

Aplicación del Enfoque Gráfico en la enseñanza de Inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica

Angela E. Torres R.

angtruiz@hotmail.com

Universidad Nacional Experimental del Táchira

Venezuela

Autor de correspondencia: Angela E. Torres R.

Resumen: Dado el carácter no ostensible de los objetos matemáticos, la aprehensión de sus significados y los diferentes elementos conceptuales asociados a ellos presenta dificultades a los estudiantes. De allí que ha surgido en los últimos años un creciente interés por evaluar la efectividad del empleo de diversos esquemas de representación como medio didáctico para afianzar los conceptos y significados de los objetos matemáticos. La presente investigación, más allá del proceso exploratorio descriptivo, intentó profundizar en la relación entre el uso de los registros gráfico y algebraico y el éxito alcanzado al estudiar los temas de Funciones e Inecuaciones, analizando los conflictos semióticos que surgen al estudiar los referidos temas en el contexto específico dado en la Universidad Nacional Experimental del Táchira. La investigación ofrece la posibilidad de examinar desde una perspectiva innovadora el proceso de aprendizaje de Inecuaciones, así como de evaluar el impacto ofrecido por las nuevas herramientas didácticas sustentadas en el Enfoque Gráfico.

Palabras Clave: Inecuaciones, Enfoque Gráfico, Representaciones Semióticas

Abstrac: Given the non-ostensible nature of mathematical objects, the apprehension of their meanings and the different conceptual elements associated with them presents difficulties for students. Hence, in recent years there has been a growing interest in evaluating the effectiveness of the use of various representation schemes as a didactic means to strengthen the concepts and meanings of mathematical objects. The present research, beyond the descriptive exploratory process, tried to deepen the relationship between the use of graphic and algebraic registers and the success achieved when studying the topics of Functions and Inequalities, analyzing the semiotic conflicts that arise when studying the aforementioned topics in the specific context given in the National Experimental University of Táchira. The research offers the possibility of examining the learning process of Inequalities from an innovative perspective, as well as evaluating the impact offered by the new didactic tools supported by the Graphic Approach.

Keywords: Inequalities, Graphic Approach, Semiotic Representations



1. Introducción

En el ámbito educativo son múltiples los aspectos que se constituyen en objetos de investigación y que concentran la atención de quienes a partir de sus ópticas particulares intentan ofrecer respuestas y alternativas a los diversos problemas que surgen en este contexto. Uno de esos aspectos significativos es el hecho de buscar alternativas didácticas y metodológicas que conlleven a alcanzar una aprehensión eficiente de los constructos básicos asociados a los temas de Inecuaciones y Funciones, pues aunque ambos tópicos se presentan sencillos y de fácil entendimiento, algunas investigaciones han mostrado que su estudio conlleva a dificultades en su entendimiento.

Al tomar como eje central el interés por descubrir las dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar estos temas, se plantea una investigación que más allá de este proceso exploratorio descriptivo, profundice en la relación entre el uso de los registros gráfico y algebraico y el éxito alcanzado al estudiar los temas mencionados, específicamente en el contexto universitario dado en el Primer Semestre de Ingeniería de la Universidad Nacional Experimental del Táchira.

Una vez determinados los modos de apropiación de los conceptos matemáticos básicos vinculados a los temas de funciones e inecuaciones, así como las dificultades y errores asociados a las tareas inherentes al desarrollo de dichos temas, se ofrece un aporte didáctico consistente en un compendio de estrategias alternativas que tienen como propósito conllevar a una aprehensión eficiente de los correspondientes conceptos, partiendo de la implementación de tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre dichas representaciones.

De manera que se expone para la consideración del cuerpo docente interesado en aplicarlo un mecanismo didáctico, sustentado en el empleo del Enfoque Gráfico, que tiene como propósito implícito afianzar los conceptos básicos asociados al tema de funciones e inecuaciones, además de ofrecer una vía más fructífera y eficiente para el abordaje de estos temas. Al tiempo que queda abierta la posibilidad de aplicar enfoques similares en otros temas de carácter básico en la formación del estudiante y así contrastar los beneficios de esta óptica no convencional con otras alternativas didácticas.

2. Fundamentación.

En el marco de las exigencias impuestas a quienes ejercen el rol docente surge en los últimos tiempos un interés creciente por valorar el uso de las nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los diferentes temas asociados al área de la Matemática. Este interés emerge como consecuencia natural del papel preponderante que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento.

En este marco de interés por las representaciones semióticas destaca la posición de Godino (2002), quien enfatiza la necesidad de profundizar las investigaciones sobre el papel de los signos y la noción de significado, desde la perspectiva de la Educación Matemática, señalando como prioritario el estudio de la articulación entre los componentes semióticos y epistemológicos puestos en juego en la actividad matemática. En su perspectiva, es preciso analizar con mayor

amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento, el lenguaje matemático y las situaciones-problemas para cuya solución se inventan tales recursos.

Ahora bien, dada la naturaleza y tipo de los objetos cuyos significados se ponen en juego en el quehacer didáctico vinculado a la Matemática, surgen nuevas expectativas, pues, como bien lo expresa Pimm (1995, citado por Godino, 2002), lo que entendemos por comprensión y significado está lejos de ser obvio, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática.

Se reconoce que en el trabajo matemático, los símbolos (significantes) están en lugar de las entidades conceptuales (significados) a quienes remiten. Sin embargo, el punto álgido en los procesos de instrucción matemática no se ubica, según lo expresa Godino (2002), en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones de cuya resolución provienen.

Por otra parte, como bien lo expresan Campos y Balderas (2000) el propósito de la enseñanza de las matemáticas es ofrecer condiciones para que los estudiantes entiendan que los problemas se deben abordar desde una concepción flexible y que su solución requiere formas representacionales equivalentes y manipulaciones simbólicas particulares. Esto exige al docente buscar caminos para presentar y facilitar el uso de cada concepto matemático en varios sistemas representacionales, posibilitando la transición entre ellos, de manera fluida, con elementos argumentativos sólidos que puedan constituirse a futuro en mecanismos de verificación de resultados.

Expone Duval (2006) que es esencial la utilización de varios sistemas de representación y expresión, ya que estos permiten enunciar un objeto, distinguiéndolo de sus diferentes modos de representación. De igual manera enfatiza la valoración de las representaciones mentales desarrolladas, pues estas permiten una mirada del objeto en ausencia del significante perceptible. Igualmente señala que en el contexto de la educación matemática el progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el de la lengua natural.

Sin duda, la utilización de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento y la comprensión del objeto, pero también su complejidad. Pues, como bien lo expresa D'Amore (2006), dada la pluralidad de modos de representación y expresión el objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido como múltiple.

Tomando como referencia que diferentes representaciones no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes e independientes, Duval (2006), deja ver que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta substancialmente las posibilidades de incrementar las capacidades cognitivas de los sujetos y en consecuencia de desarrollar sus representaciones mentales.

Esta interdependencia que subyace en las relaciones entre representaciones internas y externas la reafirma Duval (op. cit) al afirmar que no hay noesis, entendida esta como la aprehensión conceptual de un objeto, sin semiosis, pues es esta última la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. Es entonces fundamental recurrir a una pluralidad de sistemas semióticos y a la consecuente coordinación de estos por parte del sujeto si se aspira

alcanzar una aprehensión conceptual transparente y efectiva.

Si bien es cierto que en algunos temas, como funciones e inecuaciones, es factible hacer uso de una variedad representacional, también lo es que en esta riqueza representacional es posible encontrar aún debilidades, pues, según lo señalan Penalva y Torregrosa (2001), los alumnos suelen confundir los objetos matemáticos con sus representaciones, siendo entonces una de las tareas a emprender la búsqueda de caminos que eliminen esa visión difusa de la frontera entre objeto y representación, pues se sabe que toda confusión implica una pérdida de comprensión. Resaltan los autores indicados que si los conceptos matemáticos fueran directamente accesibles a través de experiencias realizadas con los objetos físicos, el riesgo de confusión sería despreciable. Sin embargo, en la práctica esto no es lo que ocurre pues únicamente son accesibles de modo directo las representaciones semióticas.

Esas debilidades generan la imposibilidad de efectuar adecuadas conversiones entre los diferentes modos de representación, como bien lo señala Duval (2006), en particular en los inicios de los cursos universitarios.

Tal situación es observada con frecuencia, de acuerdo a los Informes Académicos emitidos por la Coordinación de Matemática I de la UNET, en los alumnos cursantes de esta asignatura. Conllevando a una frágil comprensión de los contenidos básicos que le pudieran garantizar su éxito académico futuro.

De manera que surge el interés por indagar sobre los modos de apropiación de los conceptos matemáticos básicos asociados al tema de Inecuaciones en los estudiantes de nivel universitario, específicamente en las Carreras de Ingeniería de la UNET, con el propósito de plantear estrategias alternativas que conlleven a una aprehensión eficiente de los mismos, que le permita a los estudiantes concretar una matriz conceptual que correlacione los tópicos básicos y le sirva de sustento para abordar nuevos temas en su devenir académico.

3. Aspectos Metodológicos.

La investigación se abordó desde un enfoque mixto, aprovechando las fortalezas ofrecidas por la metodología cuantitativa y las bondades de la metodología cualitativa. La misma fue desarrollada atendiendo a la ejecución de las siguientes fases:

- **Descriptiva:** En la cual se determinaron las características asociadas al manejo de los conceptos relativos a los temas de Funciones e Inecuaciones por parte de los estudiantes, así como las herramientas aplicadas para la solución de los diversos tipos de Inecuaciones. De igual manera se indagó en el cuerpo docente sobre los estilos de enseñanza utilizados por ellos al abordar el tema de Inecuaciones, así como las dificultades observadas en los estudiantes al desarrollar las tareas asociados a los referidos temas.
- **Selectiva:** En esta fase se procede a elegir los recursos, estrategias y materiales didácticos ajustados a la intención de desarrollar el tema de Inecuaciones bajo un Enfoque Gráfico. De igual manera se procedió a escoger los alumnos más representativos del contexto de interés, para designarlos como sujetos de la investigación.

- De Contraste: Centrada en los parámetros de la Investigación Cuasi-Experimental, aplicando en un grupo de estudiantes los criterios metodológicos tradicionalmente empleados por los docentes y en el otro la metodología centrada en la óptica alternativa propuesta: El Enfoque Gráfico. Cabe destacar que los grupos fueron seleccionados procurando alcanzar los mayores niveles de homogeneidad en los mismos, por lo que se aplicó la respectiva Prueba de Bondad de Ajuste.
- Focalizada: En la que haciendo uso de la observación participante y entrevistas a profundidad se realizó una exploración intensiva respecto a los modos de aprehensión manejados por los alumnos, así como el abordaje de los caminos conducentes a la resolución de las Inecuaciones planteadas.
- Analítica-Reflexiva: Apoyada en los criterios y parámetros establecidos por el Enfoque Ontosemiótico, para develar posibles incongruencias en el significado asignado a los diversos objetos matemáticos, así como bondades en el manejo de herramientas de carácter algebraico y gráfico.

4. Resultados.

En primera instancia, el cumplimiento de la Fase Descriptiva permitió evidenciar las debilidades conceptuales que presentan los estudiantes respecto a los temas en torno a los cuales gira la investigación. Los hallazgos más relevantes en este sentido se indican a continuación:

Aspecto	Categorización de las Respuestas
“Inecuación” para los estudiantes significa:	<ul style="list-style-type: none"> – Estudio de desigualdades. – Verificación de condiciones. – Determinación del conjunto solución o dominio real. – Encontrar los intervalos que satisfacen una condición dada. – Comprobación de la veracidad de una proposición. – Encontrar la validez de una expresión algebraica.
La finalidad de la proposición “Encuentre la solución a la siguiente inecuación” es	<ul style="list-style-type: none"> – Verificar de la factibilidad de solución del ejercicio. – Comprobar el cumplimiento de una igualdad. – Comprobar el cumplimiento de una desigualdad. – Verificar la veracidad o falsedad de ciertas expresiones algebraicas. – Verificar la verdad o falsedad de un planteamiento numérico.
Las dificultades más comunes presentadas por los estudiantes al momento de resolver una inecuación son:	<ul style="list-style-type: none"> – Comprobar la veracidad de los enunciados. – Manejar correctamente los procesos algebraicos involucrados en la solución.
Los factores que influyen en la comprensión de los pasos para efectuar el trazado de la gráfica de	<ul style="list-style-type: none"> – Mal manejo de definiciones necesarias para comprobar el comportamiento de la función – Desconocimiento de mecanismos de verificación de resultados.

una función son:	<ul style="list-style-type: none"> - Errores algebraicos. - Desconocimiento de las características de las funciones.
------------------	--

Tabla 1. Concepciones previas y dificultades que presentan los alumnos al momento de abordar los temas de Inecuaciones y Funciones.

De lo anteriormente expuesto y el análisis efectuado al Instrumento aplicado a los estudiantes se desprenden las siguientes inferencias:

- Se observó que los estudiantes no conocen con certeza el significado del término Inecuación, sin embargo, logran asociarlo a la idea de condiciones establecidas por una expresión algebraica.
- Por otra parte, se aprecia que los estudiantes relacionan el término Inecuación con la comprobación o verificación de una condición dada por una igualdad, observándose la presencia de un grave error conceptual que le inducirá muy probablemente a la obtención de respuestas incorrectas en los procesos algebraicos a desarrollar en los diferentes ejercicios planteados en clase.
- De acuerdo con la información aportada por los estudiantes el problema de mayor frecuencia al momento de resolver una inecuación lo constituye el hecho de comprobar la veracidad de los resultados, aunque también le asignan un peso relativamente alto al manejo de los procesos algebraicos involucrados en la solución, lo cual evidencia la presencia de obstáculos referentes a la argumentación teórica al momento de enfrentarse a las situaciones didácticas que lleven implícitas la solución de Inecuaciones.
- Se observa la tendencia al uso exclusivo de herramientas de orden algebraico al momento de resolver inecuaciones, por lo que la introducción y manejo de herramientas alternativas, como el enfoque gráfico, resulta ser de interés de acuerdo a los propósitos de la investigación, para verificar su impacto al abordar dicho tema.
- Se evidencia que los estudiantes no acostumbran a utilizar herramientas de verificación al momento de efectuar el trazado de una gráfica, esto hace que sea de amplio interés para la investigación el corroborar qué beneficio aportaría en su proceso de aprendizaje la introducción y manejo de mecanismos de verificación de los resultados alcanzados, en particular, partiendo de la asociación y transferencia entre los registros algebraico y gráfico.

Por otra parte, lo expresado por los docentes en la respectiva Entrevista aplicada a ellos permite derivar las siguientes observaciones:

Aspecto	Inferencias derivadas de las Respuestas
<p>Describa la manera como Ud. aborda el tópico de Inecuaciones, indicando los recursos didácticos empleados y los mecanismos para generar el clima didáctico.</p>	<p>Se infiere de lo expresado por los docentes que aunque hacen uso exclusivo del pizarrón como recurso didáctico, se apoyan en la técnica de la pregunta para plasmar en él las diferentes opiniones de los estudiantes, efectuando una decantación de las respectivas respuestas a fin de dirigir el proceso de solución por el camino correcto. Esto les permite detectar errores conceptuales y efectuar la respectiva retroalimentación durante el proceso de solución de los respectivos ejercicios. Resalta además el hecho de que los docentes muestran interés por establecer al inicio del desarrollo del tema el sustento teórico sobre el cual se apoyará el desarrollo de los ejercicios vinculados al tema de Inecuaciones. No obstante, en general, se aprecia debilidades para generar un adecuado clima didáctico.</p>
<p>Cómo valora usted el manejo de las herramientas algebraicas por parte de los estudiantes al abordar el tema de Inecuaciones?</p>	<p>Los docentes expresan las debilidades algebraicas observadas en sus estudiantes al momento de abordar la solución de Inecuaciones; debilidades como las señaladas llevan al estudiante a obtener resultados erróneos. Manifiestan que los estudiantes presentan un débil manejo de los conocimientos previos asociados al tema de Inecuaciones, elemento desencadenante de la ocurrencia de graves errores algebraicos durante el desarrollo de los ejercicios planteados. Precisamente el débil manejo de las propiedades algebraicas no le permite al estudiante contar con herramientas de verificación de los resultados alcanzados; situación esta que abre las puertas a la posibilidad de incorporar mecanismos didácticos alternativos que lleven al estudiante a emplear otros enfoques de solución como instrumentos para el estudio de las Inecuaciones.</p>
<p>Introduce usted herramientas semióticas diversas para abordar el tema de Inecuaciones?</p>	<p>Los docentes se muestran sinceros al aceptar su desconocimiento o débil manejo de herramientas gráficas para el abordaje de la solución de Inecuaciones, sin embargo reconoce la utilidad de las mismas y el provecho que de ellas pueden tomar los estudiantes al estudiar el referido tema.</p>
<p>Qué opinión le merece la propuesta de incorporación</p>	<p>Se percibe una actitud positiva, tendiente a la amplia receptividad por parte de los docentes en torno a la incorporación</p>

<p>de nuevas herramientas didácticas, sustentadas en la conversión entre registros semióticos, para el abordaje del tema de Inecuaciones?</p>	<p>de nuevas herramientas didácticas para abordar el tema de Inecuaciones. Sin embargo, se aprecia que los docentes desconocen los fundamentos teóricos del Enfoque Ontosemiótico. De igual manera, no tienen un claro manejo de las Teorías de Enseñanza y los criterios determinados por ellas para guiar la actuación en el aula; en algunos casos alegando que su formación de Pregrado no corresponde al Área de Educación; en otros omitiendo la respuesta o aportando una respuesta errónea donde se deja ver la confusión entre Teorías de Enseñanza y Teorías de Aprendizaje.</p>
<p>Cuáles bondades puede otorgarle al empleo de diferentes registros de representación al abordar el tema de Inecuaciones?</p>	<p>Los docentes expresan una amplia gama de bondades asignadas al empleo de los diferentes registros de representación, las cuales van desde la posibilidad de generar un abordaje más versátil del tema hasta la posibilidad de emplearlos como mecanismos de verificación de resultados.</p>

Tabla 2. Concepciones de los docentes respecto al abordaje didáctico del tema de Inecuaciones.

Los resultados anteriores pueden plasmarse de manera abreviada en la Figura 1, la cual se muestra a continuación:

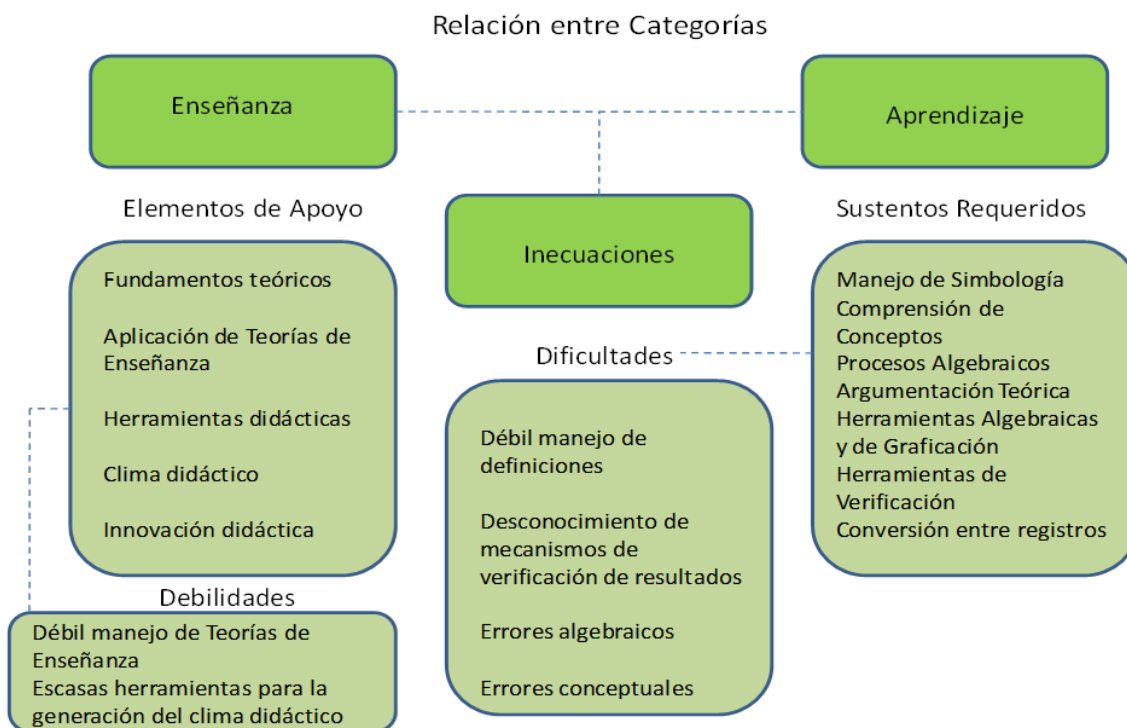


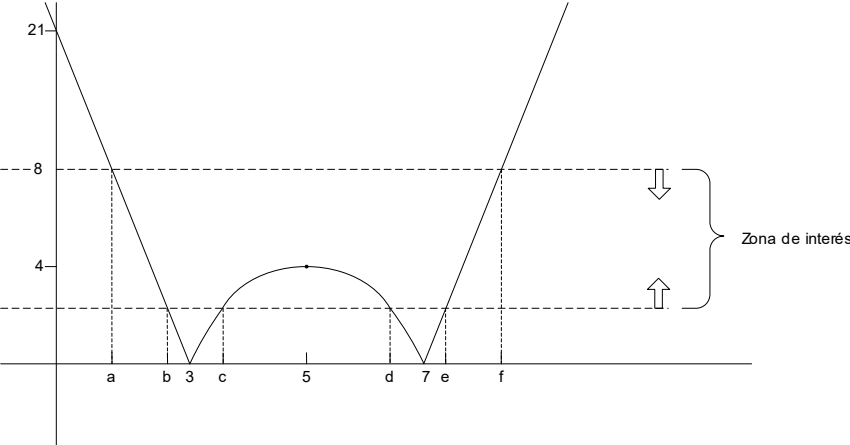
Figura 1. Inferencias derivadas de la Fase Diagnóstica

En la siguiente fase de la investigación se seleccionaron las actividades a desarrollar en el aula, esta etapa consistió en diseñar situaciones didácticas en las que se correlacionen los diversos conceptos asociados al tema de interés.

La principal contribución de la experiencia de investigación consistió en el diseño de la Propuesta

Metodológica para la enseñanza de los temas de Funciones e Inecuaciones, con la particular novedad de aplicar el enfoque gráfico para el estudio de estas últimas. Siendo el fin de las estrategias propuestas lograr que el estudiante haga un efectivo uso de los diferentes tipos de registro, efectuando las conversiones necesarias para inferir la respuesta a las situaciones planteadas.

Algunos ejemplos de las actividades diseñadas bajo esta óptica se muestran a continuación:

Actividad N° 1	Tópico: Inecuaciones con valor absoluto de funciones cuadráticas
<p>Propósito: Manejar el efecto del valor absoluto sobre una ecuación cuadrática y reconocer los valores que satisfacen la inecuación.</p>	
<p>Encuentre la solución de la siguiente inecuación $2 < x^2 - 10x + 21 < 8$</p> <p>Planteamiento gráfico:</p>  <p>Solución: $(a,b) \cup (c,d) \cup (e,f)$</p> <p>Los puntos se hallan a partir de:</p> $ x^2 - 10x + 21 = 2 \begin{cases} \nearrow x^2 - 10x + 21 = 2 & \text{(Esta ecuación arroja los puntos b y e)} \\ \searrow x^2 - 10x + 21 = -2 & \text{(Esta ecuación arroja los puntos c y d)} \end{cases}$ <p>y</p> $ x^2 - 10x + 21 = 8 \begin{cases} \nearrow x^2 - 10x + 21 = 8 & \text{(Esta ecuación arroja los puntos a y f)} \\ \searrow x^2 - 10x + 21 = -8 & \text{(Esta ecuación no tiene solución real)} \end{cases}$	
<p>Observación: Conviene que el estudiante reconozca cuales puntos obtendrá al resolver las</p>	

diferentes ecuaciones. Esto se logra identificando que parte de la gráfica fue reflexionada, por efecto del valor absoluto. En este caso, la gráfica correspondiente al intervalo $(3, 7)$ presentaba inicialmente imágenes negativas comprendidas en el rango $[-4, 0)$, por ello al resolver la ecuación $|x^2 - 10x + 21| = -2$ se obtienen los puntos c y d .

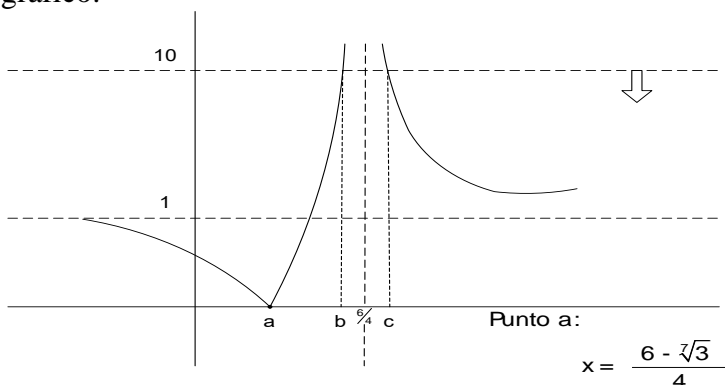
Actividad N° 2 Tópico: Inecuaciones de la forma $\left| \frac{k}{(ax+b)^n} - c \right| < d$, con a, b, c, d y k reales y n par o impar.

Propósito: Reconocer el comportamiento de la función racional $f(x) = \frac{k}{(ax+b)^n}$, y a partir de su gráfica determinar la solución de una inecuación dada.

Encuentre la solución de la siguiente inecuación:

$$\left| \frac{3}{(-4x+6)^7} - 1 \right| < 10$$

Planteamiento gráfico:



Solución: $(-\infty, b) \cup (c, +\infty)$

Los puntos b y c se determinan a partir de:

$$\left| \frac{3}{(-4x+6)^7} - 1 \right| = 10 \begin{cases} \nearrow \frac{3}{(-4x+6)^7} - 1 = 10 & \text{(Punto b)} \\ \searrow \frac{3}{(-4x+6)^7} - 1 = -10 & \text{(Punto c)} \end{cases}$$

Observación: Es fundamental reconocer el efecto del signo menos en el coeficiente de la x , ya que el mismo provoca un cambio en la gráfica de la función de referencia

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \text{ con } n \text{ impar.}$$

Por otra parte, se recomienda hallar los puntos de corte con los ejes en cada una de las gráficas previas a la definitiva.

Es importante que el estudiante infiera cual punto, b ó c , arrojará la solución de cada ecuación planteada.

Actividad N° 3

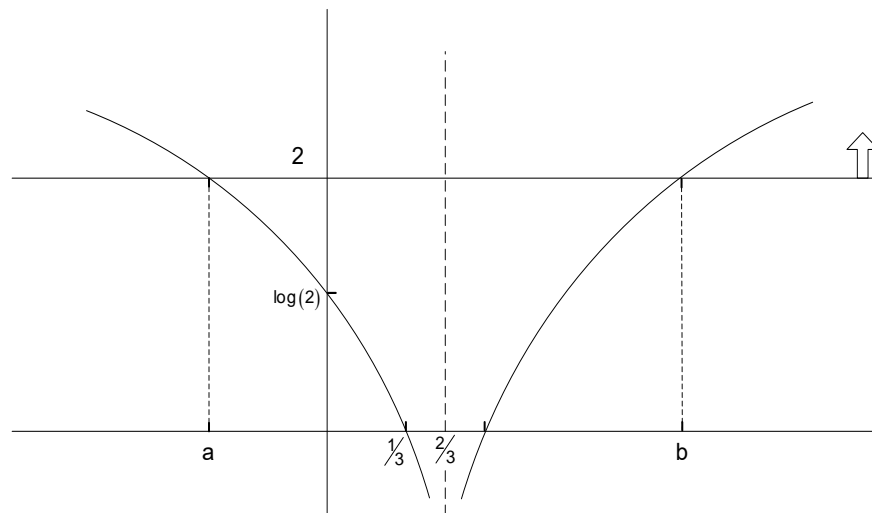
Tópico: Inecuaciones de la forma $f(x) \geq c$, con $f(x)$ función logarítmica y $c \in \mathbf{R}$.

Propósito: Verificar el manejo adecuado de los pasos para trazar gráficas de funciones logarítmicas y el reconocimiento de sus características.

Encuentre la solución de la siguiente inecuación:

$$\log(|3x-2|) \geq 2$$

Planteamiento gráfico:



Solución: $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

Los puntos a y b se determinan a partir de:

$$\log(|3x-2|) = 2, \text{ es decir, } |3x-2| = 10^2$$

Esta ecuación arroja dos posibles soluciones:

$$3x-2 = 100 \Rightarrow x = \frac{102}{3}$$

ó

$$3x - 2 = -100 \Rightarrow x = \frac{-98}{3}$$

Observación: Dada la simetría en el comportamiento del argumento del logaritmo, también se presenta simetría con respecto a la asíntota vertical en la gráfica de la función logarítmica y, en consecuencia, en la ubicación de los puntos a y b respecto a la asíntota vertical.

Por otra parte, en la Fase de Contraste se procedió a verificar la incidencia del enfoque didáctico alternativo, sustentado en la utilización del Enfoque Gráfico, sobre la aprehensión eficiente de los conceptos asociados al tema de Inecuaciones y los procedimientos empleados por los estudiantes para alcanzar la solución de las Inecuaciones planteadas.

Es preciso indicar que inicialmente, a partir del análisis de los resultados arrojados por el Pre-Test diseñado específicamente para el estudio, se encontró que:

- Los alumnos mostraron una tendencia a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica para abordar el estudio de Inecuaciones.
- Se evidenció en los estudiantes debilidades al pasar del registro gráfico al algebraico.
- Las debilidades de transferencia entre los registros gráfico y algebraico obedecían al bajo nivel de dominio sobre tópicos básicos del Álgebra, aunado a un gran número de concepciones erróneas de los temas abordados.
- Los estudiantes mostraron dificultades en el manejo de mecanismos de verificación de los resultados alcanzados al resolver las Inecuaciones planteadas.
- En el estudio del tema de funciones la conversión del registro analítico al registro gráfico no se mostró de manera fluida, encontrándose que los alumnos no poseían mecanismos de verificación de los procesos efectuados y los resultados alcanzados.

Una vez aplicadas las dos metodologías a contrastar, la primera de ellas con énfasis en el enfoque algebraico y la segunda con preponderancia en el enfoque gráfico, se pudieron determinar las siguientes observaciones:

- Los alumnos que utilizan enfoques analíticos y algebraicos para resolver Inecuaciones, presentan dificultades al enfrentarse a situaciones didácticas de mayor complejidad y no cuentan con herramientas de verificación de los resultados.

- Estos alumnos muestran debilidades en la conversión de los registros gráfico y algebraico al estudiar funciones. No visualizan conexiones y generalizaciones, por lo que la aplicación eficiente de los sustentos teóricos que deben soportar el desarrollo del tema se ve afectada.
- Los alumnos que aplican el enfoque gráfico en el estudio de Inecuaciones muestran una transferencia fluida entre los registros gráfico y algebraico, contando con herramientas de verificación de resultados y contraste de información.
- El análisis de situaciones de alta complejidad y exigencia cognitiva es más exitoso en este grupo de alumnos, mostrando habilidad para la conversión entre registros y el planteamiento de la solución al problema planteado.
- Los alumnos que utilizan el enfoque gráfico muestran una mayor claridad conceptual y conforme aumenta esta solidez teórica también mejoran y aumentan las distintas representaciones utilizadas. Observándose en ellos una mayor estabilidad de los conceptos cuando la exigencia y dificultad de las situaciones didácticas aumenta.
- En general, se observa que el empleo de un enfoque gráfico apoyado en mecanismos de transferencia entre registros genera un impacto positivo en los estudiantes que abordan los temas de Funciones e Inecuaciones, pues los dota de herramientas no convencionales pero altamente efectivas para el estudio de dichos temas, permitiéndoles establecer de manera más sólida la noción de significado del objeto matemático estudiado.

5. Reflexiones Finales.

El estudio desarrollado devela la necesidad de ofrecer a los estudiantes herramientas novedosas que le permitan efectuar el proceso de solución de Inecuaciones de una manera más fluida; todo ello para garantizar un aprendizaje efectivo, con clara aprehensión de conceptos y minimización de errores procedimentales. Esto adiciona una nueva exigencia al docente, quien deberá plantear tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre dichas representaciones. Este nuevo escenario didáctico para el abordaje de la enseñanza de Inecuaciones tiene como finalidad crear estrategias que conlleven a concretar en los estudiantes una sólida matriz conceptual que correlacione los tópicos básicos y le sirva de sustento para el abordaje de situaciones de mayor complejidad cognitiva en su devenir académico.

Por otra parte, la investigación desarrollada confirma que la identificación de los conflictos semióticos que surgen al abordar el estudio de un contenido matemático es un aspecto esencial del análisis didáctico al proporcionar una explicación de las dificultades de los estudiantes en dicho proceso. Al tiempo que permite vislumbrar que el éxito académico en el estudio del tema objeto de interés para la investigación está ligado a la fluidez alcanzada por el estudiante al efectuar la conversión entre registros; siendo el enfoque multirepresentacional el soporte de la

adecuada búsqueda del significado del objeto matemático estudiado.

La interdependencia que subyace en las relaciones entre representaciones la reafirma Duval (2006) al afirmar que no hay noesis, entendida esta como la aprehensión conceptual de un objeto, sin semiosis, pues es esta última la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. Es entonces fundamental recurrir a una pluralidad de sistemas semióticos y a la consecuente coordinación de estos por parte del sujeto si se aspira alcanzar una aprehensión conceptual transparente y efectiva.

6. Referencias

- Campos, M. y Balderas, P. (2000). Las representaciones semióticas como fundamento de una didáctica de las Matemáticas. *Pensamiento Educativo*. Vol. 27. Diciembre 2000. pp. 169-194. Recuperado de: <http://pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articulos/181/public/181-432-1-PB.pdf>
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Recuperado de: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- D'Amore, B. (2006). Objetos, Significados, Representaciones Semióticas y Sentido. *Relime*, Número Especial. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/dfichero_articulo?codigo=216158&orden=71972
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la educación matemática. Colección Digital Eudoxus. Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática. Recuperado de: <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/334/335>
- Penalva, C. y Torregrosa, G. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas. En E. Tonda y A. Mula (Eds.), *Scripta in Memoria* (pp. 649-658). Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.