

Situaciones problemáticas en contexto en el aprendizaje del Cálculo

David Benítez Mojica & Noelia Londoño Millán

dbenitez@mail.uadec.mx & noelia@mate.uadec.mx

Universidad Autónoma de Coahuila
México

Autor de correspondencia. David Benítez Mojica

Resumen. En el presente artículo se documentan las características del razonamiento de un grupo de estudiantes universitarios, cuando abordan un problema en contexto real. La actividad de aprendizaje planteada, conlleva a la modelación matemática de la evaporación de un líquido contenido en un recipiente. En este proceso, se motivó la creatividad de los alumnos, al crear un método de medición para el volumen evaporado, se utilizó la tecnología para estudiar las diferentes representaciones de las funciones candidatas a modelar el fenómeno.

Palabras clave. Aprendizaje, modelación, matemáticas, tecnología.

Abstrac. This article documents the characteristics of the reasoning of a group of university students, when they approach a problem in a real context. The proposed learning activity leads to the mathematical modeling of the evaporation of a liquid contained in a container. In this process, the creativity of the students was motivated, by creating a measurement method for the evaporated volume, technology was used to study the different representations of the candidate functions to model the phenomenon.

Keywords: Learning, modeling, mathematics, technology.

1. Introducción

El uso de la tecnología, en actividades de aprendizaje, tiene ya una historia de más de 20 años. Sin embargo, su incorporación sistemática a los sistemas escolares ha sido mucho más reciente y aún más lo han sido los estudios y evaluaciones, que dan cuenta de los resultados de ese proceso. Desde esta perspectiva, es pertinente emprender trabajos de investigación que documenten los efectos que genera el empleo de la tecnología en el aprendizaje del cálculo.

Tres aspectos centrales que se tuvieron en cuenta para el estudio que se reporta en el presente documento son:

- Se identifica la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje del cálculo. Aprender cálculo va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias. Adicionalmente, debe propiciarse en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, hacer conjeturas, formular contraejemplos, hacer predicciones y construir modelos matemáticos.



- Se indica que uno de los temas importantes en los programas de cálculo, es el estudio de fenómenos que involucran cambio o variación y que implican el uso de la modelación matemática.
- Se destaca la importancia del empleo de la tecnología como herramienta de apoyo en el aprendizaje del cálculo.

2. Referentes teóricos

La modelación matemática, en general, y la resolución de problemas de cambio o variación, en particular, desempeñan actualmente un rol importante en la Educación Matemática (Hitt, 1997; NCTM, 2000; Mederos y González, 2005).

Hace algunos años, para poder construir un modelo matemático de un problema real, era necesario que el alumno conociera, en algunos casos, herramientas matemáticas de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales entre otras. En la actualidad, con el avance y el uso de las herramientas computacionales en el aula, se abre la posibilidad de construir estos mismos modelos en los primeros semestres universitarios.

En el proceso de modelación, el estudiante encontrará problemas que impliquen la manipulación aritmética, algebraica, geométrica o de cálculo. En caso de cometer errores en la manipulación matemática, el proceso de modelación conducirá a resultados erróneos. Al respecto, Hitt (1997) considera que la calculadora graficadora TI-92 puede ser de gran apoyo para que el alumno identifique e intente superar los errores que cometa en el proceso de solución.

Por otra parte, en el diseño de actividades de aprendizaje, se pueden distinguir tres tipos de contextos, utilizados para incentivar la participación de los estudiantes en actividades esenciales del quehacer de la disciplina: contextos del mundo real, los hipotéticos o realistas y los formales o puramente matemáticos (Barrera y Santos, 2002).

La situación de aprendizaje utilizada en el presente estudio, es el contexto real, la cual involucra fenómenos o situaciones reales. La solución de este tipo de problemas conlleva a la construcción de un modelo matemático. El punto de partida en la construcción de un modelo matemático es un *problema real*.

Debido a la complejidad que tiene este tipo de problemas, generalmente se hacen simplificaciones para construir una representación matemática aproximada a la realidad. Por lo tanto, hay que establecer una clara distinción entre el modelo como representación y la situación representada. El carácter simplificado del problema, más que un defecto, tiene ventajas: resulta más sencillo de abordar desde el punto de vista matemático y eventualmente, puede manejarse en el aula en un determinado nivel escolar.

Los datos, variables, conceptos, relaciones, suposiciones y condiciones deben trasladarse a un lenguaje matemático y así resulta un *modelo matemático* de la situación original.

En el proceso de solución, se aplican los métodos conocidos para obtener los *resultados del modelo*, sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos. El manejo de herramientas computacionales puede resultar de utilidad en esta parte del proceso. El valor de los resultados está en función de la interpretación que se haga de ellos, dentro de la situación real que se estudia, para hacer las *predicciones* del modelo. Las predicciones son usadas para tomar decisiones. La capacidad de predecir es un aspecto fundamental de las matemáticas.

Las predicciones deben ser validadas; es decir, trasladarlas al problema real y compararlas con las observaciones hechas del fenómeno que se está estudiando. El resolutor toma la decisión sobre la validez del modelo, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la comparación y los objetivos que persigue la solución. En caso de que el modelo no describa bien al fenómeno real, se debe reiniciar el proceso, modificando el modelo o reemplazándolo por uno nuevo. Los elementos básicos de la construcción, de un modelo matemático, están expresados en la siguiente figura:

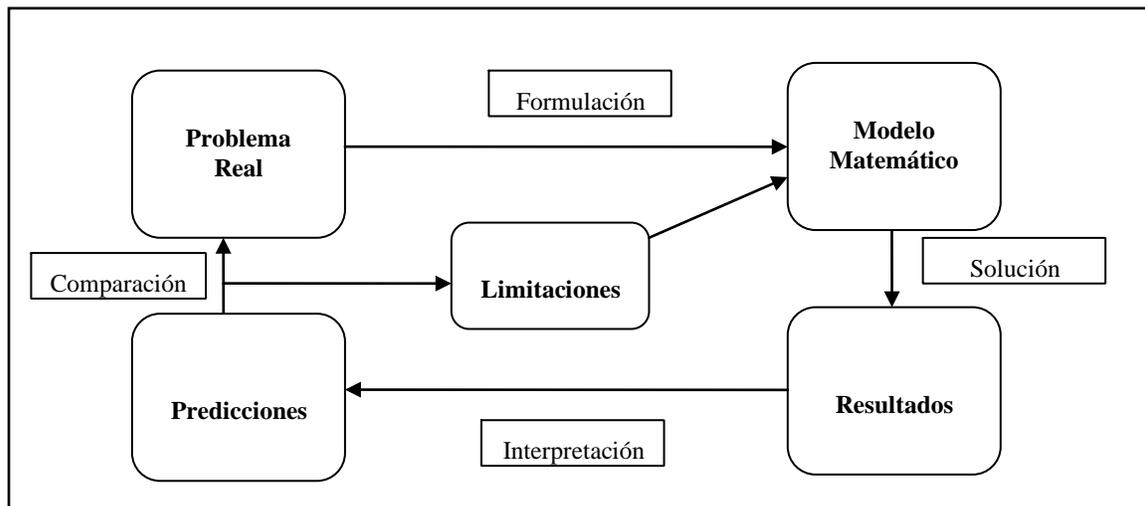


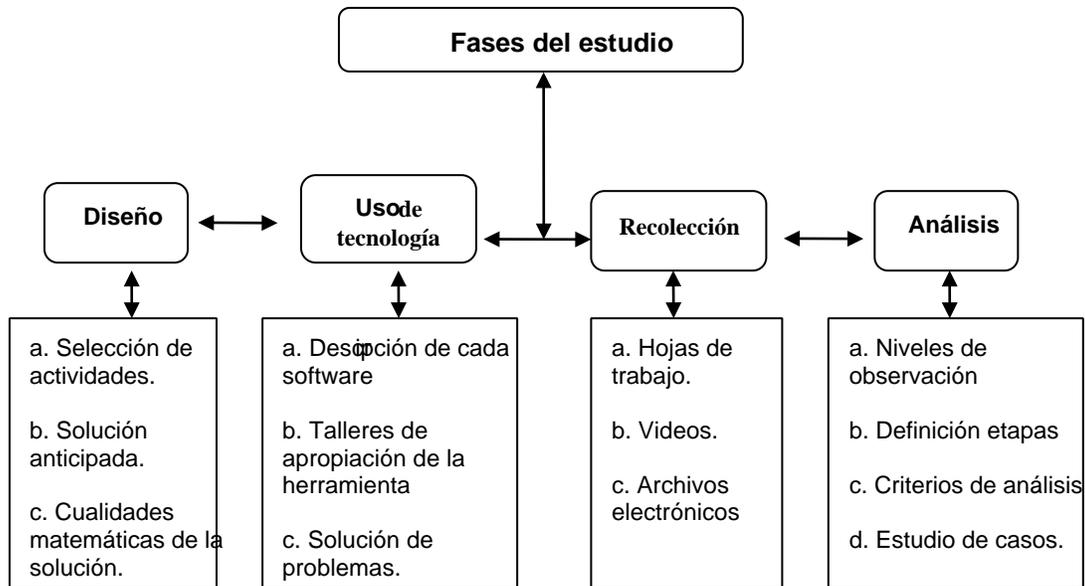
Figura 1. Construcción de un modelo matemático

3. Sujetos, procedimientos y técnicas

Los alumnos que participaron en el estudio son alumnos de primer semestre de la Licenciatura de Matemáticas Aplicadas de la *Universidad Autónoma de Coahuila*. Sus edades son de 16 a 21 años de edad, el 87% de ellos, cursó y aprobó la asignatura de cálculo en la preparatoria.

En esta sección se presentan los pasos que se siguieron durante la investigación, en las distintas fases: diseño, estudio piloto, uso de tecnología, recolección y análisis de los resultados.

Las acciones importantes de cada fase se pueden identificar de manera resumida en la siguiente figura. (En la misma sección se hace una descripción detallada de cada acción.)



Diseño. En esta fase se seleccionan los problemas y se diseñan las hojas de trabajo que sirven para recolectar la información. Para este diseño, se tuvieron en cuenta varios criterios: las actividades contienen temas de funciones en contexto formal, real e hipotético. La actividad desarrollada para el presente estudio está diseñada en contexto real, las actividades podían ser resueltas con apoyo de Excel y de la calculadora Voyage 200. Todas las actividades fueron resueltas y se analizaron las actividades del pensamiento matemático y los prerrequisitos que involucra la solución.

Manejo de la tecnología. En esta fase se les enseñó a los estudiantes a usar Calculadora Voyage 200 y hoja electrónica de Cálculo (Excel). El profesor explicó las características más relevantes de los programas. Se realizaron cuatro talleres de manejo. En estos espacios de trabajo, los estudiantes pudieron usar los comandos básicos de cada software, asimismo, pudieron incorporar la tecnología como herramienta de apoyo en la resolución de problemas.

Recolección de la información.

En esta fase, al grupo de estudiantes se les dio el siguiente conjunto de instrucciones, para el estudio del fenómeno de evaporación:

- a. Poner un recipiente con agua, expuesto a la intemperie durante seis días.
- b. Diseñar un método para determinar la cantidad de agua que se evapora al transcurrir el tiempo.
- c. Construir una tabla en la cual se relacione el tiempo con la cantidad de agua evaporada. Elaborar una gráfica de los datos obtenidos y encontrar una representación algebraica del modelo, la cual permita estimar el volumen de agua en el recipiente en un momento específico.

Después de recibir las instrucciones para el estudio, los estudiantes trabajaron individualmente en sus casas durante una semana. Al final de proceso, ellos entregaron un documento escrito, donde reportaron el (o los) procedimientos usados para estimar el volumen del líquido y la manera como construyeron la representación algebraica del modelo.

La evaporación debió ser natural (no se podía calentar el agua, por medios diferentes al contacto con el medio ambiente). Para la actividad debían hacer observación durante seis días, luego deberían realizar un informe escrito. En este proceso, los estudiantes podían usar tecnología (Excel o Calculadora) como herramienta de apoyo en la resolución del problema. Es de resaltar que no se condicionó la cantidad de agua, ni se impuso el material a utilizar, tampoco el método de medición que emplearían los alumnos.

4. Análisis de la información

En esta sección se analizan los datos recolectados en el estudio. En la primera parte se presenta la información relativa a los métodos contruidos por los estudiantes para estimar el volumen de líquido evaporado. Mientras que en la segunda parte, se analizan los modelos matemáticos del fenómeno de evaporación.

a. Construcción de un método de medición

Primer método. Algunos estudiantes usaron recipientes cilíndricos, y registraron los cambios de la altura del líquido, a medida que transcurría el tiempo. Con los datos del radio y las diferentes alturas calcularon el volumen, como se muestra a continuación.

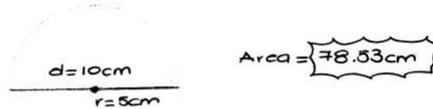
) Diseñar técnica para medir el volumen.
 => Como el recipiente fue un cilindro, solo medía el volumen del espacio que ocupaba el agua cada día, con la fórmula
 (Área de la base)*(Altura)

$$\pi r^2 \cdot h = U$$

Otro ejemplo es el de Gloria, ella empleó un método similar al anterior y reportó lo siguiente:

Procedimiento:

El agua la coloque en un recipiente cilíndrico. El primer día comence con un volumen de 589.04 ml. para calcular este volumen medí el área de la base del recipiente con la fórmula: πr^2



base

y lo multiplique por una altura que fue hasta donde llene el recipiente con agua que fue de 7.5cm y así cada día iba disminuyendo la altura ya que el agua se iba evaporando entonces cada día iba multiplicando el área por alturas diferentes e iba obteniendo volúmenes diferentes cada vez más pequeños.

Segundo método. Siete estudiantes usaron recipientes de forma irregular. Para conocer el peso del líquido en el momento inicial, midieron el peso del recipiente, primero vacío y luego con agua. Estimaron la densidad del líquido. Para estimar el volumen de líquido evaporado usaron la relación entre densidad, masa y volumen. En este primer ejemplo la alumna utilizó como recurso un dato teórico sobre la densidad del agua.

utilicé una equivalencia la cual dice que:

un gramo de agua = un mililitro de agua.

Así que lo primero que hice fue pesar el recipiente vacío para así poderlo restar cuando tuviera agua y que no me perjudique en la medición.

Descripción de Yuriko

Ana Lucía también utilizó la densidad del agua que puso a evaporar, pero decidió, calcularla ella misma, de una videograbación, donde explicó el proceso seguido se entresacó lo siguiente:

LUCIA: *Pesar el recipiente solo, luego el recipiente con agua y la diferencia es el peso del agua. entonces sacamos lo que era la densidad, o sea, como el peso del recipiente sin agua era 600 gramos, pero como eran 500 ml. la densidad del líquido es 600 gramos entre los 500 ml me daba 6/5 que es igual a la densidad de esa agua, ¿no me entienden lo que trato de decir?*

DAVID: *Explícate*

LUCIA: *Eran 600 gramos de agua (sin el recipiente), entonces entre los 500 ml te iba a dar la densidad del agua*

DAVID: *¿Y para qué quieres la densidad?*

LUCIA: *Para después, ya viendo los nuevos pesos, como día con día iba a ir disminuyendo, entonces esos nuevos pesos los dividía por la densidad y ya me daba el volumen.*

Días	VOLUMEN DEL AGUA
1	$500g \div \frac{6g}{5ml} = 416.66ml$
2	$450g \div \frac{6g}{5ml} = 375ml$
3	$350g \div \frac{6g}{5ml} = 291.66ml$
4	$310g \div \frac{6g}{5ml} = 258.33ml$
5	$260g \div \frac{6g}{5ml} = 216.66ml$
6	$225g \div \frac{6g}{5ml} = 187.5ml$

Tabla que elaboró Lucía, en su informe

El episodio anterior es una muestra de cómo el profesor fue propiciando un ambiente académico, donde se problematiza el conocimiento, en el que se hacen preguntas y los estudiantes deben comunicar y construir argumentos sólidos sobre sus ideas matemática.

En la socialización aparte de discutir sobre los métodos de medición empleados por los estudiantes se cuestionó el resultado obtenido sobre la densidad del agua.

Algunas explicaciones construidas por los estudiantes fueron las siguientes:

- Errores en la medición del volumen inicial del agua.
- La balanza utilizada en la medición no es muy confiable o la medida realizada por los estudiantes es poco precisa.
- El agua no es pura, contiene elementos que alteran su densidad como son el cloro, el sodio, etc.

Tercer método. Una estudiante usó un recipiente de un litro (no fue importante el tamaño ni la forma del recipiente), marcando sobre el recipiente la altura, cuando finalizó la observación, vació el agua. Posteriormente, usó un vaso graduado para ir rellenando el recipiente hasta cada una de las marcas.

b. Construcción del modelo matemático

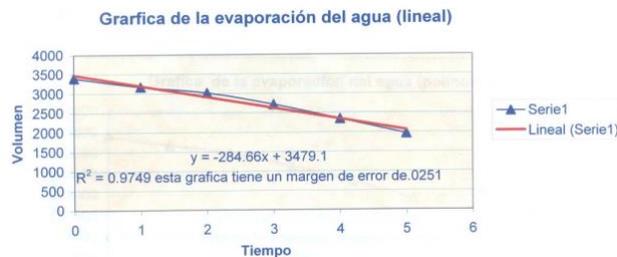
Además de construir un método para estimar el volumen de líquido evaporado, los estudiantes debían registrar los datos en tablas, gráficas y tenían que construir una representación algebraica del modelo. En este proceso, los estudiantes utilizaron la hoja electrónica de cálculo y la calculadora Voyage 200 como herramientas de apoyo para hallar la expresión algebraica.

La siguiente tabla muestra los diferentes tipos de funciones que emplearon los alumnos en la construcción del modelo matemático. En esta se observa que la mayoría de los alumnos se inclinaron por hacer un ajuste lineal. Es probable que en los días en los cuales se realizó la medición, la variación de la cantidad de líquido evaporado tuviera ligeras fluctuaciones.

Expresiones	Porcentajes
Polinómicas	
Lineal	58 %
Cúbica	8.3 %
Cuártica	16.6 %
Grado 6	8.3 %
Otras	
Exponencial	8.3 %

Tipos de funciones empleadas por los alumnos en el problema de la evaporación.

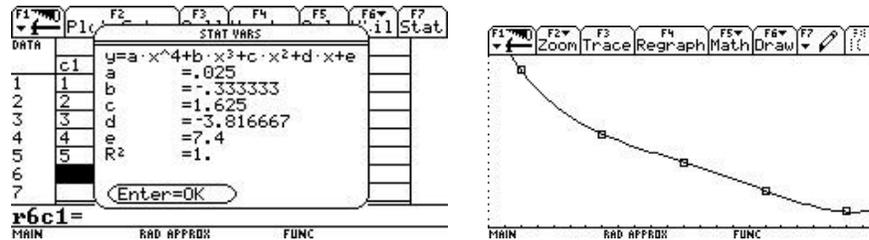
Para la realización de las representaciones gráficas hubo alumnos que usaron el Excel, mientras que otros emplearon la calculadora voyage 200. A continuación se muestran algunas gráficas que los estudiantes reportaron en forma escrita. Por ejemplo, veamos una parte del trabajo reportado por Sagrario:



Sagrario utilizó la tecnología como herramienta de apoyo en la resolución del problema. Pudo construir varios registros semióticos de representación del fenómeno, hacer una interpretación del mismo y también pudo contestar las preguntas de la hoja de trabajo. Por ejemplo encontró una aproximación del tiempo que pasará para que el líquido se evapore completamente.

Ahora veamos el caso de Lorena, quien usa la calculadora para construir una representación algebraica del modelo. La alumna construyó la siguiente gráfica e hizo un ajuste a una función polinómica de grado cuatro, veamos un episodio del dialogo que se presentó entre Lorena y el profesor en la fase de socialización:

Lorena: Yo hice el ajuste a una función cuártica. Primero hice el gráfico y me quedó así:



Ajustes y gráficos construidos por Lorena con ayuda de la calculadora

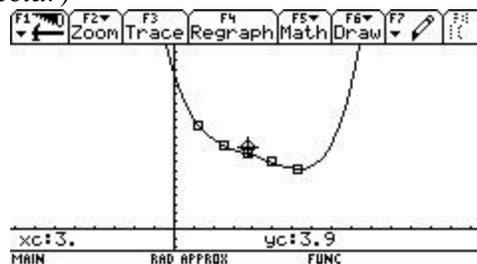
Maestro: Y luego ¿Qué hiciste?

Lorena: Le di un zoom

Maestro: Vamos a ver, porque ahí aparentemente todo va funcionando perfecto

Lorena: Yo hasta ahí lo había dejado, pero....

(Lorena construye la siguiente gráfica con la ayuda de la calculadora conectada a un cañón y cuyas imágenes se proyectan en una pantalla para que todo el grupo las pueda apreciar)



Maestro: ¿Qué ocurre?

Lorena: Que va bajando el agua, y luego sube (señalando las regiones de decrecimiento y crecimiento de la gráfica)

Maestro: ¿Qué enseñanza podemos sacar de todo esto?

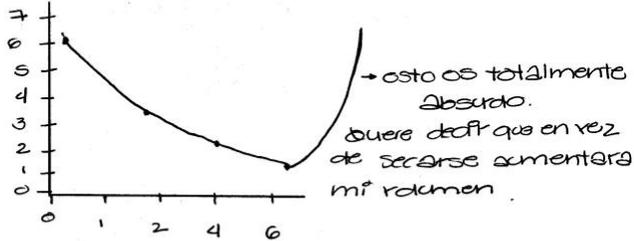
Lorena: Que no te fíes únicamente de r cuadrada como indicador

Maestro: Entonces este no es un buen modelo, no se puede utilizar un polinomio para predecir, mira, los polinomios interpolan muy bien, pero extrapolan muy mal, no se puede predecir con un polinomio.

Como lo pudimos observar en el episodio de clase, la alumna desconfió del gráfico construido inicialmente y con la ayuda de la calculadora, realizó un zoom de alejamiento. Veamos a qué conclusión llegó en su manuscrito:

⊙ Nota

Modelación de grado 4 no sirve, porque al hacerlo en calculadora el comportamiento de mi gráfica es así.



Aunque el ajuste era perfectamente exacto, este modelo no me sirve para modelar la evaporación del agua.

A sí que hice lo siguiente:

Ajuste mi nube de datos a una ecuación lineal y aunque el ajuste no es muy bueno esta ecuación sí me puede dar un valor aproximado de cuando se acabará el agua.

En este caso vemos cómo la tecnología puede ayudar a los estudiantes a ensanchar el uso de las estrategias metacognitivas o de control. La estudiante pudo darle un cambio de rumbo a las decisiones tomadas en el proceso de solución, gracias a un error que le ayudó a detectar la visualización de la gráfica en una ventana más amplia.

5. Reflexiones finales

En términos generales se puede afirmar que se cumplieron los objetivos propuestos para esta actividad.

La actividad les permitió a los estudiantes solucionar un problema en contexto real. En este sentido, los alumnos se involucraron de manera directa en la solución del problema asumiendo un rol activo, el cual les demandó diseñar un método para tomar datos reales del fenómeno de evaporación, procesar los datos, construir un modelo matemático y socializar los procedimientos y los resultados con sus compañeros de clase.

En la solución del problema los estudiantes ingeniaron diferentes procedimientos para estimar el volumen de líquido evaporado. Los métodos usados se pueden agrupar en tres categorías: uso de una forma de volumen conocido; el empleo de la densidad del líquido; y la utilización de un medidor de precisión.

Para el diseño del método los estudiantes debieron tener en cuenta el empleo de diferentes recursos como: la fórmula de la densidad de un líquido.

También se pusieron en práctica el empleo de estrategias heurísticas como: controlar variables, por ejemplo, dejaron constante el área de contacto entre el líquido y la superficie. Otra estrategia empleada fue la de reducir un problema desconocido a uno de solución conocida; en este contexto, algunos estudiantes emplearon recipientes cilíndricos para usar la fórmula del volumen.

En el proceso de solución del problema se integraron diferentes líneas de contenido: los conceptos de variable independiente, dependiente y de función. Los ceros de una función y diferentes tipos de funciones (polinomiales y exponenciales).

En la solución del problema de la evaporación los estudiantes pusieron en práctica varios procesos centrales del pensamiento matemático, como lo son: el uso de la creatividad para ingeniar un método de medición, el uso de distintos registros de representación, hacer interpretación de gráficas, predecir y construir un modelo matemático de un fenómeno real.

La actividad permitió usar la tecnología para solucionar un problema en contexto real. En este proceso, la hoja electrónica de cálculo y la calculadora fueron utilizadas como herramientas de apoyo en la solución del problema, posibilitando las siguientes acciones:

- a. Amplificó el dominio de recursos a disposición del estudiante. Recordemos que los estudiantes con los que se realizó la actividad, cursaban primer semestre de la licenciatura de matemáticas aplicadas. A esta altura de la carrera, los estudiantes no tienen conocimientos matemáticos para hacer análisis de regresión con lápiz y papel. El uso de la tecnología computacional contribuyó a que los alumnos pudieran hacer ajustes a varios tipos de curvas.
- b. Ayudó a reorganizar el proceso de solución. Recordemos que los estudiantes emplearon la calculadora y el Excel para revisar sistemáticamente el proceso de solución. En este aspecto, el cambio de ventana de graficación, la construcción de tablas les ayudó a los estudiantes a encontrar errores y a redireccionar la solución del problema, buscando representaciones algebraicas consistentes con las condiciones impuestas por el fenómeno.
- c. Adicionalmente, les ayudó a minimizar el tiempo en los cálculos.
- d. Les ayudó a ejecutar tareas de conversión entre diferentes registros semióticos de representación. Por ejemplo, los alumnos usaron la calculadora o el Excel, para pasar los datos de una tabla a una gráfica y de allí encontrar la representación algebraica del modelo. En esta última parte se debe recalcar que la aproximación a la solución es por intervalos.
- e. El empleo de la tecnología les permitió a los estudiantes realizar tareas de tratamiento de distintas representaciones. Por ejemplo, realizaron tratamiento gráfico cuando cambiaron de ventana de graficación, Emplearon el tratamiento algebraico, en el momento en el que calcularon los ceros de una función para predecir el momento en el que se evaporaría totalmente el líquido. Utilizaron tratamiento numérico cuando hicieron tablas con apoyo de la hoja electrónica de cálculo.
- f. El centro de la actividad no se restringió a hacer cálculos de regresión. En lugar de ello, el uso de la tecnología computacional permitió optimizar el manejo del tiempo, dedicándole la mayor parte del proceso de solución a la búsqueda de estrategias, al ingenio de procedimientos y a la interpretación de los resultados.

- g. El manejo de la sintaxis de la calculadora y de la hoja electrónica de cálculo pasaron a hacer parte del dominio de conocimientos a servicio de la solución del problema.
- h. La metodología empleada en el aula, propició el acercamiento a la solución de un problema desde diferentes puntos de vista. La discusión que se presentó en la socialización de las soluciones, giró entorno a cuatro aspectos: el método para estimar el volumen evaporado, la pertinencia de cada método, la calidad del ajuste y los márgenes de error que hereda cada método de medida. Los estudiantes pudieron identificar constantes y variables relevantes en la solución del problema, también llegaron a concluir que el método sugerido por Lucía, el cual involucra el cálculo de la densidad del líquido, era el que mayor precisión arroja.

6. Referencias

- Barrera, F. y Santos, M.** (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. p.p. 166-185. Santa Fe de Bogotá, Colombia.
- Hitt, F.** (1997). La modelación matemática con el apoyo de la calculadora graficadora TI-92. En *Memorias del VIII Seminario Nacional Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática*. Hitt, F; Hernández, V. y Villalba, M. (Eds.). pp. 303-313. Hermosillo, Sonora, México
- NCTM** (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. USA.
- Mederos, O. y Gonzalez, E.** (2005). *La modelación en la educación Matemática*. Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, Coahuila, México.