El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones

Dr. José Luis Díaz Gómez
jdiaz@mat.uson.mx
Universidad de Sonora
México

Autor de correspondencia: José Luis Díaz Gómez

Resumen: En esta artículo se hace un breve recorrido por la historia del concepto de función que nos muestra las distintas etapas y obstáculos por las que tuvo que pasar el concepto antes de arribar al concepto moderno de función, este análisis permite obtener algunas ideas pedagógicas para la enseñanza del mismo concepto. Mencionaremos también algunos resultados de las investigaciones en educación matemática referentes al concepto de función, que han permitido identificar las dificultades por las que pasa el estudiante y los errores conceptuales que adquiere al estudiar este concepto. Así, como los distintos aspectos y componentes que se requieren para comprenderlo.

Palabras clave. Función, historia, investigaciones, enseñanza.

Abstract: This article makes a brief journey through the history of the concept of function that shows us the different stages and obstacles that the concept had to go through before arriving at the modern concept of function, this analysis allows us to obtain some pedagogical ideas for teaching the same concept. We will also mention some results of research in mathematics education regarding the concept of function, which have made it possible to identify the difficulties that the student goes through and the conceptual errors that he acquires when studying this concept. Thus, as the different aspects and components that are required to understand it.

Keywords. Function, history, research, teaching.

1. Introducción.

En la historia encontramos varios ejemplos de conceptos matemáticos cuyo uso en la matemática ha pasado a través de numerosos cambios, por ejemplo la derivada y la integral. El concepto de función no ha sido ajeno a este proceso, el análisis de la evolución histórica de este concepto nos muestra que éste es un concepto muy complejo, y para llegar a la definición actual se tuvo que pasar por un proceso largo y laborioso. Durante su evolución se encuentran diferentes definiciones y cada definición corresponde a diferentes niveles de abstracción. Tener claridad sobre este proceso nos permite ubicar el problema de la enseñanza de este concepto en una dimensión más exacta además, nos permite obtener algunas ideas pedagógicas para su enseñanza.

El concepto de función es uno de los conceptos fundamentales en la matemática, pero también es uno para el cual los estudiantes tienen problemas para desarrollar una comprensión satisfactoria. Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto parecen centrarse en su complejidad y generalidad. Ya que presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones, además de una variedad de conceptos asociados que se manifiestan con diferentes niveles de abstracción.

En el aspecto curricular el concepto de función es como una hebra que atraviesa desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los universitarios, en donde con frecuencia se utiliza para modelar procesos físicos, químicos, sociales, y de ingeniería, etcétera.

Estas características han llamado la atención de los investigadores y han generado un conjunto creciente de investigaciones alrededor de él. En este artículo mencionaremos algunas de las investigaciones sobre el concepto de función, sin pretender ser exhaustivos, pues la literatura es muy extensa, y señalaremos algunas ideas pedagógicas que pueden obtenerse de los resultados.

2. Historia del Concepto de Función

Kleiner en un artículo (1989) opina que el concepto de función se remonta 4000 años atrás, y que la noción de función no surgió en forma explícita sino hasta principios del siglo XVIII y en el transcurso de casi 200 años (1450-1650 D.C.)

Por otro lado, Youschkevitch (1976) distingue varias etapas principales del desarrollo del concepto de función hasta la mitad del siglo XIX. Siguiendo un poco la idea de Youschkevitch en nuestro estudio consideramos las siguientes etapas:

La Antigüedad: En la cual considera principalmente la Matemática Babilónica (2000 a. c. –600 a. c.) y la Griega.

La Edad Media: La cual se divide en dos fases; la Fase Latina (500-1200) y la no Latina (1200-1500).

Período Moderno: En el que se distingue a partir del siglo XVIII cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función.

2.1. La antigüedad

Mientras Pedersen (1974) opina que los matemáticos babilónicos poseyeron un auténtico "instinto de funcionalidad", ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, y esto si está presente en las numerosas tablas de cálculos de los babilónicos Youschkevitch, asegura que no hay ninguna idea en general de función en esta matemática.

En los elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticos. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, pero no a las funciones, se consideran a los números enteros y discretos, y a las magnitudes continuas. Esto hace difícil construir la noción de función, puesto que los números, así considerados, sólo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza.

En esta etapa se llevan a cabo estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes, sin embargo, no se llegaron a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función.

Para algunos investigadores, cualesquiera que hayan sido las causas y circunstancias que condujeron a las características de la ciencia antigua, el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función (Youschkevitch 1976, pág. 40).

2.2. La edad media

El desarrollo del concepto de función en el período medieval se puede dividir en dos partes: una fase no latina desde el año 500 hasta el 1200, y una fase latina, aproximadamente desde el año 1200 hasta el 1500.

Las contribuciones del Período no Latino incluyendo las matemáticas Hindús y Árabes, caen en el campo del álgebra y la trigonometría. Encontraron soluciones de ecuaciones con una incógnita. Pero, la idea de variable no surgió, y de este modo, no se consideró que una ecuación con dos incógnitas establecía una relación funcional entre dos variables (Boyer, 1946).

En el Período Latino a partir del siglo XIII hasta bien entrado el período moderno aparecieron con notable regularidad tratados sobre proporciones. Estos trabajos equivalen a un álgebra de relaciones del tipo $y = kx^n$, donde n tiene un valor racional. . Esta teoría de proporciones fue básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de Newton (Boyer, 1946, pág. 9). Por su parte Oresme intentó dibujar también ciertas funciones para las cuales la tasa de cambio no era constante, las gráficas en estos casos eran líneas quebradas o curvilíneas. La latitud de formas representó una teoría primitiva de funciones en la que esta tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra.

Pero les faltó el lenguaje del álgebra con el cual expresar la ley de variación o la correspondencia funcional (Boyer, 1946, pág. 10).

2.3. Periodo Moderno

En el transcurso de 200 años (1450-1650) ocurrieron una serie de desarrollos que fueron fundamentales para el surgimiento del concepto de función:

- La unión del álgebra y la geometría;
- La introducción del movimiento como un problema central en la ciencia;
- La invención del álgebra simbólica, y
- La invención de la geometría analítica (Kleiner, 1989, pág. 283)

Esto es en el siglo XVII surge una ciencia matematizada que sugiere una “visión dinámica y continua de la relación funcional, en oposición a la visión estática y discreta sostenida por los antiguos” (Kleiner, 1989, pág. 283).
La palabra “función” apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz de agosto de 1673, la introdujo para designar un objeto geométrico asociado con una curva, v. g. coordenadas de un punto sobre la curva o la pendiente de una curva (Youschkevitch, 1976, pág. 56) y en 1718 Johan Bernoulli en un artículo dio la primera definición formal de función como:
“*Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes*”.(Rüthing, 1984.)

A partir del siglo XVIII se perciben cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función. Matemáticos prominentes están asociados con cada una de estas etapas.

2.4. Primera Etapa

En la primera etapa donde la función es una ecuación o fórmula está asociada con Euler (1707-1783). Euler definió una función siguiendo la definición dada por su maestro Bernoulli como:

"*Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes*" (Rüthing, 1984, pág. 72).

Mérito grande de Euler es el de incluir expresamente las funciones implícitas además de las explícitas.

Esta noción de función permaneció sin cambio hasta los inicios de 1800 cuando Fourier en su trabajo sobre las series trigonométricas, encontró relaciones más generales entre las variables.

2.5. Segunda Etapa

En 1822 Fourier dio un paso revolucionario en la evolución del concepto de función, al dar una definición de función en la que hacía notar que lo principal era la asignación de valores para la función; que ésta asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas no era de importancia.

La definición de Fourier es:

"En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única" (Rüting, 1984.)

2.6. Tercera etapa

En 1829 Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de función $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo a < x < b.

Esta definición fue extremadamente general, no decía ni una sola palabra sobre la necesidad de dar a la función por medio de una formula, sobre todo el dominio de definición. Definió función de la siguiente forma:

"*y es una función de una variable x, definida en el intervalo a<x<b, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia*" (Kleiner, 1989).

Debates entre muchos matemáticos famosos incluyendo a Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, Weirstrass, Lebesgue y Borel dieron ímpetu al continuo desarrollo histórico del concepto de función.

2.7. Cuarta etapa

La última etapa está asociada con Bourbaki en 1939 y se caracterizó por la arbitrariedad del dominio y el rango.

Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son

"*Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para toda x E, existe un único y F el cual está en la relación dada con x.* (Rüthing, 1984).

Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios.

Desarrollo Reciente. La discusión de cómo los matemáticos deben definir las funciones no ha cambiado significativamente desde el milenio pasado. Sin embargo, el tema no ha sido completamente resuelto.

2.8. Ideas pedagógicas

El análisis de la evolución histórica nos proporciona evidencias acerca de que, la enseñanza del concepto de función ha experimentado un desarrollo análogo al histórico (Dreyfus, 1990, pág. 120). Nos muestra también que algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función, se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII.

También pone de manifiesto las diferentes formas bajo las cuales se ha revelado el concepto de función, y los obstáculos epistemológicos significativos ligados a su desarrollo histórico.

Y nos permite obtener algunas ideas pedagógicas. Entre ellas se mencionan las siguientes:

- Debemos de buscar que el estudiante se interese en la explicación de los cambios y, en encontrar regularidades entre los cambios.
- Se debe de proporcionar un amplio espectro de formas de dar las funciones, de hablar sobre las funciones y representar las funciones.
- Los estudiantes deben de ser capaces de decir no sólo qué cambia, sino también cómo cambia.
- Se deben de utilizar los métodos de interpolación para el uso y construcción de tablas numéricas, ya que estas proporcionan contextos matemáticos dentro de los cuales se obtienen niveles más profundos de la noción de función.

3. Investigaciones.

El concepto de función ha generado un conjunto creciente de investigaciones alrededor de él, motivados por el interés en mejorar los problemas de enseñanza y aprendizaje de este concepto y que atacan el problema desde distintos puntos de vista. Sin pretender hacer una revisión exhaustiva de los trabajos de investigación relacionados con el concepto de función, pues son muchos, pero sí de algunos trabajos que han sido relevantes y que con mucha frecuencia aparecen en la literatura de este concepto, mencionamos que algunos investigadores:

Exploran la comprensión de los estudiantes del concepto de función (Orton, 1970, citado en Lovell, 1971; Sierpinska, 1988; Thomas, 1971, 1975).

Estudian la inconsistencia entre la imagen y la definición conceptual de las funciones entre los estudiantes (Dreyfus y Vinner, 1989; Ferrini-Mundy y Graham, 1991; Vinner, 1983) y entre profesores (Even, 1988, 1990; Even, Lappan y Fitzgerald, 1988).

Proponen marcos teóricos para investigar el conocimiento de los estudiantes acerca de las funciones (Vinner, 1983; Dreyfus y Eisenberg, 1982, 1983a; Sfard, 1987; Vinner y Dreyfus, 1989; Even, 1990; Breidenbach, et al., 1992.

Estudian los errores conceptuales y dificultades del concepto (Markovits, Eylon y Bruckheimer, 1986, 1988; Hitt, 1987, 1989).

Se centran en las diferentes componentes y representaciones de las funciones, así como de la interpretación de las gráficas de las funciones (Bell y Janvier, 1981; Clement, 1985; Ponte, 1985; R. Duval, 1988; Hitt, F., 1996.

Han desarrollado micromundos como el de Schoenfeld et al. (1990), o taxonomías del concepto de función como en Lovell (1971) y, Dreyfus y Einseberg (1983b); O estudios de múltiples representaciones como el de Kaput (1987).

Algunos de los resultados de estas investigaciones son las siguientes.

Los trabajos que previamente construyeron modelos teóricos y obtuvieron sus resultados a través de cuestionarios adaptados a la enseñanza convencional sobre la noción de función (Vinner, Tall, Dreyfus, Sfard, Dubinsky, Bakar, Even.) conducen a determinar las "concepciones erróneas" que los estudiantes adquieren durante su aprendizaje y en general concluyen que:

"*El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza*."(Ruiz, 1993)

Las investigaciones que tienen como punto central las diversas componentes y representaciones de la noción de función (Marnyanski, Thomas, Bell, y Janvier, Markovits et. al, Eisenberg.) en general concluyen que:

"Los estudiantes, hasta los de más alto nivel intelectual, se quedan en los niveles más bajos de comprensión de la noción de función."

La variedad de concepciones erróneas y dificultades que se reportan en la literatura revelan las siguientes cuatro grandes áreas de problemas esenciales en el aprendizaje de las funciones:

No considerar el dominio y el rango de las funciones

- Una tendencia por la regularidad
- Un enfoque puntual (en las gráficas); y
- Una separación entre el contexto gráfico y el algebraico.

3.1. Aspectos cruciales para la comprensión del concepto de función

Por otro lado, en la literatura revisada existe un consenso general en relación sobre qué aspectos son cruciales para una profunda comprensión del concepto de función. Las áreas identificadas incluyen:

- Interpretación de funciones representadas por gráficas.
- Descripción de situaciones, fórmulas y tablas. Modelación de situaciones del mundo real.
- Transferencia entre las múltiples representaciones de las funciones.
- Análisis de los efectos de cambio en los parámetros de las gráficas de las funciones.
- Aplicación de la tecnología para representar las funciones.

De este análisis se desprenden, entre otras, las siguientes ideas para la enseñanza del concepto de función:

- La propuesta de Sierpinska de introducir la definición de función a través de una definición informal de Dirichlet, que coincide con la opinión de Sfard de no utilizar una descripción estructural para introducir una nueva noción matemática. Introducir los conceptos del tema Funciones a través de problemas prácticos de la vida real, para que el alumno los asocie con conceptos familiares como sugiere Marnyanski.
- Además de que una comprensión general del concepto debe de incluir el ser capaces de utilizarlo en campos no matemáticos como lo sugieren Markovits et al.
- Se debe de hacer un uso extensivo de las tablas numéricas, siguiendo la evolución histórica del concepto de función, ya que han representado un instrumento de cognición y organización de la información a lo largo de la historia, y como apunta Sierpinska

proporcionan contextos matemáticos dentro de los cuales se hacen relevantes niveles más profundos de la noción de función.

- Que el alumno enfrente, y realice tareas de transformación, y de conversión de representaciones entre al menos dos sistemas de representación, como sugieren Thomas ; Even ; Sierpinska ; Janvier).

4. Conclusiones

Sin duda alguna la educación es una ciencia dependiente, y depende, por ejemplo de: la antropología, la filosofía, la física, la historia, la sicología, la sociología, etcétera. Debido a ello, y a la propia evolución de los diferentes campos, los conceptos matemáticos y su uso en las matemáticas han pasado a través de numerosos cambios. El análisis de la evolución histórica del concepto de función así como de las investigaciones relacionadas con él nos muestran que éste es un concepto muy complejo, que no es fácil de enseñar y aprender, y nos muestran también la existencia de concepciones erróneas, inconsistencias en el pensamiento funcional de los alumnos, así como las dificultades por las que atraviesan durante el aprendizaje de este concepto. Pero no todo es negativo, también nos muestran los estadios a través de los cuales pasan los alumnos en la comprensión del concepto, la determinación de las componentes básicas en su comprensión así, como los aspectos cruciales en la comprensión de este complicado concepto.

5. Bibliografía

Bell, A.& Janvier, C. (1981). *The interpretation of graphics representing situations*. For the learning of Mathematics. 2(1), 33-42.

Boyer, C. B. (1946). *Proportion, equation, function. Three steps in the development of a concept.* Scripta Mathematica. 12, 5-13.

Breidenbach, D. Dubinsky, E. Hawks, H., Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics. 23,243-239

Clement, J. (1985) *Misconceptions in graphing*. Proceedings of the 9 Int. Conf. PME Vol. 1, 369-375. L. Streefland, Eds.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In P. Nesher, & J. Kilpatrick. (Eds.). Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education, pág, 113-134. Cambridge, Great Britain: Cambridge University Press.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1981). *Functions Concepts: Intuitive Baseline*. Proceedings of the 5 Int. Conf. PME. 183-185.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1983). *The function concept in college students linearity smoothenes and periodicity*. Focus on Learning Problems in Mathematics 5, 119-132.

Dreyfus, T., Vinner, S. (1989). *Images and definitions for the concept of function*. Journal for Research in Mathematics Education, 20. 356-366.

Dubinsky, E. y, Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series*, Vol. 25, pág. 85-106.*

Duval, R. (1988). *Gráficas y ecuaciones: La articulación entre dos registros*. Annals de Didactique et de Sciences Cognitives 235-253. (versión español CINVESTAV-IPN)

Even, R. (1988). *Pre-service teachers conceptions of the relationship between functions and equations*. Proceedings of the PME XII, 304-311. Vezprem, Hungry.

Even, R. (1990). *Subject matter knowledge for teaching and the case functions*. Educational Studies in

Mathematics, 21, 521-544.

Even, R. G. Lappan and W. Fitzgerald (1988). *Pre Service Teachers Conceptions of the Relationship Between Functions and Equtions.* Proceedings of th Annual Meeting of PME-NA, pp. 283-289. DeKalb, II; Northen Ilinois University.

Ferrini-Mundy, Graham, K. (1991). *Research in calculus learning: understanding of limits derivatives and integrals*. Paper presented at the Joint Mathematics meeting, Special session on Research in Undergraduate Mathematics Education, 1991. S. Fco.

Hitt, F. (1987). *Obstáculos en el aprendizaje de función*. Memorias 1a. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. 245-248.

Hitt, F. (1989). *Construction of function contradiction and proof*. Proceedings PME, Paris.

Kaput, J. (1987). *Representation Systems and mathematics*. C. Janvier (Eds.). Problems of representations in the Teaching and learning of Math. Hillsdale, N.J. Erlbaum.

Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function concept: A brief survey*. The college Mathematics Journal. 20(4), 282-300.

Lovell, K. (1971). *Some aspects of the growt of the concept function.* In M. F. Rosskopf, L. P. Steffe and S. Taback (Eds.) Piagetian cognitive developmente research and mathematical education, pp. 12-33. Washington, DC. National Council of mathematics.

Marnyanskii, I. A. (1975) *Psychological characteristics of Pupils Assimilation of the Concept of Function.* In J. Kilpatrick Y, Wirsoup, E, Begle, and J. Wilson (Eds.) Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, v. 13, pp. 163-172. Chicago. University of Chicago Press.

Markovits, Z., Eylon, B. S. & *Bruckheimer*, M. (1986*). Functions today and yesterday*.

For the Learning of Mathematics. Vol. 6, No.2, pág. 18-24.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M.(1988). *Difficulties students have with the function concept.* In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.). The Ideas of Algebra.

1988 Yearbook, pág. 43-60. Reston, VA: NCTM.

Orton, A. (1970). *A Cross sectional study of the development of the Mathematical Concept of Function in Secondary School of Average and Above Average Ability*. Master thesis Univ. Leeds

Pedersen, O. *Logistics and the Theory of Functions*. Arch. Intern & Hist. d. Sciences. 24. N.94. 29-50(1974).

Ruiz, H. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Borrador de Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

Rüting, Dieter. (1984). *Some definitions of the Concept of Function from John. Bernoulli to N. Bourbaki.* The Mathematical Intelligencer. Vol. 6, No. 4.

Sfard, A. (1989*).* Transition *from operational to structural conception: the notion of function revisited*. Proceedings of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3 (pág. 151-158). Paris, France.

Sierpinska, Anna, (1992). *On understanding the notion of function.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, págs. 23-58.

Schoenfeld, A.; Smith, J.; Arcavi, A. (1990). *Learning- the microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain*; in R. Glaser (ed.) Advanced in Inst. Psychology. Erlbaum, Hillsdale.

Sfard, A. (1987). *Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural*. In Bergeron, Herscovics, Kieran (Eds.) Proceedings of the 11 Inter. Conf. of PME. Université Montreal.

Sierpinska, A. (1988). *Epistemological remarks on functions*. Proceedings of 12 Inter. Conf. of PME.

Thomas, H. L. (1971). *The concepto of function.* Paper presented at anual meeting of The american Educational association, february 4-7, New York. (Eric Document Reproduction Services No. ED. 049926).

Thomas, H. L. (1975). The concept of function. Children's Mathematical Concepts. Six Piagetian Studies in Mathematics education New York: Teachers College Press. Vinner, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function.* The International Journal of Mathematical Education in science and technology, 14, 293-305.

Vinner, S. and T. Dreyfus (1989). *Image and Definitions for the Concept of Function*. Journal for Reaserch in mathematics Education., 20(4), 356-366.

Youschkevitch, A. P. *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. Hist. Ex. Sci. 16, (1976) 37-85.