Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas

David Benítez Mojica & Arturo Bueno Tokunaga
dbenitez@mail.uadec.mx & arturobuenotokunaga@mail.uadec.mx

Universidad Autónoma de Coahuila
México

Autor de correspondencia. David Benítez Mojica

Resumen. En el presente estudio se utilizan un conjunto de problemas como plataforma para diagnosticar las características que tiene el razonamiento de los estudiantes de matemáticas en la identificación de la variación. Las actividades de aprendizaje utilizadas en la investigación están redactadas en contextos reales, hipotéticos y formales. En todas ellas, los estudiantes debían discutir si en ese contexto existe o no variación y justificar la respuesta.

Palabras clave. Razonamiento, aprendizaje, problemas, estudiantes.

Abstrac. In the present study, a set of problems is used as a platform to diagnose the characteristics of the reasoning of mathematics students in the identification of variation. The learning activities used in the investigation are written in real, hypothetical and formal contexts. In all of them, the students had to discuss whether or not there is variation in that context and justify the answer.

Keywords. Reasoning, learning, problems, students.

1. Introducción

El cálculo en general y el aprendizaje de la variación en particular son pilares de la formación académica de los estudiantes de matemáticas aplicadas. Dentro de la industria, la variación es uno de los temas que mayor aplicación tiene, y se ha diagnosticado que nuestros jóvenes estudiantes experimentan dificultades en su identificación.

El presente estudio forma parte de una investigación más general, relacionada con la identificación y el aprendizaje del concepto de la variación y su empleo para propiciar el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de matemáticas aplicadas.

Una gran cantidad de problemas a las que se enfrenta un matemático aplicado en la industria, la economía, la física, la biología y las ciencias en general, es la optimización, por lo que detectar primeramente la variación reviste gran importancia, además para las empresas es primordial contar con profesionistas capacitados y con sus competencias desarrolladas ya que en su desempeño profesional tienen la necesidad de comunicar, argumentar, resolver problemas, etc.

El objetivo central del presente trabajo fue diagnosticar las características que tiene el razonamiento de los alumnos de matemáticas aplicadas en la identificación e interpretación de los fenómenos de variación, presentado en diferentes registros semióticos de representación.

Para cumplir con este objetivo, se diseñó, se piloteó y se aplicó un examen diagnóstico sobre la identificación y la interpretación de la variación. El propósito central fue indagar acerca de la habilidad que tienen los estudiantes de la licenciatura en matemáticas aplicadas de primer año, para reconocer la variación, usando representaciones gráficas, algebraicas y de contexto. Para contestar la encuesta, los alumnos debían marcar en cuáles representaciones existía variación y

Fecha de recepción: 15-02-2010
Fecha de aceptación:12-05-2010

en cuáles no, cómo lo representaría en un sistema gráfico, algebraico, de contexto, además los alumnos debían justificar sus respuestas.

2. Marco teórico.

Los fundamentos teóricos del presente estudio giran en torno a las siguientes consideraciones básicas:

a. Se identifica la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje del cálculo. Aprender cálculo va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias. Adicionalmente, debe propiciarse en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, hacer conjeturas, formular contraejemplos, hacer predicciones y construir modelos matemáticos.

b. Se indica que uno de los temas importantes en los programas de cálculo, es el estudio de fenómenos que involucran cambio o variación y que implican el uso de la modelación matemática.

c. Existe un interés creciente en trabajos relacionados con el papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000). Todas estas investigaciones coinciden en reconocer que el uso de representaciones desempeña un papel crucial en el aprendizaje.

3. Sujetos, procedimientos y técnicas.

Las personas que participaron en el estudio son alumnos de primer semestre de la licenciatura de matemáticas aplicadas de la U. A. de C. Las encuestas, las actividades y las evaluaciones fueron aplicadas en el curso de Cálculo Diferencial.

El estudio se realizó con 28 alumnos de primer año de matemáticas. 13 de los cuales son del sexo masculino y15 del sexo femenino. La edad de los sujetos fluctúa desde los 17 a los 21 años. 24 de ellos es su primera vez en licenciatura, y 10 escogieron como primera opción de ingreso la licenciatura de matemáticas.

El examen diagnóstico estuvo compuesto por siete actividades, en algunas de ellas hay variación, en otras no. Se diseñaron actividades en diferentes contextos (real, realista y formal). Se incluyeron actividades de interpretación de fenómenos de variación, en los registros gráficos, algebraico y verbal. El trabajo de los estudiantes consistió en leer y entender la redacción de cada problema, responder si en ese contexto existe o no variación y debían justificar la respuesta.

Los datos fueron obtenidos a partir de las respuestas escritas que dieron los estudiantes en el examen diagnóstico. Los alumnos contestaron las preguntas en forma individual. Para contestar el diagnóstico se destinaron sesiones de clase de 90 minutos.

A continuación se presentan los problemas del examen diagnóstico.

Problema 1. (De los cables) La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros, como se muestra en la figura:

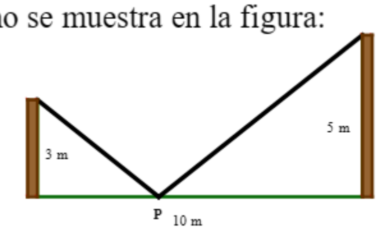


Fig. 1

La longitud de los postes es de tres y de cinco metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de ambos se sujetará a un punto P en tierra, localizado en el segmento que une los dos postes.

A. ( ) ¿La longitud total del cable es variable?
B. ( ) ¿La longitud total es constante?

Problema 2. (De la semicircunferencia) En una semicircunferencia con centro en O, se traza el diámetro AC. Se ubica un punto B sobre la semicircunferencia, como se muestra en la siguiente figura:

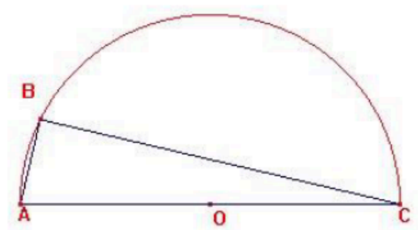


Fig. 2

Si el punto B se mueve, qué ocurrirá:

A. ( ) ¿La medida del ángulo ABC es variable?
B. ( ) ¿La medida del ángulo ABC es constante?

Problema 3. (De las paralelas) En la siguiente figura, las rectas L y M son paralelas. Se ha dibujado el triángulo ABC.

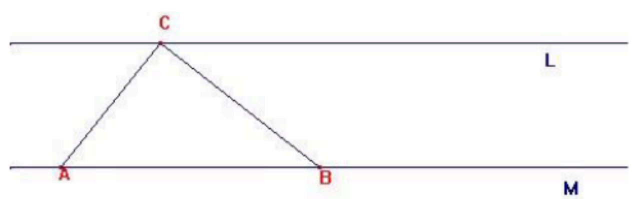


Fig. 3

Si el punto C se mueve sobre L, qué ocurre:

A. ( ) ¿El área del triángulo ABC es variable?
B. ( ) ¿El área del triángulo ABC es constante?

Problema 4. (De la carretera) En la figura, se tiene una carretera horizontal de 100 metros de larga. Se ha construido un anuncio espectacular con una medida fija de 5 metros de alto, sobre una base fija de 7 metros de alto. Un observador ve el anuncio con el ángulo α.

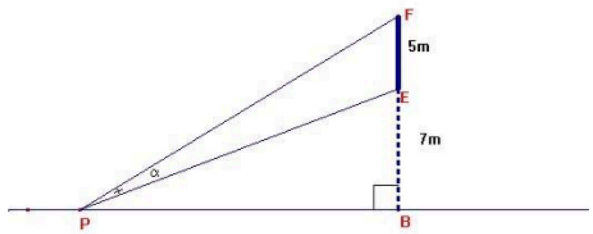


Fig. 4

Si el observador se acerca a la base del anuncio, qué ocurrirá: A.
( ) ¿El ángulo α es variable?
B. ( ) ¿El ángulo α es constante?

Problema 5. (Del rectángulo) ¿Qué ocurre con el área de los rectángulos de perímetro fijo? A.
( ) ¿El área es variable?
B. ( ) ¿El área es constante?

Problema 6. (De la caja) Se desea construir una caja sin tapa con una pieza de lámina cuadrada de longitud L. Se cortan cuadrados idénticos en las esquinas, ver figura 8 a. Se doblan los lados para formar las caras laterales de la caja ver figura 8 b:

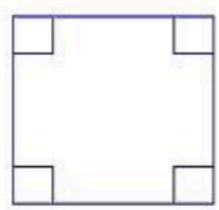


Fig. 8 a

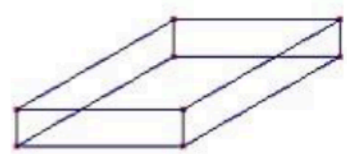


Fig. 8 b

¿El volumen de las cajas cambia?
Si ( )
No ( )
No sé ( )

Problema 7. (Del anuncio) Un periódico cobra los anuncios de la siguiente manera: •
Cobra 7 pesos por cada centímetro lineal en forma horizontal
• Cobra 8 pesos por cada centímetro lineal en forma vertical.

Un empresario quiere mandar a hacer un anuncio de área A (fija) A.
( ) ¿El costo del anuncio es variable?
B. ( ) ¿El costo del anuncio es constante?

4. Resultados

En la siguiente tabla se presentan en forma de matriz los resultados del rendimiento general del grupo de 28 alumnos en la prueba diagnóstica, realizada antes del uso de tecnología (utilizando solo lápiz y papel)

Problema	Correctas	Incorrectas	No contestó	Aciertos
cables	2	26	0	7%
semicircunferencia	13	15	0	46%
paralelas	12	15	1	43%
carretera	16	12	0	57%
rectángulo	13	14	1	46%
caja	12	16	0	43%
anuncios	14	14	0	50%

El promedio general obtenido por los alumnos es de 42% en las respuestas correctas.
En las siguientes tablas clasificamos las respuestas que los alumnos ofrecen a los problemas aplicados.

4.1. El Problema de los cables.

A continuación mostramos los resultados generales del desempeño del grupo en la solución de la primera actividad. Los resultados fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida.

Veamos:

Categoría	No entendió	Círculo vicioso	Percepción	Argumentación Matemática inválida	Argumentación Matemática válida
Porcentaje de aciertos	7/28 25%	9/28 32%	10/28 36%	1/28 4%	1/28 4%

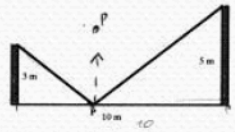
Ahora se presentarán algunos casos de cada una de las categorías de argumentación.

a. Estudiantes que no entendieron el enunciado.

En esta categoría se agruparon a los estudiantes que si logran detectar la variación; sin embargo, los argumentos utilizados para sustentar la respuesta no son correctos. Por ejemplo, veamos el caso de Victoria:

Nombre Victoria Gpe. Drena García Fecha 14 Noviembre 2006

1. La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros, como se muestra en la figura:



La longitud de los postes es de tres y de cinco metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de ambos se sujetará a un punto P en tierra, localizado el segmento que une los dos postes.

A (x) ¿La longitud total del cable es variable?

B( ) ¿La longitud total es constante?

Espacio para hacer la justificación

- La longitud varia ya que, si movemos el punto P hacia arriba, ~~esta~~ la longitud cambiara. Sera mas grande.

Si bien es cierto que Victoria detecta que en esta situación problemática hay variación, es evidente que el razonamiento no se ajusta a las condiciones del problema, porque el punto P debe estar en tierra y localizado en el segmento que une los postes. En este caso, se pone de manifiesto la importancia que tiene en la resolución de un problema, el hecho de utilizar la primera fase del método propuesto por Polya, que consiste en entender suficientemente el enunciado del problema antes de atacarlo.

b. Círculo vicioso

En esta categoría se encuentran los alumnos que tienen muchos problemas para redactar sus ideas matemáticas. Generalmente construyen argumentaciones que caen en círculos viciosos. Por ejemplo, dicen que algo es constante porque no es variable, sin presentar ideas matemáticas que le den soporte a la afirmación. Veamos el caso de Lilibeth:

A (X) ¿La longitud total del cable es variable?

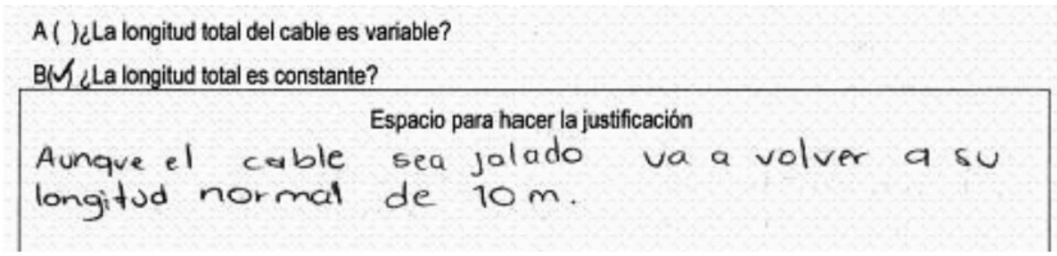
B(√) ¿La longitud total es constante?

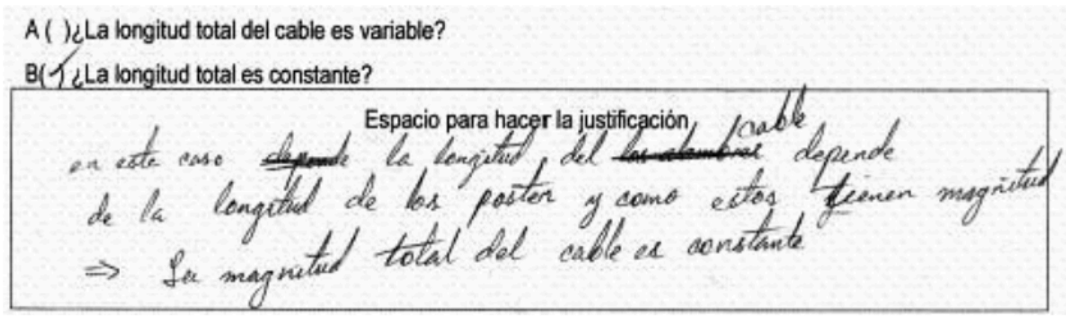
Espacio para hacer la justificación

La longitud del cable es una constante ya que si se mueve el punto p a otra distancia la longitud sigue siendo la misma. Si p se acercara a A la longitud seguiría siendo la misma, al igual que p se acercará a B.
y la longitud total del cable no es variable ya que la longitud no cambia es la misma

c. Percepción.

A continuación se presenta el caso de Leticia y Héctor, quienes encuentran una respuesta incorrecta y utilizan argumentos perceptuales.

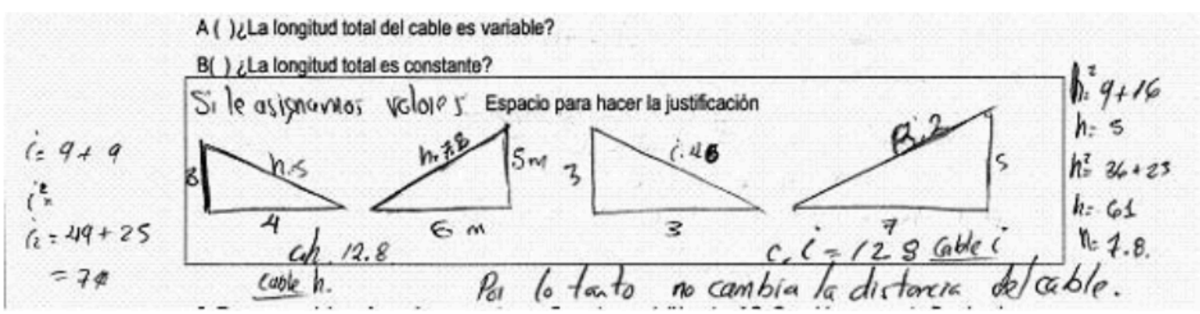




En estos casos los alumnos encuentran las respuestas a partir de hechos meramente intuitivos, y su razonamiento se basa exclusivamente a la forma de la figura, sin incorporar resultados teóricos de las matemáticas.

d. Argumentación matemática inválida

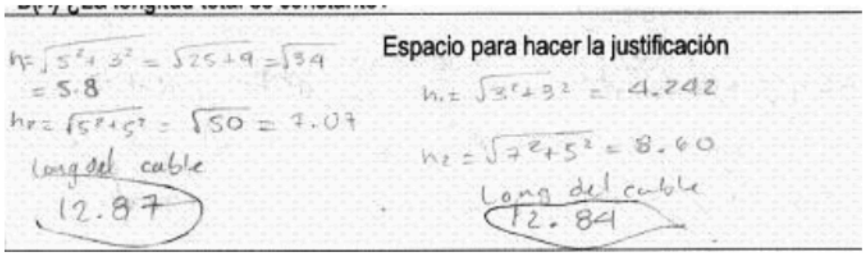
En esta sección, presentamos el caso de Emmanuel, quien justifica sus afirmaciones con argumentos teóricos. Sin embargo, comete errores. Veamos:



En este problema el alumno utiliza una estrategia conocida como particularización, las operaciones que están del lado izquierdo corresponden a los triángulos del lado derecho y las operaciones del lado derecho corresponden a los triángulos del lado izquierdo. Sin embargo, la conclusión es errónea, ya que al utilizar un sólo decimal obtiene el mismo resultado y en consecuencia su afirmación es incorrecta.
En este caso, Emmanuel comete dos tipos diferentes de error. El primero, es de sintaxis, cuando despeja la hipotenusa y no hace explícito que debe sacar raíz cuadrada, aunque implícitamente lo hace. El segundo, está relacionado con la falta de *control* en el proceso de solución, porque no utilizó otro caso particular que le ayudara a detectar el error cometido por usar una sola cifra decimal.

e. **Argumentación matemática válida**

En esta categoría encontramos a la alumna Gisela quien da una respuesta correcta y argumenta adecuadamente usando el teorema de Pitágoras:


Espacio para hacer la justificación

$h = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 5.8$

$h_2 = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 7.07$

Long del cable 12.87

$h_1 = \sqrt{3^2+3^2} = 4.242$

$h_2 = \sqrt{7^2+5^2} = 8.60$

Long del cable 12.84

4.2. Problema de la semicircunferencia.

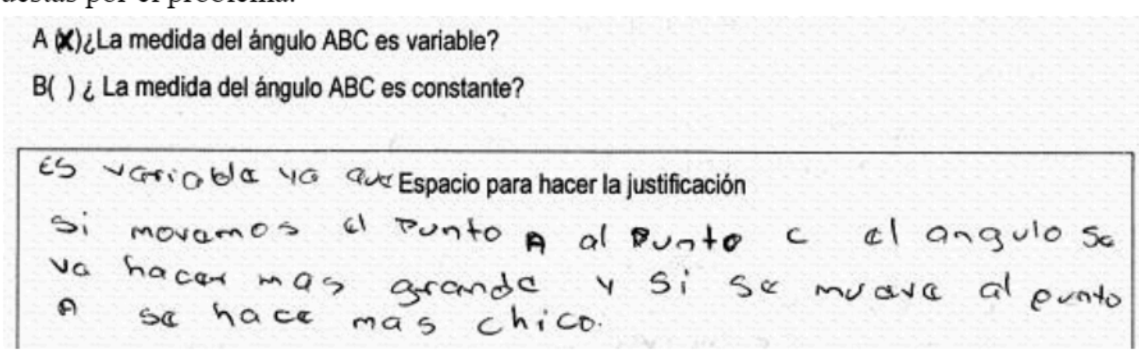
En la siguiente tabla mostramos los resultados generales del desempeño del grupo en la solución del segundo problema. Los resultados fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida. Veamos:

Categoría	No entendió	Circulo vicioso	Percepción	Argumentación Matemática inválida	Argumentación Matemática válida
Porcentaje de aciertos	2/28 8%	0/28 0%	24/28 84%	2/28 8%	0/28 0%

A continuación, se presentarán algunos casos de cada una de las categorías de argumentación.

a. Estudiantes que no entendieron el enunciado

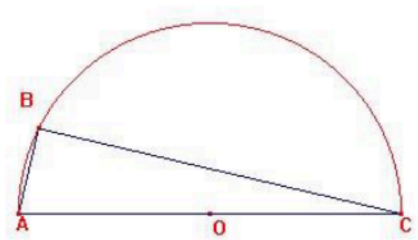
En esta categoría se agrupan los alumnos que no entendieron el enunciado del problema. En el siguiente ejemplo, encontramos el caso de José Refugio, quien no tiene en cuenta las condiciones impuestas por el problema:


A (X)¿La medida del ángulo ABC es variable?

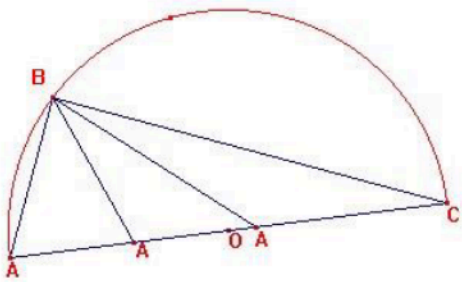
B( ) ¿ La medida del ángulo ABC es constante?

Espacio para hacer la justificación

Es variable ya que si movemos el punto A al punto C el angulo se va hacer mas grande y si se mueve al punto A se hace mas chico.



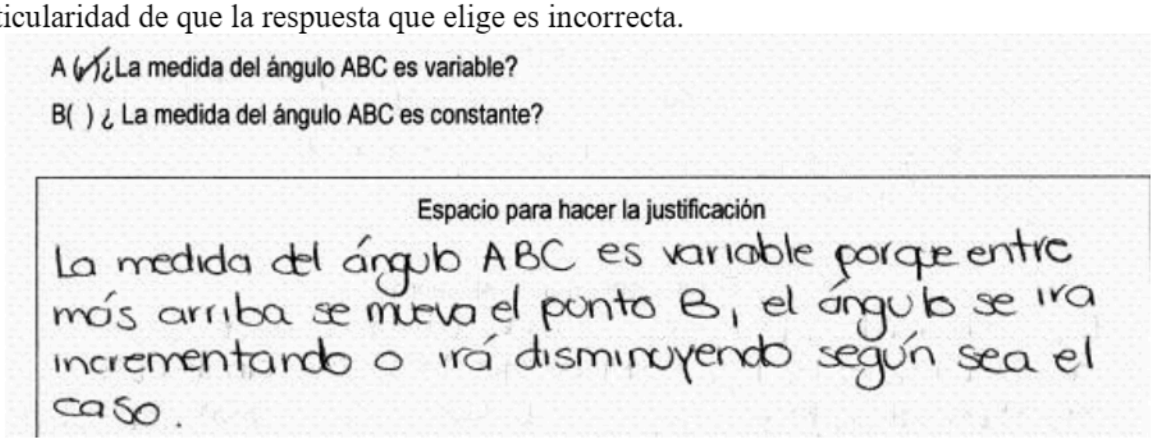
El estudiante no entendió el enunciado del problema, porque el punto móvil es B y los puntos A y C están sobre la circunferencia y son fijos. Sin embargo, el estudiante cambia las condiciones y supone que los puntos A y C se pueden mover a lo largo del diámetro como en la siguiente figura:



Por esta razón, el estudiante escribe que cuando A se acerca al punto C el ángulo ABC se hace más pequeño.

b. Percepción

Yadira esgrime una argumentación basada en lo que percibe como verdadero con la particularidad de que la respuesta que elige es incorrecta.



A (✓)¿La medida del ángulo ABC es variable?

B( ) ¿ La medida del ángulo ABC es constante?

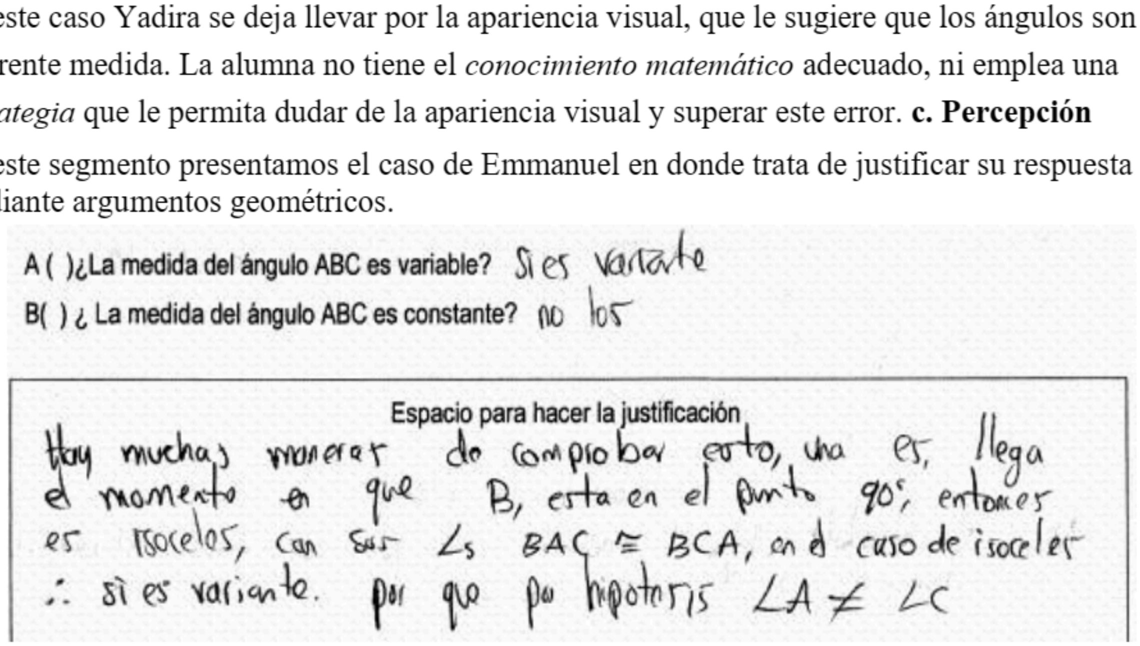
Espacio para hacer la justificación

La medida del ángulo ABC es variable porque entre más arriba se mueva el punto B, el ángulo se irá incrementando o irá disminuyendo según sea el caso.

En este caso Yadira se deja llevar por la apariencia visual, que le sugiere que los ángulos son de diferente medida. La alumna no tiene el *conocimiento matemático* adecuado, ni emplea una *estrategia* que le permita dudar de la apariencia visual y superar este error.

c. Percepción

En este segmento presentamos el caso de Emmanuel en donde trata de justificar su respuesta mediante argumentos geométricos.



A ( )¿La medida del ángulo ABC es variable? Si es variante

B( ) ¿ La medida del ángulo ABC es constante? no los

Espacio para hacer la justificación

Hay muchas maneras de comprobar esto, una es, llega el momento en que B, esta en el punto 90°, entonces es isoceles, con sus $\angle s$ BAC $\cong$ BCA, en el caso de isoceles $\therefore$ si es variante. por que por hipotesis $\angle A \neq \angle C$

El estudiante percibe una posición de B para la cual el ángulo ABC es de 90 grados, de la cual deduce que el triángulo ABC es isósceles y por ende ángulo A = ángulo C. Sin embargo, también percibe en la figura dada que los ángulos cuyos vértices están en A y C son diferentes, lo que lo lleva a pensar que el ángulo en B ya no puede ser de 90 grados, esto es, que los únicos triángulos rectángulos que reconoce son los que además son isósceles.

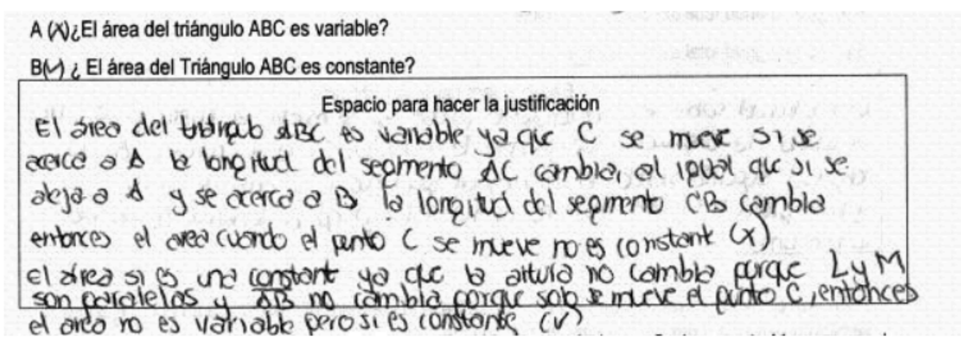
4.3. El Problema de las paralelas.

La matriz de resultados que se exhibe a continuación muestra los resultados generales del desempeño del grupo en la solución del tercer problema. Las respuestas fueron agrupadas en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida. Veamos:

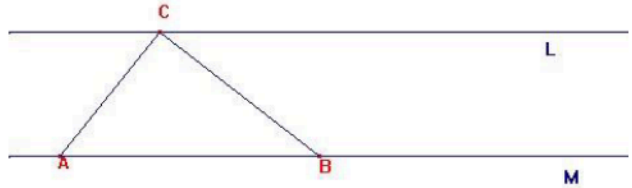
Categoría	No entendió	Círculo vicioso	Percepción	Argumentación Matemática inválida	Argumentación Matemática válida
Porcentaje de aciertos	0/26 0%	7/28 25%	12/28 43%	1/28 4%	8/28 28%

a. Círculo vicioso

A continuación exhibimos el caso de Lilibeth


A (X)¿El área del triángulo ABC es variable?
B(V) ¿ El área del Triángulo ABC es constante?
Espacio para hacer la justificación
El área del triángulo ABC es variable ya que C se mueve si se acerca a A la longitud del segmento AC cambia, al igual que si se aleja a A y se acerca a B la longitud del segmento CB cambia entonces el area cuando el punto C se mueve no es constant (X)
el área si es una constant ya que la altura no cambia porque L y M son paralelas y AB no cambia porque solo se mueve el punto C, entonces el area no es variable pero si es constante (V)

Vamos a poner nuevamente el gráfico que acompaña la redacción del problema para dar una explicación del razonamiento realizado por Lilibeth:

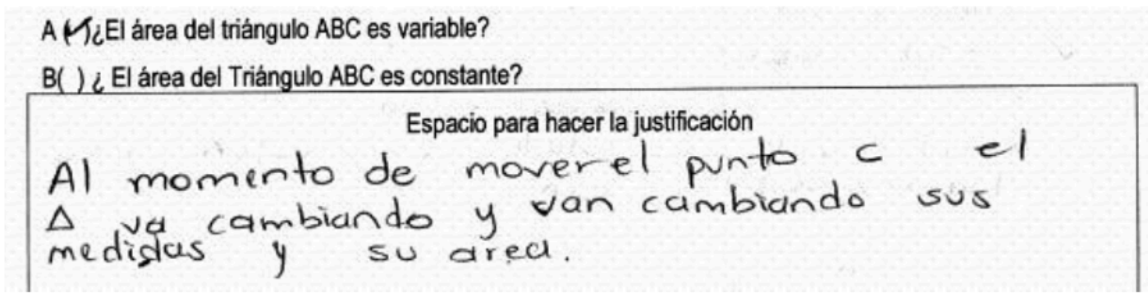


La alumna muestra dos tipos de razonamiento: al inicio es perceptual y el segundo es teórico. Al inicio, cuando emplea la percepción, Lilibeth cree que el área del triángulo es variable porque los lados AC y CB pueden cambiar de medida. En la parte final del primer párrafo hay una tacha, presuponemos que la alumna identificó un error en su razonamiento y lo invalidó. En esta parte la alumna usó las *estrategias de control* en la resolución del problema.

En la segunda parte la alumna identifica que la base y la altura del triángulo no cambian y por tanto el área del triángulo es constante. En esta parte de la solución la alumna incorporó *recursos matemáticos* (paralelismo y el algoritmo para calcular el área de un triángulo) para resolver la actividad.
La alumna utiliza una redacción confusa. No usa de manera adecuada los signos de puntuación y en este caso, al igual que en el problema 1, cae en un juego de palabras carente de claridad y precisión, que dificulta el entendimiento de las ideas que quiere expresar.

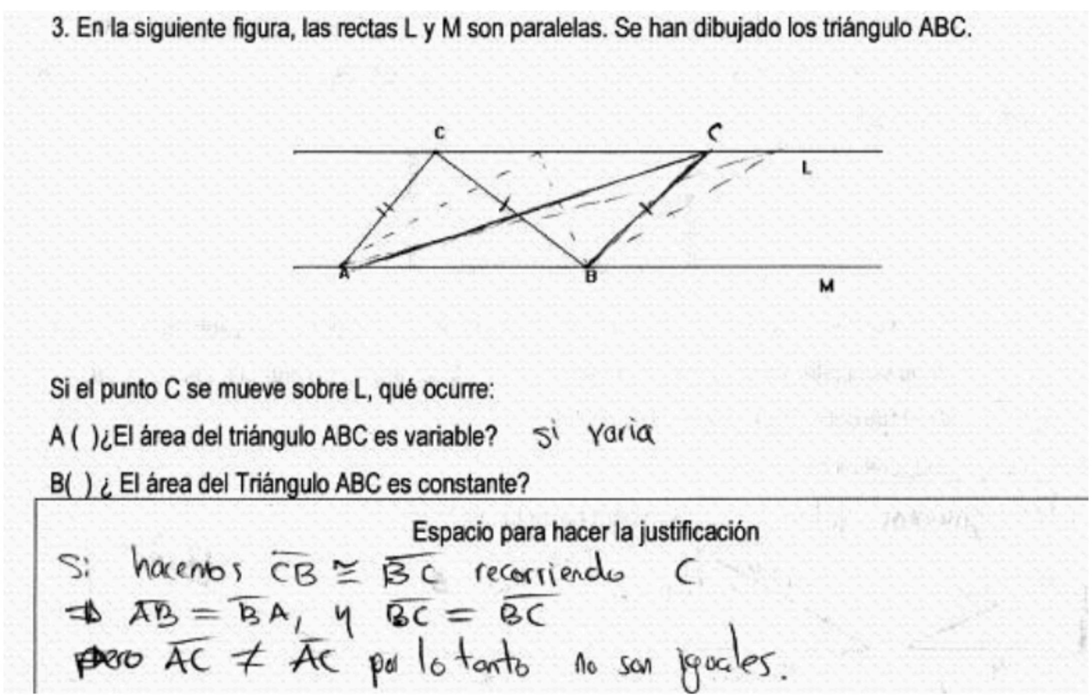
b. Percepción

La siguiente justificación la realiza Leticia, quien da como un hecho, que al mover el punto C y modificar el triángulo, varían las medidas de los lados (lo cual es cierto) y en consecuencia también cambia el área, lo cual es erróneo.
De acuerdo a la respuesta dada podemos inferir que su razonamiento estuvo basado en el registro geométrico y después lo escribió.


A (✓) ¿El área del triángulo ABC es variable?
B( ) ¿ El área del Triángulo ABC es constante?
Espacio para hacer la justificación
Al momento de mover el punto C el
Δ va cambiando y van cambiando sus
medidas y su area.

c. Argumentación matemática inválida

En esta ocasión exhibimos el enunciado y la solución elaborada por Emmanuel, quien intenta justificar matemáticamente su respuesta mediante congruencia entre triángulos que forma sobre la figura


3. En la siguiente figura, las rectas L y M son paralelas. Se han dibujado los triángulo ABC.

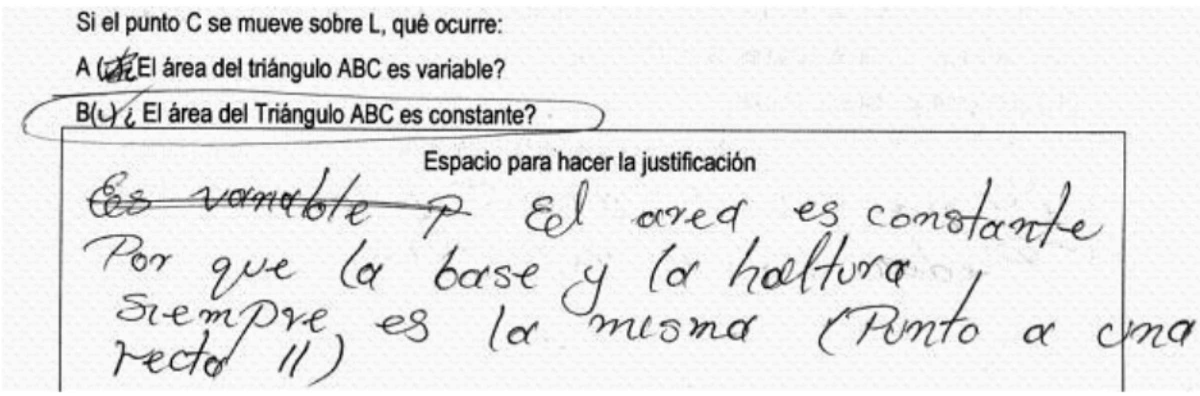
Si el punto C se mueve sobre L, qué ocurre:
A ( )¿El área del triángulo ABC es variable? si Varia
B( ) ¿ El área del Triángulo ABC es constante?
Espacio para hacer la justificación
Si hacemos $\overline{CB} \cong \overline{BC}$ recorriendo C
$\Rightarrow$ $\overline{AB} = \overline{BA}$, y $\overline{BC} = \overline{BC}$
pero $\overline{AC} \neq \overline{AC}$ por lo tanto no son iguales.

El alumno parte del triángulo dado ABC y construye un segundo triángulo. Comete el error de etiquetar el vértice móvil con la misma letra del punto original. Lo cual, genera confusiones y dificulta el entendimiento de su razonamiento.

Para una mejor comprensión de las ideas de Emmanuel, cambiaremos la notación. Al punto móvil lo llamaremos C'. Afirma que $\overline{CB} = \overline{BC'}$. El estudiante llega a concluir que los triángulos ABC y ABC’ no son congruentes, según él, esto implica que las áreas no son iguales. Naturalmente esto es un error.

d. Argumentación matemática válida

El caso que presentamos es de Jorge el cual inicia escogiendo la opción errónea y posteriormente se percata de su error, justificando su respuesta haciendo uso del *dominio del conocimiento* que tiene sobre el tema.


Si el punto C se mueve sobre L, qué ocurre:

A ( ) El área del triángulo ABC es variable?

B( ) ¿ El área del Triángulo ABC es constante?

Espacio para hacer la justificación

~~Es variable p~~ El area es constante Por que la base y la haltura siempre es la misma (Punto a una recta //)

En primera instancia el alumno había seleccionado la respuesta incorrecta. Sin embargo, razonó y se dio cuenta de su error. Emplea de manera adecuada sus recursos para resolver el problema. Otro aspecto a resaltar son los errores tanto de redacción como de ortografía.

4.4. Problema de la carretera.

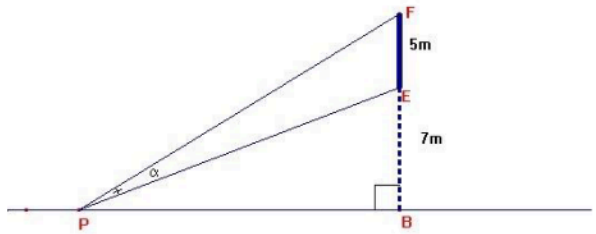
En la siguiente tabla mostramos los resultados generales del desempeño del grupo en la solución del cuarto problema. Los resultados fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida. Veamos:

Categoría	No entendió	Círculo vicioso	Percepción	Argumentación Matemática inválida	Argumentación Matemática válida
Porcentaje de aciertos	0/28 0%	4/28 14%	24/28 86%	0/28 0%	0/28 0%

Este problema es el único donde ningún alumno intenta justificarlo mediante argumentos matemáticos. Otra particularidad es que todos los alumnos contestaron la pregunta, es decir, no se quedó en blanco el espacio para justificar la opción que habían escogido.

a. Círculo vicioso

Si analizamos lo escrito por Yadira, nos percatamos que también carece de claridad en la redacción de su justificación, ya que menciona otro ángulo que si varía pero no lo señala y que al ángulo α sólo cambia de lugar, pero no indica hacia donde es el cambio.



Espacio para hacer la justificación

Es constante, porque cuando el observador se acerca hacia la base del poste lo que cambia es el otro ángulo, porque el α solo cambia como quien dice de lugar.

b.

Percepción

La respuesta que elabora José Refugio es correcta, sin embargo, está fundamentada en lo perceptual y hace la descripción sobre la acción hipotética que realizaría un observador:

Espacio para hacer la justificación

El ∢ alfa es variable ya que mas se acerque el observador a la base del poste tendra que subir un poco mas su cabeza y eso implica que el ∢ alfa sea variable.

Mientras que la respuesta construida por Jorge Antonio es incorrecta. El alumno cree que como el desplazamiento del observador lo hace en una línea recta, el ángulo no varía y no argumenta la validez de esta respuesta.

Espacio para hacer la justificación

Es constante Por que sigue una misma trayectoria en recta.

4.5. Problema del rectángulo.

A continuación mostramos los resultados generales del desempeño del grupo en la solución del quinto problema. Los resultados fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida. Veamos:

Categoría	No entendió	Círculo vicioso	Percepción	Argumentación Matemática inválida	Argumentación Matemática válida
Porcentaje de aciertos	0/28 0%	2/28 7%	9/28 32%	3/28 11%	14/28 50%

a. Círculo vicioso

5. ¿Qué ocurre con el área de los rectángulos de perímetro fijo?

A ( )¿El área es variable?

B(X) ¿ El área es constante?

Espacio para hacer la justificación

Es constante ya que como el perimetro es fijo y para obtener el area del rectangulo es la misma entonces su area no va a variar siempre sera lo mismo.

b. Percepción

José Refugio justifica la opción escogida en base a lo que aprecia como verdadero
Alfonso cree que si el perímetro de un rectángulo es fijo, entonces su área es constante:

Espacio para hacer la justificación

CUANDO EL PERIMETRO ES FIJO EL AREA ES CONSTANTE INDEPENDIENTE DE LA FORMA DEL RECTANGULO

Esta creencia se fundamenta en la percepción y no hace cálculos para rebatirla.

c. Argumentación matemática inválida

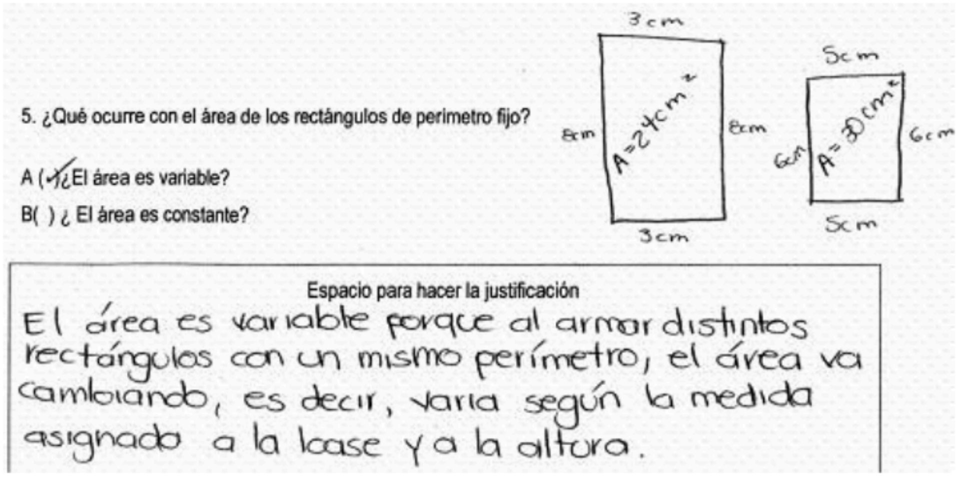
En la argumentación proporcionada por Lilibeth, encontramos que la alumna conoce, e incorpora a la solución el resultado del área del rectángulo. Sin embargo se equivoca cuando afirma que dos rectángulos que tengan perímetro fijo, deben tener las mismas dimensiones.

Espacio para hacer la justificación

El área es constante ya que si tienen el mismo perimetro, en un caso particular el area seria lo mismo ya que las bases y las alturas medirían lo mismo

d. Argumentación matemática válida

La estrategia utilizada por Yadira fue la particularización. Dibujó dos rectángulos con medidas específicas, mantuvo fijo el perímetro y calculó el área:



Otro punto a resaltar es la claridad en la presentación de sus ideas.

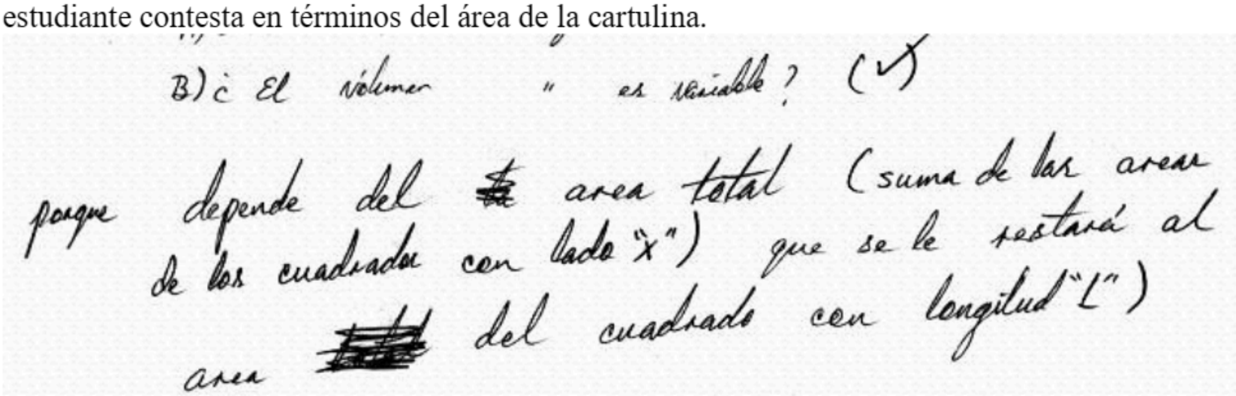
4.6 El problema de la caja

A continuación mostramos los resultados generales del desempeño del grupo en la solución del sexto problema. Los resultados fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida. Veamos:

Categoría	No entendió	Circulo vicioso	Percepción	Argumentación incorrecta	Argumentación correcta
Porcentaje de aciertos	5/28 18%	0/28 0%	21/28 60%	1/28 4%	1/28 4%

a. Estudiantes que no entendieron el problema

Héctor no entiende el enunciado del problema, porque la actividad involucra volumen y el estudiante contesta en términos del área de la cartulina.



b. Percepción

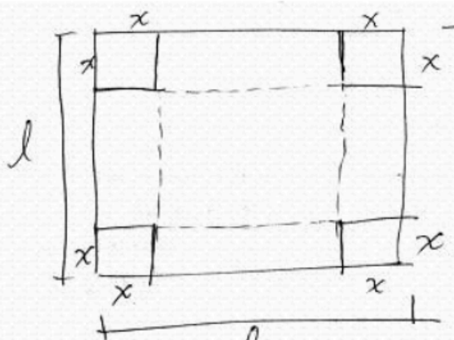
Victoria utiliza argumentos meramente perceptibles para justificar la respuesta. La alumna reconoce que las dos variables que intervienen en el problema son la longitud del corte y el volumen de la caja. Asegura que estas dos cantidades son inversamente proporcionales. Sin embargo no estudió casos particulares.

Justificación.

- El volumen de las cajas es diferente a manera que las esquinas con longitud x sean más grandes, el volumen sea más chico, en cambio si esa longitud fuese más chico el volumen sería más grande.

c. Argumentación matemática inválida

En este caso Jorge expresa el volumen de la caja mediante un binomio al cubo, en donde la base de la caja formada es *l-2x,* solo que la altura es *x*.



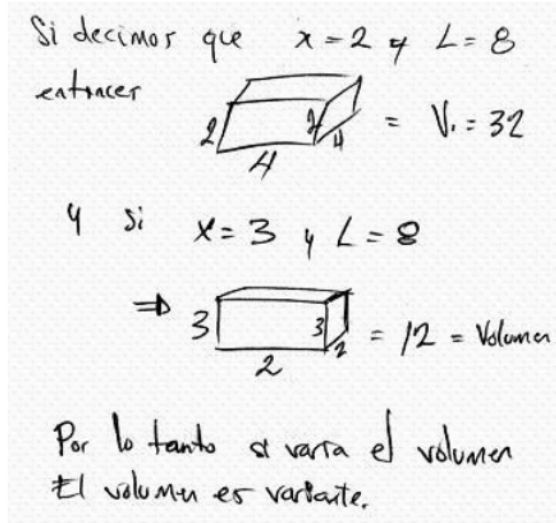
A: ¿El volomen de estas cajas es constante?

B). El volomen de estas cajas es variable?

$$(l-2x)^3 = l^3 - 6l^2x + 6lx^2 - 8x^3$$

d. Argumentación matemática válida

Emmanuel estudia casos particulares. Fija la longitud de la cartulina en 8 cm, hace diferentes cortes y en cada caso calcula el volumen.
El caso de Emmanuel es un ejemplo donde se combina el manejo de recursos matemáticos, con la selección de una estrategia adecuada.



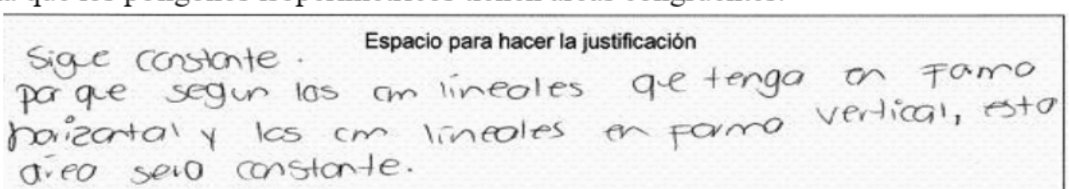
4.7. Problema del anuncio.

A continuación mostramos los resultados generales del desempeño del grupo en la solución del séptimo problema. Los resultados fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida. Veamos:

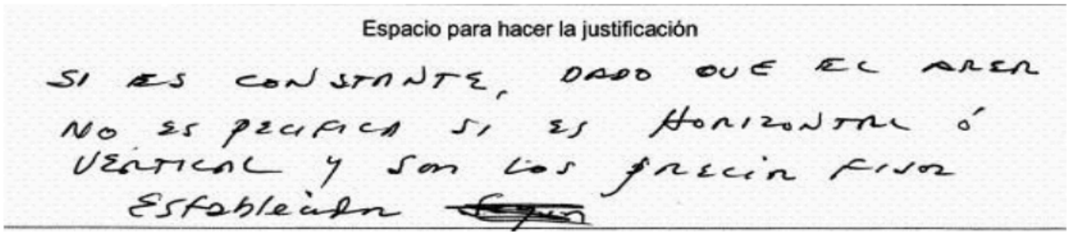
Categoría	No entendió	Círculo vicioso	Percepción	Argumentación Matemática inválida	Argumentación Matemática válida
Porcentaje de aciertos	5/28 18%	7/28 25%	11/28 39%	0/28 0%	5/28 18%

a. Estudiantes que no entendieron el enunciado.

Victoria no entiende el enunciado del problema. La alumna no reconoce las variables, las condiciones y las preguntas involucradas en el problema. Además se deja llevar por una creencia que los polígonos isoperimétricos tienen áreas congruentes.



En la redacción del problema queda claro que se cobran 7 pesos por cada centímetro horizontal y 8 pesos por cada centímetro vertical. La actividad implica discutir si un anuncio de área fija tiene precio variable. Sin embargo Alfonso no logró entender las condiciones del problema. Veamos:

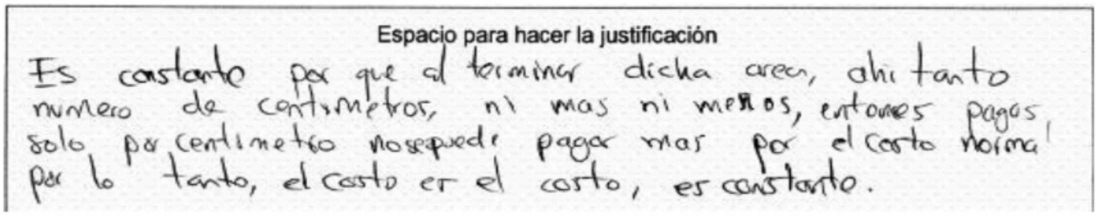

Espacio para hacer la justificación

SI ES CONSTANTE, DADO QUE EL AREA NO ES PECIFICA SI ES HORIZONTAL Ó VERTICAL Y SON LOS PRECIOS FIJOS ESTABLECIDOS

b.

Círculo vicioso

Emmanuel cree que el costo del anuncio es constante:

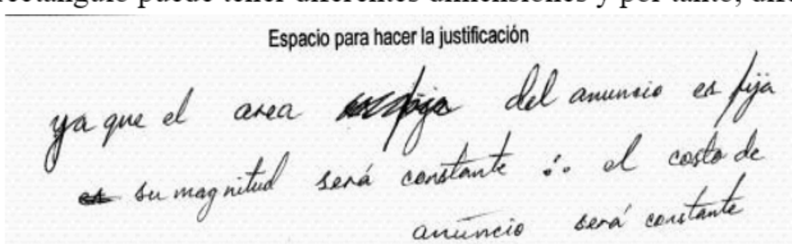

Espacio para hacer la justificación

Es constante por que al terminar dicha area, ahi tanto numero de centimetros, ni mas ni menos, entonces pagas solo por centimetro nosepuede pagar mas por el costo normal por lo tanto, el costo es el costo, es constante.

En el escrito se reconocen varios errores. El primero tiene que ver con la veracidad de la respuesta. También son notorios los errores de uso de los signos de puntuación. Hay errores de redundancia, por ejemplo, dice: “el costo es el costo”. También hay errores de ortografía, por ejemplo, el alumno usa de manera errónea la palabra “ahí”, la palabra correcta en el contexto es “hay”.

c. Percepción

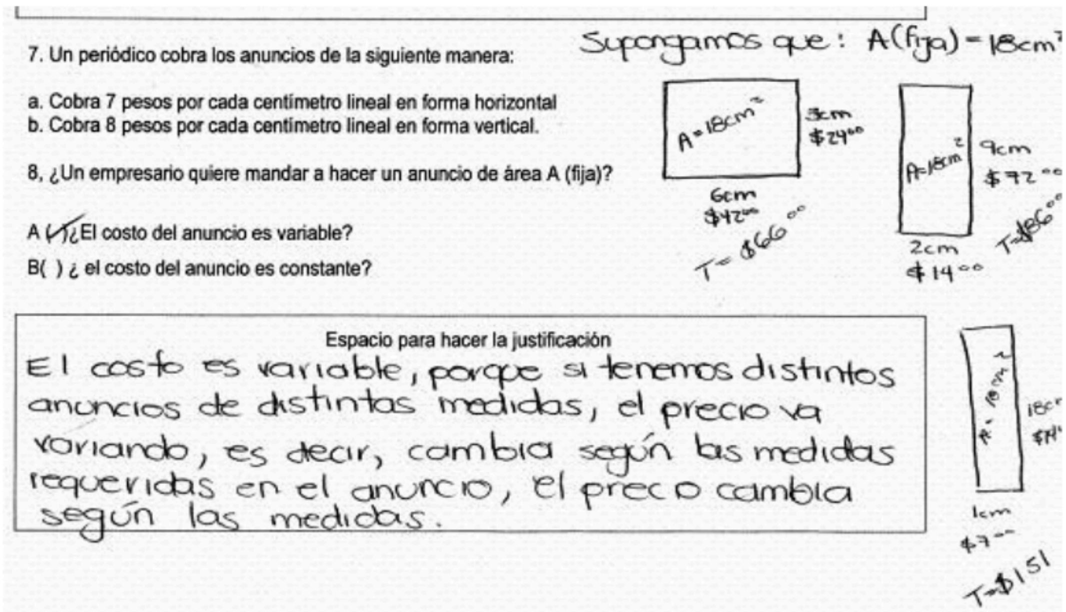
Héctor se queda con la imagen que el área es fija. Sin embargo, no percibe que un área constante de un rectángulo puede tener diferentes dimensiones y por tanto, diferente costo.


Espacio para hacer la justificación

ya que el area ~~es~~ fija del anuncio es fija ~~es~~ su magnitud será constante ∴ el costo de anuncio será constante

d. Argumentación matemática válida

Yadira utiliza la estrategia Heurística de estudiar varios casos particulares. Fija el área en 18 cm^2 y cambia las dimensiones de los lados. Calcula el costo en cada caso y concluye que es variable:



7. Un periódico cobra los anuncios de la siguiente manera:

a. Cobra 7 pesos por cada centímetro lineal en forma horizontal
b. Cobra 8 pesos por cada centímetro lineal en forma vertical.

8, ¿Un empresario quiere mandar a hacer un anuncio de área A (fija)?

A (✓) ¿El costo del anuncio es variable?
B( ) ¿ el costo del anuncio es constante?

Espacio para hacer la justificación

El costo es variable, porque si tenemos distintos anuncios de distintas medidas, el precio va variando, es decir, cambia según las medidas requeridas en el anuncio, el preco cambia según las medidas.

5. Comentarios finales.

El promedio general obtenido por los alumnos es de 42% en las respuestas correctas. Lo cual refleja un bajo rendimiento de los estudiantes en la identificación de la variación.
Los resultados del estudio diagnóstico, fueron agrupados en cinco categorías de acuerdo al tipo de argumento utilizado para sustentar la respuesta: No entender el enunciado del problema, círculo vicioso, percepción, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida.
En cada uno de los problemas se nota un bajo porcentaje de alumnos que utiliza argumentos matemáticos válidos.
En términos generales, el grupo denota severas dificultades para comunicar y argumentar sus ideas matemáticas. Generalmente tienen problemas para redactar claramente y de manera concisa. A otros estudiantes, se les detectaron dificultades en el dominio de recursos y de estrategias.

Referencias

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1965*). ¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?* Editorial Trillas. México.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F.