A un profesor deberíamos formularle esa misma pregunta: ¿Ves este teorema?, y acto seguido continuar con otra pregunta: ¿Cómo almacena la información del teorema ese profesor? Quizás un experto almacena la información de alguna forma peculiar y totalmente combinatoria. Quizás alguien que no almacena imágenes, o no visualiza los conceptos y teoremas, no sea capaz de transferir imágenes a sus alumnos y simplemente sea capaz de transferir formalismos algebraicos y combinatorios.

¿Qué podemos extraer de respuesta afirmativa del alumno? Casi nada, pues para tener certeza de tal comprensión tan sólo hay que enfrentarle a una situación práctica, algo que enfrente a dicho alumno a un reto donde sea necesario el uso de tal conocimiento. ¿Es suficiente disponer de la convicción de que el alumno ha generado un proceso de visualización? Creemos que no, hay que contrastarlo.

Otra cuestión de importancia es la naturaleza de las imágenes que se presentan anexas a un determinado conocimiento teórico. En general son aproximaciones visuales estáticas donde la naturaleza del objeto matemático puede quedar oculta. Ciertos objetos requieren varias aproximaciones visuales sucesivas dada su naturaleza dinámica, un proceso representado mediante una secuencia simulada a modo de imágenes dinámicas. Dos de los objetos básicos del Análisis, que tiene esa naturaleza dinámica son: los números reales y de las funciones reales de variable real.

1. El experimento matemático

Las matemáticas son unas ciencias experimentales, pero a diferencia de otras ciencias experimentales, los resultados obtenidos tiene un gran periodo de vida, es decir, no caduca la validez del resultado obtenido. ¡Experimental!. ¿De cuántas ocasiones dispone un estudiante para actuar en un laboratorio de matemáticas y contrastar, experimentalmente, las tesis de un teorema? Contestar a esta pregunta, sin hacerlo fuera del ámbito académico, requiere establecer una serie de consideraciones. La primera consideración, sin duda, es determinar, que se entiende por experimentar.

Una vez definido el sentido con el que se toma la experimentación, queda por establecer algunas precisiones, para que tal experimentación sea provechosa al alumno.

Cuestiones básicas son las siguientes: ¿Qué se experimenta?, ¿cómo se desarrolla el experimento?, ¿cuándo experimentar?; y, ¿dónde realizar la experimentación?

En este caso respondemos de la siguiente forma a esas cuestiones básicas:

¿Qué se experimenta? En este trabajo, se experimenta con el *Teorema Fundamental del Cálculo*. Este puede ser enunciado de la forma siguiente:

"Sean $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, y la función $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para cualquier $x \in [a,b]$.

Si la función f es una función continua en $[a,b]$, entonces la función F es una función derivable sobre (a, b) y con derivada lateral en los extremos del intervalo. Además se verifica $F'(x) = f(x)$."

¿Dónde realizar la experimentación? Los experimentos se realizan en un micro mundo especial, un ordenador, que tiene instalado el programa Maple.

El programa Maple, al que nos referimos, puede ser empleado por todos nuestros alumnos en su casa, puesto que nuestra universidad dispone de licencia campus, y licencia estudiante para el ordenador de cada estudiante que curse alguna de las asignaturas impartidas por el Departamento de Matemáticas Fundamentales. La versión disponible para el trabajo actual, es Maple 12, aunque el código que se presenta, se puede ejecutar en cualquier versión posterior a Maple 7.

¿Cómo se desarrolla el experimento? Este programa tiene dos modos de trabajo, es decir, se puede trabajar de dos formas: En forma numérica, y en forma simbólica.

La forma numérica, permite intuir procesos y estudiar la estabilidad de los cálculos, es decir, desarrollar distintas aproximaciones numéricas y gráficas encaminadas a generar un proceso de visualización en el alumno.

La forma simbólica, opera de forma exacta, y con algoritmos análogos a los que empleamos en nuestros razonamientos a la hora de realizar los cálculos a mano.

En esta experimentación simulada hay varias aproximaciones gráficas estáticas y dinámicas aunque se emplean las dos formas mencionadas de trabajar. Conviene recordar, que los cálculos realizados por el programa pueden ser aproximados o exactos, pero estos se realizan en un entorno reducido de esta área de conocimiento. No se puede olvidar, que una cosa es un número o una función, y otra cosa es, lo que Maple considera que es, un número o una función.

¿Cuándo experimentar? Si un alumno quiere experimentar con el código, le recomendamos, que lo haga después de estudiar la materia. Pensamos, que se requiere un mínimo de conocimientos para no generar usos incorrectos, ni malas interpretaciones. Nuestros alumnos son estudiantes de enseñanza a distancia, y cursan de Ciencias Matemáticas. El estudiante de Matemáticas debe adquirir no sólo el formalismo necesario si no la total comprensión de los objetos.

No nos cabe la menor duda, de que los procesos visuales son necesarios en los procesos de aprendizaje, por ello, el código genera representaciones visuales; gráficas, imágenes estáticas; e imágenes dinámicas, o animaciones.

Las imágenes tienen un fuerte impacto en el proceso de aprendizaje, pero la interpretación errónea de imágenes puede acarrear grandes dificultades a tal aprendizaje. Cabe recordar, que cualquier gráfica, o cualquier dibujo, generado por el ordenador, es una simple aproximación de la realidad matemática. Para evitar algunas interpretaciones erróneas, se aconseja que el estudiante experimente este laboratorio únicamente como refuerzo a lo estudiado.

2. El código

El usuario del laboratorio, puede teclear cada una de las instrucciones que se presentan a continuación. Si desea evitar errores sintácticos al teclear, puede solicitar, por correo electrónico, una copia del archivo Maple.

Cabe destacar que el conjunto de instrucciones constituyentes del código Maple, que se muestra en esta sección, se presenta en versión Classic Maple 12. En este caso cada instrucción se remarca con un símbolo "mayor que" y está escrita en letra itálica de color rojo. El lector observará la existencia de texto aclaratorio entre medio de las instrucciones escrito en texto normal. Todo el código se presenta dividido en distintos apartados, escritos en negrilla, acordes a las partes que se simulan o experimentan. En algunos de estos apartados se han insertado las respuestas del programa tanto las gráficas estáticas o dinámicas como las textuales encuadradas.

```
> restart: with(plots):
```

1.- Función integrable Riemann & Integral de una función

Inicio de datos para la simulación (activar o modificar sólo un tipo) (**puede cambiar la expresión de cada función**)

1.1.- Tipo 1: *Función continua positiva* `f:=x->3+sin(x):` Función continua positiva

`IdD:=[0,2*Pi]:` Intervalo de definición

`IdA:=[0,4]:` Intervalo de alturas

1.2.- Tipo 2: *Función continua*

`> f:=x->x*(x-1)*(x+1):` Función continua

`> IdD:=[-1,1]:` Intervalo de definición

`> IdA:=[-1,1]:` Intervalo de alturas

1.3.- Tipo 3: *Función integrable Riemann* `p:=x->x*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4):` Función auxiliar

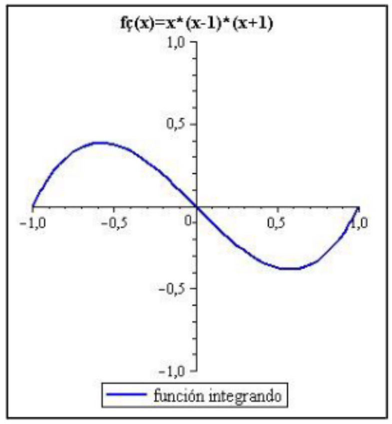
`f:=x->4*exp(-x)*Heaviside(p(x))+(2-exp(-x))*Heaviside(-1*p(x)):` Función integrable Riemann

`IdD:=[0,5]:` Intervalo de definición

`IdA:=[0,4]:` Intervalo de altura

1.4.- Gráfica de la función e integral

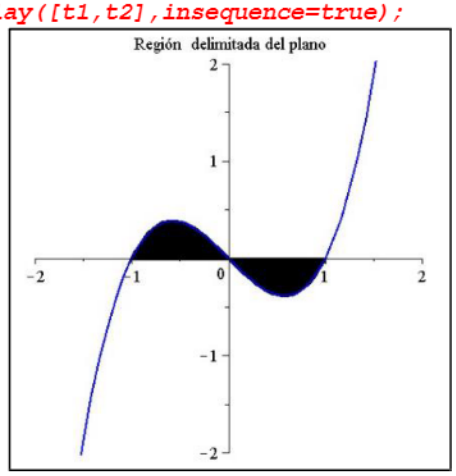
```
> funcion:=cat("fç(x)=",convert(f(x),string)):d1:=plot(f,op(1,IdD)..op(2,IdD),
op(1,IdA)..op(2,IdA),title=funcion,titlefont=[TIMES,BOLD,12],discont=true,
thickness=2, color=blue,scaling=constrained,legend="función integrando"):d1; >
Integral:=int(f(x),x=op(1,IdD)..op(2,IdD)):print("La integral de f en un intervalo
cerrado es un número real (positivo o negativo)"):Int(f(x),x=
op(1,IdD)..op(2,IdD))=cat(convert(Integral,string),"   (Aprox. ",
convert(evalf(Integral),string),")");
```



1.5.- Interpretación geométrica de la integral

1.5.1.- La integral de una función positiva representa el área de la región delimitada por la gráfica, con la parte correspondiente del eje OX

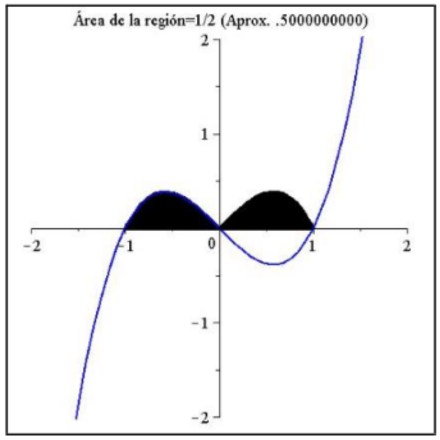
```
> a:=convert(d1,list):c:=[]:for i from 1  by 1 while type(op(i,op(1,a)), list) do
c1:=op(i,op(1,a)):c:=[op(c),op(c1)]:end do:
poligono:=[[op(1,op(1,c)),0],op(c),[op(1,op(nops(c),c)),0]]:
> d4:=polygonplot(poligono,scaling=unconstrained,thickness=3, title="Región
delimitada del plano"):
> d4bis:=polygonplot(poligono,scaling=unconstrained,thickness=3, title="Región
delimitada del plano",color=red):
> d7:=plot(f,op(1,IdD)-1..op(2,IdD)+1,op(1,IdA)-
1..op(2,IdA)+1,title=funcion,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],discont=true,thickness=2,scal
ing=constrained,color=blue):
> t1:=display([d4,d7],scaling=constrained): t2:=display([d4bis,d7],
scaling=constrained): display([t1,t2],insequence=true);
```



1.5.2.- El área de la región delimitada por la gráfica, con la parte correspondiente del eje OX, es la integral del valor absolutode la función

```
> da1:=plot(abs(f(x)),x=op(1,IdD)..op(2,IdD), op(1,IdA)..op(2,IdA),
title=funcion,titlefont=[TIMES,BOLD,12],discont=true,thickness=2,
color=blue,scaling=constrained):
> varea:=int(abs(f(x)),x=op(1,IdD)..op(2,IdD)):
> area:=cat("Área de la región=",convert(varea,string)," (Aprox.
",convert(evalf(varea),string),")"):
> aa:=convert(da1,list):ca:=[]:for i from 1  by 1 while type(op(i,op(1,aa)), list) do
c1:=op(i,op(1,aa)):ca:=[op(ca),op(c1)]: end do:
```

```
> poligonoa:=[[op(1,op(1,ca)),0],op(ca),[op(1,op(nops(ca),ca)),0]]:
> da4:=polygonplot(poligonoa,scaling=unconstrained,thickness=3, title=area):
da4bis:=polygonplot(poligonoa,scaling=unconstrained,
thickness=3,title=area,color=red):
> d7:=plot(f,op(1,IdD)-1..op(2,IdD)+1,op(1,IdA)-1..op(2,IdA)+1,
title=funcion,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],discont=true,thickness=2,
color=blue,scaling=constrained): t1:=display([da4,d7],scaling=constrained):
t2:=display([da4bis,d7],scaling=constrained): display([t1,t2],insequence=true);
```



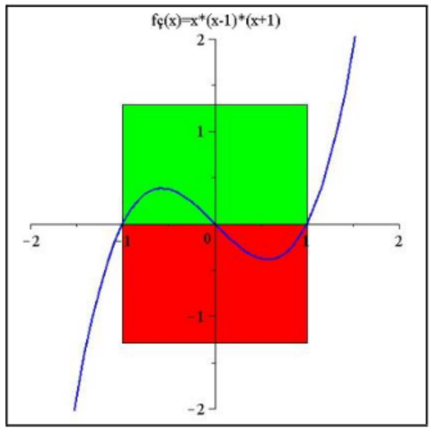
1.5.3.- Simulación animada del cálculo del área de la región delimitada por la gráfica, con la parte correspondiente del eje OX

```
> paso:=5:
> carrete:=[]:fin:=nops(c):for i from 1 by paso to fin do
polig:=[[op(1,op(i,c)),0],op(i..min(i+paso,fin),c),[op(1,op(min(i+paso,fin),c)),0]]:d
ibujo:=polygonplot(polig,scaling=unconstrained,thickness=1,title=area,
color=blue):carrete:=[op(carrete),dibujo]: end do: > carrete1:=[]:fin:=nops(ca):for i
from 1 by paso to fin do
> polig:=[[op(1,op(i,ca)),0],op(i..min(i+paso,fin),ca),
[op(1,op(min(i+paso,fin),ca)),0]]:dibujo:=polygonplot(polig,
scaling=unconstrained,thickness=1,title=area,color=red):
carrete1:=[op(carrete1),dibujo]: end do: > video:=[]:for i
from 1 to nops(carrete) do
foto:=display([d7,op(1..i,carrete)],scaling=constrained):video:=[op(video),foto]: end
do: todasfotos:=display(video,scaling=constrained):
> for i from 1 to nops(carrete1) do
foto:=display([op(1..i,carrete1), todasfotos],scaling=constrained)
:video:=[op(video),foto]end do:
> display(video,scaling=constrained,insequence=true,title=area);
```

1.6.- Lema: **Acotación de la integral**

1.6.1.- Comprobación visual (animación)

```
> listavalores:=[]:for i from 1 to nops(c) do
listavalores:=[op(listavalores),op(2,op(i,c))] end do:
mmax:=max(op(listavalores)):mmin:=min(op(listavalores)): >
lineas:=10:carreteacotacion:=[]:for i from 1 to lineas do
listavalores:=[op(listavalores),op(2,op(i,c))]:
> cajasup:=[[op(1,op(1,c)),0],[op(1,op(1,c)),mmax+(lineas-i)/lineas],
[op(1,op(nops(c),c)),mmax+(lineas-i)/lineas],[op(1,op(nops(c),c)),0]]:
> cajainf:=[[op(1,op(1,c)),0],[op(1,op(1,c)),mmin-(lineas-i)/lineas],
[op(1,op(nops(c),c)),mmin-(lineas-i)/lineas],[op(1,op(nops(c),c)),0]]: >
caja1:=polygonplot(cajasup,color=green):caja2:=polygonplot(cajainf,
color=red):dibujo:=display([caja1,caja2,d7],scaling=CONSTRAINED):carreteacotacion:=[o
p(carreteacotacion),dibujo] > end do:
> display(carreteacotacion,scaling=CONSTRAINED,insequence=true);
```



1.6.2.- razón: toda función continua en un compacto alcanza un valor máximo absoluto, M, y uno mínimo absoluto, m.

```
> mín(f(x))=mmin;máx(f(x))=mmax;
```

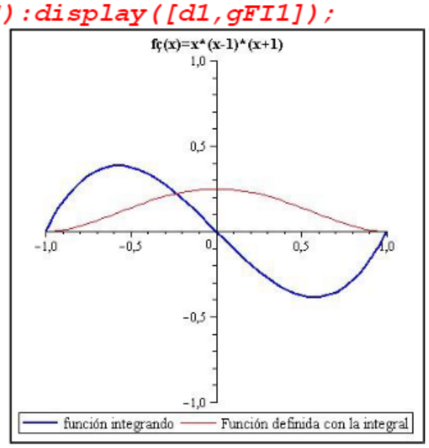
Valores aproximados de x_1 y x_2, tales que, m = f(x_1) y M = f(x_2) .

```
> for i from 1  to nops(c) do  if op(2,op(i,c))=mmax then x2:=op(1,op(i,c)) end if:
if op(2,op(i,c))=mmin then x1:=op(1,op(i,c)) end if: end do:
mínimo_en_x=x1;máximo_en_x=x2;
```

2.- Función definida por una integral

2.1.- Definición y gráfica

```
> einf:=op(1,IdD):F:=x-> Int(f(t),t=einf..x):función_F(x)=F(x);
gFI1:=plot(F(x),x=op(1,IdD).. op(2,IdD),scaling=constrained, legend="Función
definida con la integral"):display([d1,gFI1]);
```



2.2.- Es una **función continua**

Comprobación de la **continuidad en un punto** del intervalo

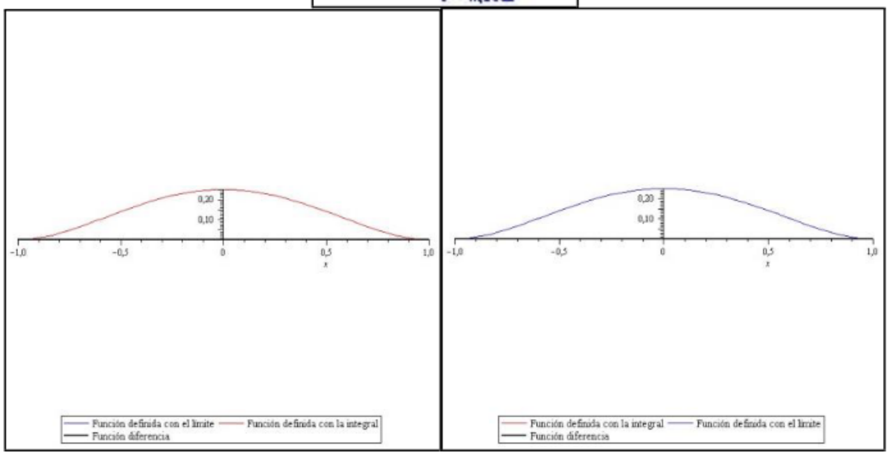
```
> punto:=-1/2: if op(1,IdD)<=punto and punto <=op(2,IdD) then
valor_F=evalf(F(punto));Limit(F(x), x=punto)=evalf(limit(F(x), x=punto, real)); else
print("escriba un punto del intervalo ", IdD); end if;
```

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{x} t\,(t-1)\,(t+1)\,dt \right) = 0.1406250000$$

Comprobación de la **continuidad en todo el intervalo**

```
> LimF:=x->limit(F(t), t=x, real);
> gLF1:=plot(LimF(x),x=op(1,IdD)..op(2,IdD), scaling=constrained, legend="Función
definida con el límite",color=blue):gfdifLF1:=plot(F(x)-LimF(x),x=op(1,IdD)..
op(2,IdD), scaling=constrained,legend="Función diferencia",color=black,thickness=2):
display([gLF1,gFI1,gfdifLF1]);display([gFI1,gLF1,gfdifLF1]);
```

$$LimF := x \to \lim_{t \to x,\, \mathrm{real}} F(t)$$



2.3.- Teorema del valor medio del cálculo integral

2.3.2.- Calculo valor medio.

```
> valormedio:=int(f(x),x=op(1,IdD)..op(2,IdD))/(op(2,IdD)-op(1,IdD)):
> for i from 1  to nops(c) do  if op(2,op(i,c))=valormedio then x0:=op(1,op(i,c)) end
if: end do:
> El_valor_medio=valormedio;se_alcanza_en_x=x0;
```

$$El\_valor\_medio = 0 \quad se\_alcanza\_en\_x = 1.$$

2.3.2.- Comprobación visual (animación)

```
> lineas:=10:carreteVM:=[]:for i from 1  to lineas do
cajaVMsup:=[[op(1,op(1,c)),0],[op(1,op(1,c)),valormedio+(lineas-i)
/lineas],[op(1,op(nops(c),c)),valormedio+(lineas-i)/lineas],
[op(1,op(nops(c),c)),0]]:
> cajaVMinf:=[[op(1,op(1,c)),0],[op(1,op(1,c)),valormedio-(lineas-
i)/lineas],[op(1,op(nops(c),c)),valormedio-(lineas-
i)/lineas],[op(1,op(nops(c),c)),0]]:
> cajaVM1:=polygonplot(cajaVMsup,color=green):cajaVM2:=polygonplot
(cajaVMinf,color=red):dibujo:=display([cajaVM1,cajaVM2,d7],
scaling=CONSTRAINED):carreteVM:=[op(carreteVM),dibujo]: end do:
> display(carreteVM,scaling=CONSTRAINED,insequence=true);
```

***3.*- Teorema fundamental del cálculo**

3.1.- Cálculo directo:

3.1.1.- Caso 1: Función utilizada desde el inicio La **función** definida con una integral

```
> función_F(x)=F(x);
```

$$función\_F(x) = \int_{-1}^{x} t\,(t-1)\,(t+1)\,dt$$

La **derivada** de la función en un punto genérico y

```
> Limit((F(y+h)-F(y))/h,h=0)=Limit(combine(F(y+h)-F(y))/h,h=0);
> Limit(combine(F(y+h)-F(y))/h,h=0)=limit(combine(F(y+h)-F(y))/h,h=0);
```

La **función derivada** de la función en un punto genérico

```
>.Diff(F(y),y)=diff(F(y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-1}^{y} t\,(t-1)\,(t+1)\,\mathrm{d}t\right) = (y-1)\,(y+1)\,y$$

3.1.2.- Caso 2: Cálculo simbólico. Si se define la función formalmente, sin dar valor al integrando, ni al intervalo de integración

La **función** definida con una integral

```
> G:=y->Int(g(t),t=p..y);
```

$$G := y \to \int_{p}^{y} g(t)\,\mathrm{d}t$$

La **derivada** de la función en un punto genérico

```
> Limit((G(y+h)-G(y))/h,h=0)=Limit(combine(G(y+h)-G(y))/h,h=0);
> Limit(combine(G(y+h)-G(y))/h,h=0)=limit(combine(G(y+h)-G(y))/h,h=0);
```

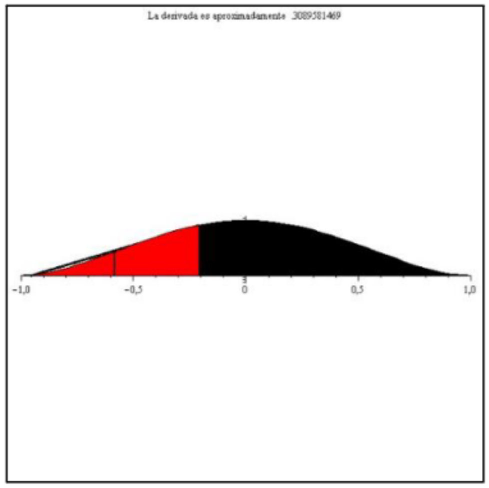
La **función derivada** de la función en un punto genérico

```
> Diff(G(y),y)=diff(G(y),y);
```

3. 2.- Simulación del teorema fundamental del cálculo: Se trata de aproximar, tanto la deriva en un punto de la función F(x), como de la función derivada F´(x)

3.2.1.- Caso 1: Deterninación de la **derivada en un punto** de la función F(x) del dominio

```
> aF:=convert(gFI1,list):cF:=[]:for i from 1  by 1 while type(op(i,op(1,aF)), list)
do  cF1:=op(i,op(1,aF)): cF:=[op(cF),op(cF1)]:end do:
> poligono:=[[op(1,op(1,cF)),0],op(cF),[op(1,op(nops(cF),cF)),0]]:
gFI4:=polygonplot(poligono,scaling=constrained,thickness=1,title="Región"):
> valorazar:= rand(11..nops(cF1)):puntogFI:=valorazar():
> carreteTFC:=[]: for i from 1 to 10 do
> poligono:=[[op(1,op(puntogFI-10+i,cF)),0],op(puntogFI-10+I..
puntogFI+10i,cF),[op(1,op(puntogFI+10-i,cF)),0]]: gFI5:=polygonplot
(poligono,scaling=constrained,thickness=1,color=red):
> if i<10 then
> pendiente:=(op(2,op(puntogFI+10-i,cF))-
op(2,op(puntogFI10+i,cF)))/(op(1,op(puntogFI+10-i,cF))-
op(1,op(puntogFI-10+i,cF)))  > else :ancho:=min(abs(op(1,op(puntogFI-
1,cF))-op(1,op(puntogFI,cF))) ,abs(op(1,op(puntogFI+1,cF))-
op(1,op(puntogFI,cF)))):
> pendiente:=evalf((F(op(1,op(puntogFI,cF))+0.01*ancho)-
F(op(1,op(puntogFI,cF))0.01*ancho))/(0.02*ancho)) end if:
> mensajependiente:=cat("La derivada es aproximadamente  ",
convert(pendiente,string));
> recta:=x->op(2,op(puntogFI,cF))+pendiente*(x-op(1,op(puntogFI,cF))):
> gFI6bis:=polygonplot([[op(1,op(puntogFI-10,cF)),recta(op(1,op(puntogFI-
10,cF)))],[op(1,op(puntogFI+10,cF))
,recta(op(1,op(puntogFI+10,cF)))]],scaling=unconstrained,thickness=1, title="",
color=blue):
> poligono:=[op(puntogFI-10+i,cF),op(puntogFI+10-i,cF)]: gFI6:=
polygonplot(poligono,scaling=unconstrained,thickness=2, title="", color=blue):
> poligono:=[[op(1,op(puntogFI,cF)),0],op(puntogFI,cF)]:
gFI7:=polygonplot(poligono,scaling=unconstrained,thickness=2, title=mensajependiente,
color=blue):
> foto:=display(gFI7,gFI5,gFI4,gFI6,gFI6bis,scaling=constrained):
carreteTFC:=[op(carreteTFC),foto]: end do:
> display(carreteTFC,insequence=true,scaling=constrained);
```

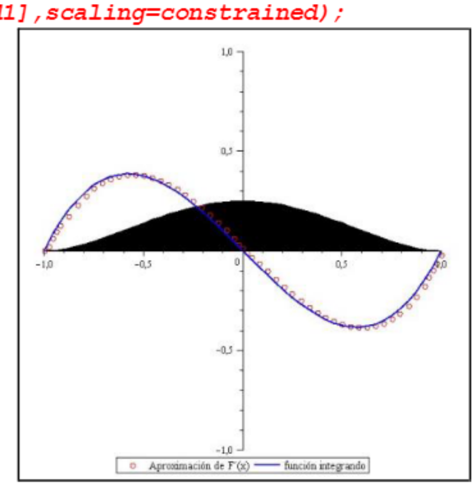


3.2.2.- Caso 2: Determinación de la **función derivada** de F(x)

```
> carreteTFC1:=[]:nubepuntos:=[]: for i from 1 to nops(cF) do
> i1:=max(1,i-1):poligono:=[[op(1,op(i1,cF)),0],op(i1..i,cF), [op(1,op(i,cF)),0]]:
gFI5c:=polygonplot(poligono,scaling=constrained, thickness=1,color=red):
> if i>1 then
> pendiente:=(op(2,op(i,cF))-op(2,op(i-1,cF)))/(op(1,op(i,cF))-op(1,op(i-1,cF)))  >
else :ancho:=min(abs(op(1,op(i+1,cF))-op(1,op(i,cF)))):
> pendiente:=evalf((F(op(1,op(i,cF))+0.01*ancho)-F(op(1,op(i,cF)))) /(0.01*ancho))
end if:
> nubepuntos:=[op(nubepuntos),[op(1,op(i,cF)),pendiente]]: gFI6cbis:=
plot(nubepuntos,style=point,symbol=circle,
scaling=unconstrained,thickness=1,title="", color=red, legend="Aproximación de
F´(x)"):
> poligono:=[op(i1,cF),op(i,cF)]:gFI6c:=polygonplot(poligono,
scaling=unconstrained,thickness=2,title="", color=blue):
> poligono:=[[op(1,op(i,cF)),0],op(i,cF)]:gFI7c:=polygonplot
(poligono,scaling=unconstrained,thickness=2,title=mensajependiente, color=blue):
> foto:=display(gFI6cbis,gFI7c,gFI5c,gFI4,gFI6c,scaling=constrained):
carreteTFC1:=[op(carreteTFC1),foto]: end do:
> display(carreteTFC1,insequence=true,scaling=constrained);
```

Se puede comprobar que la aproximación de F´(x) es una aproximación de f(x)

```
> display([gFI6cbis,gFI4,d1],scaling=constrained);
```



"F(x) es una función primitiva de la función f(x)"

4.- Regla de Barrow (fórmula de Newton-Leibniz)

4.1.- Cálculo usando G. Se considera la función G(x) como una función primitiva de la función continua g

Cálculo de la **integral** de una función g en intervalo [r,s]

```
> assume(s>r):valor_G(s)=G(s);valor_G(r)=G(r);combine(G(s)-G(r))=G(s)-G(r);
```

Ejemplo de la función f considerada inicialmente

```
> Se_considera=[función_f(x)=f(x),__y_la_función_primitiva_F(x)=F(x)];
s1:=(3*op(1,IdD)+op(2,IdD))/4:s2:=(op(1,IdD)+3*op(2,IdD))/4:
> Se_observa_que=[Int(f(x),x=s1..s2)=int(f(x),x=s1..s2),
___Aprox=value(int(f(x),x=s1..s2))];y_que=[Int(f(x),x=s1..s2)=F(s2)-
F(s1),____Aprox=value(F(s2)-F(s1))];
```

4.2.- Diferencia de dos primitivas. Se consideran las función H(x) y T(x) como dos funciones primitivas de la función continua g

La función diferencia es una función constante, pues la función derivada es nula

```
> Al_ser_primitivas_se_tiene=[Diff(H(x),x)=g(x),____y____, Diff(T(x),x)=g(x)]; >
asume(C, real): h:=y->C:
Además,_se_considera=[función_constante_h(x),h(x),_y_su_derivada_,Diff(h(x),x)=diff(h
(x),x)];
> La_derivada_H-T=[Diff(H(x)-T(x),x)=diff(H(x)-T(x),x), ___es_decir____,Diff(H(x)-
T(x),x)=g(x)-g(x)];
> vdif:=x->(g(x)-g(x)):la_derivada_de_H-T_es_vdif(x)=vDiff(x);
```

Conocida una función primitiva de una función, cualquier otra primitiva, se obtiene sumando una constante a la conocida

```
> [Int(Diff(H(x)-T(x),x),x)=int(Diff(H(x)-T(x),x),x), __es_decir____,
int(vdif(x),x)=int(Diff(H(x),x)-Diff(T(x),x)+Diff(h(x),x),x)]; T(x)=solve(H(x)T+C,T);
```

Ejemplo de la función f considerada inicialmente usando una primitiva W(x)=F(x)+C

```
> W:=x->F(x)+C:primitiva_W(x)=W(x);
```

límites de integración r1 <r2

```
> r1:=(3*op(1,IdD)+op(2,IdD))/4:r2:=(op(1,IdD)+3*op(2,IdD))/4:
> Se_observa_que=[Int(f(x),x=r1..r2)=int(f(x),x=r1..r2), __y_que__W(r1),
_W(r2)=value(W(r2)-W(r1))];
```

Bibliografía

Ballvé, M. E. y otros (2007) *Elementos de Análisis Matemático*, Sanz y Torres, Madrid.

Burgos Román, Juan de (2007) *Análisis Matemático I (de una variable real): 100 problemas útiles*, García-Maroto, Madrid.

Guzmán, M. (1993) *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático: estrategias del pensamiento matemático* v. 3, Pirámide, Madrid.

Guzmán, M. (1996) *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos de análisis*, Pirámide, Madrid.

Pérez López, C. (1995) *Cálculo simbólico con MATHEMATICA*, Ra-ma, Madrid.

Putz, J. F. (2003) *Maple animation*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (FL).

Semenov, A. y UNESCO (2006) *Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza: manual para docentes: cómo crear nuevos entornos de aprendizaje abierto por medio de las TIC*, Tricle, Montevideo.

Stroeker, R. J. et al. (1999) *Discovering mathematics with Maple: an interactive exploration for mathematicians, engineers, and econometricians*, Birkhäuser Verlag, Basel; Boston.