Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales

José Luis Díaz Gómez
Universidad de Sonora
México
jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Resumen: La descomposición de una fracción propia en una suma de fracciones parciales es una técnica utilizada en diversos temas de las matemáticas y para determinar las constantes desconocidas que aparecen en las fracciones parciales, generalmente se utiliza un proceso muy laborioso llamado "método de los coeficientes indeterminados". En este artículo se presentan técnicas alternativas al método de los coeficientes indeterminados utilizadas en los libros de Cálculo, que son útiles en una variedad de casos para la determinación de las constantes que aparecen en las fracciones parciales.

Palabras clave: Técnicas alternativas, Fracciones parciales, fracción propia.

Abstract: The decomposition of a proper fraction into a sum of partial fractions is a technique used on different topics of mathematics and to determine the unknown constants appearing in partial fractions, usually a very laborious process called "method of undetermined coefficients" is used. This article presents alternative techniques to the method of indeterminate coefficients used in the calculus books, which are useful in a variety of cases for the determination of the constants that appear in the partial fractions.

Keywords: Partial fractions, proper fraction

1. Introducción

En un primer curso de cálculo integral se estudian varias técnicas de integración, entre ellas la técnica de integración por *Fracciones Parciales* (FP) para la integración de funciones racionales. Esta técnica consiste en descomponer una función racional en una suma de fracciones más simples. La técnica es fundamental para la integración de funciones racionales, pero también se encuentra en el estudio de las ecuaciones diferenciales, en la matemática discreta, en la teoría de control, y otras ramas de la matemática. El método más común para realizar la descomposición en FP se llama "método de los coeficientes indeterminados" (MCI). Este método es tedioso (Huang, 1991) y una fuente de complicadas identidades algebraicas (Chrystal, 1961) que confunden a los estudiantes de un primer curso de cálculo integral, sobre todo a aquellos con problemas de conocimientos algebraicos.

El Cálculo es una red de conocimientos más que una serie de conocimientos encadenados perder de vista esto es perder la belleza y el poder del Cálculo. En este documento describiremos métodos alternativos al MCI para determinar la descomposición en fracciones parciales de una función racional que hacen uso de los conocimientos que adquirieron los estudiantes en el curso de cálculo diferencial con la intención de poner de manifiesto la relación entre el álgebra y el cálculo.

Una revisión del tema de Integración por fracciones parciales en los textos de cálculo utilizados en las universidades como: el libro de *Cálculo* de Smith y Minton (Smith & Minton, 2003), el libro *Cálculo* de James Stewar (Steward, Calculus, 2012), el libro *Cálculo Conceptos y Contextos* de James Steward, (Steward, Cálculo de una Variable Conceptos y Contextos, 2010), el libro de *Cálculo* de Purcell, Varberg y Rigdon (), el libro de *Cálculo* de Leithold (Lethold, 1998), el libro *El Cálculo de una variable* de Zill y Wright (Dennis G. Zill, 2011), el libro *Cálculo de una variable* de Thomas (Thomas, 2010), entre otros, nos muestra que todos ellos utilizan el MCI para descomponer una función racional en una suma de fracciones parciales.

En la literatura matemática encontramos al menos 30 artículos con métodos alternativos para la descomposición de una función racional en una suma de fracciones parciales, algunos de los artículos son (Huang, 1991), (Wiener, An Algebraic Approach to Partial Fractions , 1986), (Schultz, 1983), (Rose, 2007), (Martínez, 2006). Lo que parece sorprendente es que los actuales libros de cálculo no han asimilado los métodos alternativos al MCI, una excepción son los libros de Zill y Wright (Dennis G. Zill, 2011) y Thomas (Thomas, 2010) que si bien utilizan el MCI al final de la sección del método de integración por fracciones parciales presentan brevemente un método distinto para el caso más sencillo de una descomposición, el de factores lineales no repetidos.

Los métodos usuales encontrados en los libros de cálculo requieren esencialmente la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Como tal, implican una gran cantidad cálculos algebraicos y toman aproximadamente n^3 pasos para determinar las constantes de la descomposición, donde n es el grado del denominador de la función racional (H. Joseph Straight, 1984) (Tong, 1977). Con los métodos alternativos el número de pasos es menor.

2. Un poco de historia.

La historia de las fracciones parciales es muy similar a la de las fracciones en general. Para ambas es difícil fijar su origen. Los antiguos egipcios, que expresaban fracciones como la suma de fracciones cuyos numeradores eran la unidad, parecían haber tenido el germen de la idea. Se realizaron estudios sobre fracciones y sobre fracciones parciales en los años 1550 B. C. pero no hubo buen método general para descomponer una fracción en fracciones parciales (David, 2011). Sin embargo, Boyer (Boyer, 1968) dijo que Leibniz fue inteligente al anotar en 1676 que $\frac{1}{\mathrm{n}(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

El método de fracciones parciales para resolver integrales fue introducido por John Bernoulli. Bernoulli fue un matemático suizo que vivió desde 1667 hasta 1748, y contribuyó en el desarrollo temprano del cálculo y enseñó a muchos estudiantes destacados, incluido Leonhard Euler.

Fibonacci descubrió un método para separar una fracción en fracciones parciales, aunque él les llamó "regula universalis in disgregatione partium numerorum” en su libro Liber Abacci (1202) (Smith D. , 1958)

Durante siglos después de que Fibonacci descubrió su método, no se hizo nada hasta Leibniz, en tiempos más recientes, él inventó un método de descomposición de un determinado tipo de fracción en fracciones parciales con el propósito de hacer la integración más fácil.

En un artículo de 1702, Leibniz factorizó $x^4 + a^4$ y se preguntó si integrales como $\int \frac{dx}{x^4 + a^4}, \int \frac{dx}{x^8 + a^8}$ se podrían calcular, esto indicaba que Leibniz no había descifrado una carta que recibió de Newton en octubre de 1676 donde comentaba como había factorizado $x^4 + 1$ y había aplicado fracciones parciales para calcular la integral $\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$. Newton había aprendido a factorizar $x^n \pm 1$ estudiando el método de coeficientes indeterminados de Descartes (Roy, 2011).

2. Descomposición en fracciones parciales de una función racional

Ante de iniciar con los métodos alternativos hagamos un resumen de lo que se encuentra en los libros de cálculo sobre el tema de fracciones parciales con el propósito de utilizarlos más adelante.

Una función $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, en la que *f(x)* y *g(x)* son polinomios y el grado del polinomio *f(x)* es menor que el grado del polinomio *g(x)*, entonces *F(x)* recibe el nombre de *fracción propia*; en caso contrario, *F(x)* se denomina *impropia*. Si *F(x)* es una función impropia, entonces usando el algoritmo de la división, F(x) puede expresarse en la forma:

$$F(x) = P(x) + \frac{h(x)}{t(x)}$$

en donde *P(x), h(x) y t(x)* son polinomios en *x*, y además el grado del numerador *h(x)*, es menor que el grado del denominador *t(x)*. Esto significa que (al menos teóricamente) toda fracción impropia puede expresarse de un modo único en forma de una suma de un polinomio y de una fracción propia. Por esta razón, en lo que sigue sólo consideremos fracciones propias.

Teóricamente, es posible escribir cualquier fracción racional propia *f(x)/g(x)* como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado no mayor que dos. Concretamente, si *f(x)/g(x)* es una fracción propia, entonces se sigue de un teorema de álgebra que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots \qquad (1)$$

donde cada F_i tiene una de las dos formas siguientes:

$$\frac{A}{(ax+b)^m} \qquad \text{ó} \qquad \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^n} \qquad (2)$$

donde m y n son enteros no negativos y en donde $q^2 - 4pr < 0$. La suma al lado derecho de (1) se llama la *descomposición en fracciones parciales* de *f(x)/g(x)* y cada una de las F_i es una *fracción parcial*.

Para obtener la descomposición (1), primero expresamos el denominador *g(x)* como un producto de factores de la forma $(ax + b)$ o expresiones cuadráticas irreducibles de la forma $(px^2 + qx + r)$. Después agrupamos los factores repetidos de manera que *g(x)* queda expresado como un producto de factores distintos de la forma $(ax + b)^m$ ó $(px^2+qx+r)^n$, donde m y n son enteros no negativos y $(px^2 + qx + r)$ es irreducible. Después aplicamos las siguientes reglas:

I. Por cada uno de los factores de la forma $(ax + b)^m$ $m\geq 1$ la descomposición (1) contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m} \qquad (3)$$

donde cada A_i es un número real.

II. Por cada uno de los factores de la forma $(px^2+qx + r)^n$ donde $n\geq 1$ y $q^2 - 4pr < 0$, la descomposición (1) contiene una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{(px^2+qx+r)} + \frac{A_2x+B_2}{(\mathrm{p}x^2+qx+r)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(px^2+qr+r)^n} \qquad (4)$$

donde para cada i, A_i y B_i son números reales.

Tomando en cuenta la factorización del denominador de $f(x)/g(x)$ y las reglas I y II los libros de cálculo estudian los siguientes cuatro casos (Dennis G. Zill, 2011), (Edwin J. Purcell, 2007), (Steward, Calculus, 2012).

1) Factores lineales distintos: $\dfrac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\dfrac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\dfrac{A_3}{(a_3x+b_3)}+\ldots+\dfrac{A_n}{(a_nx+b_n)}$

2) Factores lineales repetidos: $\dfrac{A_1}{(ax+b)}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\dfrac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots+\dfrac{A_n}{(ax+b)^n}$

3) Factores cuadráticos distintos:

$$\frac{A_1x+B_1}{(p_1x^2+q_1x+r_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(p_2x^2+q_2x+r_2)}+\cdots\frac{A_nx+B_n}{(p_nx^2+q_nx+r_n)}$$

4) Factores cuadráticos repetidos:

$$\frac{A_1x+B_1}{(px^2+qx+r)}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots\frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

A continuación, veremos algunas técnicas alternativas para algunos de los casos.

3. Técnicas alternativas.

Vemos la técnica del método de cubrimiento de Heaviside (Oliver Heaviside, ingeniero eléctrico inglés (1850, 1925)), para el caso de una raíz real simple $x = a$. Para conocer una versión más completa de técnica ver los artículos (Joseph Wiener, 1193), (Man Y.-K. , An Improved Heaviside Approach to Partial Fraction Expansion and its Applications, 2008).

3.1 Técnica para factores lineales distintos.

Supongamos que el denominador es $g(x)=(x-a)^r h(x)$, donde r es un entero positivo y $h(x)$ es un polinomio tal que $h(a)\neq 0$. Entonces de acuerdo con la regla 1, tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^r h(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-a)^r}+\frac{p(x)}{h(x)} \qquad (5)$$

donde p(x) es un polinomio y las A_i ($i=1,2,\ldots,r$) son constantes.

Ahora multiplicando (5) por $(x-a)^r$ se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)}(x-a)^r = \frac{f(x)}{h(x)} + A_1(x-a)^{r-1} + A_2(x-a)^{r-2} + \ldots + A_r + \frac{p(x)}{h(x)}(x-a)^r$$

Y tomando el $\lim\limits_{x\to a}$ se obtiene

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}(x-a)^r = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\mathrm{h}(x)} = \lim_{x\to a}\left\{A_1(x-a)^{r-1} + A_2(x-a)^{r-2} + \ldots + A_r + \frac{p(x)}{h(x)}(x-a)^r\right\}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\mathrm{h}(x)} = A_r + 0$ o bien $\dfrac{f(a)}{\mathrm{h}(a)} = A_r$

Así pues, para encontrar las constantes A_r quitamos el factor $(x\text{-}a)^r$ del denominador de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y entonces evaluamos la fracción racional que queda en $x = a$. Esta técnica es aplicable principalmente para el caso en que se tiene factores lineales ver (Joshi, 1983), (A., 2006)

Ejemplo 1. Expresar $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ en una suma de fracciones parciales

Solución: Por la regla I y el caso 1se tiene que

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

Para determinar la constante A, cubrimos $(x + 1)$ en $f(x)/g(x)$ y el resto $\dfrac{x^2+x+1}{(x+2)(x-3)}$ lo evaluamos en $x = -1$. Así $A = \left.\dfrac{(-1)^2+(-1)+1}{(-1+2)(-1-3)}\right]_{x=-1} = -\dfrac{1}{4}$

De la misma forma, de $f(x)/g(x)$ se cubre $(x+2)$ y se evalúa en $x = -2$ para obtener B, luego se cubre $(x\text{-}3)$ y se evalúa en $x = 3$ para obtener C. Por tanto

$$B = \left.\frac{(-2)^2+(-2)+1}{(-2+1)(-2-3)}\right]_{x=-2} = \frac{3}{5}\ ,\ C = \left.\frac{(3)^2+(3)+(1)}{(3+1)(3+2)}\right]_{x=3} = \frac{13}{20}$$

De donde

$$f(x) = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{3}{5(x+2)} + \frac{13}{20(x-3)}$$

Veamos el caso de factores lineales repetidos.

3.2. Técnica para factores lineales repetidos y no repetidos.

Supongamos que se tiene la función racional propia con factores lineales repetidos de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-b)^n (x-a_1)(x-a_2)\cdots \quad)} \qquad (6)$$

Donde b es una raíz real de multiplicidad $n > 1$, donde las a son distintas y $p(x)$ es un polinomio.

Por la regla I y los casos 1 y 2 se tiene que

$$f(x) = \frac{B_0}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \cdots \quad \cdots \qquad (7)$$

Los coeficientes $A_1, A_2, \ldots$ corresponden a los coeficientes de las fracciones con factores lineales no repetidos por consiguiente se calculan utilizando la Técnica **3.1** como en el Ejemplo 1. Para calcular los coeficientes $B_{0,} B_1, \cdots$ multiplicamos ambos lados de la Ecuación (7) por $(x-b)^n$ y obtenemos lo siguiente:

$$(x-b)^n f(x) = B_0 + B_1(x-b) + B_2(x-b)^2 + \cdots \quad x-b)^{n-2} + B_{n-1}(x-b)^{n-1} + \cdots \quad \cdots \qquad (8)$$

Si ahora hacemos $x = b$ en ambos lados de la ecuación (8) se obtiene que

$$(x-b)^n f(x)\Big]_{x=b} = \mathrm{B}_0 \qquad (9)$$

Esto significa que cubriendo el factor $(x-b)^n$ en la ecuación (6) y haciendo $x = b$ se obtiene el valor de B_0. Observe que esta operación es equivalente a la técnica de cubrimiento de Heaviside 3.2.

Para calcular el siguiente coeficiente derivamos la expresión (8) con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}\left[(x-b)^n f(x)\right] = \mathrm{B}_1 + 2\,\mathrm{B}_2(x-b) + \cdots \quad)\mathrm{B}_{n-2}(x-b)^{n-3} + (n-1)B_{n-1}(x-b)^{n-2}$$
$$+ \frac{nA_1(x-b)^{n-1}(x-a_1) - A_1(x-b)^n}{(x-a_1)} + \cdots \quad \frac{x-b)^{n-1} - A_1(x-b)^n(x-a_m)}{(x-a_1)} \qquad (10)$$

Observe que la parte derecha de la ecuación (10) está compuesta de términos que contienen el factor $(x - b)$, así que si hacemos $x = b$, se eliminan todos los términos excepto B_1. Así tenemos que:

$$\frac{d}{dx}\left[(x-b)^n f(x)\right]\Big|_{x=b} = B_1 \tag{11}$$

Esto es, para calcular el coeficiente B_1, cubrimos el factor $(x-b)^n$ en la expresión de $f(x)$, calculamos la derivada de la expresión que resulta y después hacemos $x = b$.

Si calculamos la derivada de la expresión (10) tendremos la segunda derivada de la expresión (8) y lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-b)^n f(x)\right] = 2B_2 + (2)(3)\,B_3(x-b) + \cdots \qquad)(n-1)\,B_{n-1}(x-b)^{n-3} + \\ + \left[\text{suma de términos con el factor } (x-b)\right]\end{aligned} \tag{12}$$

Si en la expresión (12) hacemos x = b se obtiene el factor B_2, de donde

$$B_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-b)^n f(x)\right]\Big|_{x=b}$$

Si continuamos derivando la expresión (8) i veces encontraremos que

$$B_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}\left[(x-b)^n f(x)\right]\Big|_{x=b} \tag{13}$$

Es decir para calcular el coeficiente B_i , cubrimos el factor $(x-b)^n$ en f(x), calculamos la i-ésima derivada de la expresión que resulta y después hacemos $x = b$ y dividimos por $i!$ para una discusión más completa ver (A., 2006) (https://www.utdallas.edu, s.f.) (Man & Leung, Teaching a New Method of Partial Fraction Decomposition to Senior Secondary Students: Results and Analysis from a Pilot Study, 2012)

3.3. Técnica sólo para factores lineales repetidos.

Supongamos que la función racional sólo contiene factores lineales repetidos de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-b)^n} \tag{14}$$

Entonces por la regla I y el caso 2 se tiene

$$f(x) = \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots \frac{B_{n-1}}{(x-b)^{n-1}} + \frac{B_n}{(x-b)^n} \tag{15}$$

Utilizando el anterior procedimiento llegamos a que los coeficientes están dados por, ver (A., 2006)

$$B_n = p(a), B_{n-1} = \frac{d}{dx} p(\mathrm{x})\Big|_{x=a}, \mathrm{B}_{n-2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} p(\mathrm{x})\Big|_{x=a}, \cdots \qquad \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k} p(\mathrm{x})\Big|_{x=a} \qquad (16)$$

Ejemplo 2. $F(x) = \dfrac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

Por la regla I y los casos 2 y 3 se tiene que la descomposición en fracciones es:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{B_0}{x^3} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} + \frac{A}{(2x-1)}$$

Utilizando la técnica 3.1 podemos calcular el coeficiente A, cubriendo ($2x$ – 1) en *f(x)/g(x)* y evaluando en ½.

$$A = \left.\frac{6x-1}{x^3}\right]_{x=1/2} = \frac{6(1/2)-1}{(1/2)^3} = 16$$

Calculamos ahora B_0 de acuerdo con la técnica 3.1, cubrimos x^3 en *f(x)/g(x),* evaluamos en $x = 0$ y tenemos

$$B_0 = \left.\frac{6x-1}{2x-1}\right]_{x=0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Para calcular B_1, de acuerdo con la técnica 3.2 cubrimos x^3 en *f(x)/g(x)* y calculamos la primera derivada del resto y evaluamos en $x = 0$ así

$$B_1 = \left.\frac{d}{dx}\frac{6x-1}{2x-1}\right]_{x=0} = \left.\frac{-4}{(2x-1)^2}\right]_{x=0} = -4$$

Por último, calculamos B_2, cubrimos x^3 en *f(x)/g(x)* y calculamos la segunda derivada del resto y evaluamos en $x = 0$ así

$$B_2 = \left.\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{6x-1}{2x-1}\right]\right]_{x=0} = \left.\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{32x-16}{(2x-1)^4}\right)\right]_{x=0} = -8$$

Por consiguiente, el resultado es

$$F(x) = \frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x} + \frac{16}{(2x-1)}$$

Ejemplo 3. Descomponer en fracciones parciales

$$F(x)=\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}$$

Solución: Por el caso 2 se tiene

$$F(x)=\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}=\frac{B_1}{(x+3)}+\frac{B_2}{(x+3)^2}+\frac{B_3}{(x+3)^3}$$

Por la técnica 3.3 tenemos que cubriendo $(x+3)^3$ se tiene que

$$B_3=5x^2+30x+43\Big]_{x=-3}=5(-3)^2+30(-3)+43=-2$$

$$B_2=\frac{d}{dx}5x^2+30x+43\Bigg]_{x=-3}=10x+30\Big]_{x=-3}=10(-3)+30=0$$

$$B_1=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(5x^2+30x+43)\Bigg]_{x=-3}=\frac{1}{2}10x\Bigg]_{x=-3}=\frac{1}{2}10=5$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$F(x)=\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}=\frac{5}{(x+3)}-\frac{2}{(x+3)^3}$$

3.4. Técnica para factores lineales y cuadráticos

Consideremos la función racional siguiente

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x^2+bx+c)(x-a)} \quad (17)$$

Donde x^2+bx+c es una cuadrática irreducible. Entonces por la regla I y II y los casos 1 y 3 se tiene la siguiente descomposición en fracciones parciales

$$\frac{f(x)}{(x^2+bx+c)(x-a)}=\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)}+\frac{C}{(x-a)} \quad (18)$$

Por la técnica 3.1 se puede encontrar el coeficiente C

$$C=\left.\frac{f(x)}{(x^2+bx+c)}\right|_{x=a}$$

Una vez conocido C lo restamos en la parte izquierda de la igualdad (18)

$$\frac{f(x)}{(x^2+bx+c)(x-a)}-\frac{C}{(x-a)}=\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)} \tag{19}$$

Simplificamos la diferencia de la parte izquierda de la ecuación (19)

$$\frac{f(x)-\mathrm{C}(x^2+bx+c)}{(x^2+bx+c)(x-a)}=\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)} \tag{20}$$

Ahora se da el caso de que $(x-a)$ es un factor del numerador y del denominador de la parte izquierda de la igualdad (20), por tanto, podemos suponer que $h(x)$ es el la función que resulta de dividir $f(x)-\mathrm{C}(x^2+bx+c)$ por $(x-a)$. De donde se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{h(x)}{(x^2+bx+c)(x-a)}=\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)} \tag{21}$$

A partir de la igualdad (20) podemos deducir que $h(x)=Ax+B$ de esta manera A y B pueden ser determinados por inspección para una discusión más completa consultar a Man (Man Y. K., 2011)

Ejemplo 4. Descomponer en fracciones parciales la siguiente fracción

$$F(x)=\frac{3x^2+2x-2}{(x+2)(x^2+x+4)}$$

De acuerdo con los casos 1 y 3 se tiene la siguiente suma de fracciones parciales

$$\frac{3x^2+2x-2}{(x+2)(x^2+x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+4)}$$

Con la técnica 3.1 obtenemos el valor del coeficiente A

$$A=\left.\frac{3x^2+2x-2}{(x^2+x+4)}\right|_{X=-2}=\frac{12-4-2}{4-2+4}=1$$

Por lo tanto, se tiene

$$\frac{3x^2+2x-2}{(x+2)(x^2+x+4)}=\frac{1}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

restamos la fracción con $(x+2)$ hacia la izquierda

$$\frac{3x^2+2x-2}{(x+2)(x^2+x+4)}-\frac{1}{x+2}=\frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

Simplificamos la parte izquierda

$$\frac{3x^2+2x-2-(x^2+x+4)}{(x+2)(x^2+x+4)}=\frac{2x^2+x-6}{(x+2)(x^2+x+4)}=\frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

De aquí se obtiene

$$\frac{2x^2+x-6}{(x+2)(x^2+x+4)}=\frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

El numerador de la división izquierda es divisible por (x + 2), por tanto, obtenemos

$$\frac{\cancel{(x+2)}(2x-3)}{\cancel{(x+2)}(x^2+x+4)}=\frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

De aquí deducimos que B = 2 y C = -3. Por lo tanto, se tiene el resultado final

$$\frac{3x^2+2x-2}{(x+2)(x^2+x+4)}=\frac{1}{x+2}+\frac{2x-3}{x^2+x+4}$$

3.5. El uso del límite para encontrar coeficientes.

Los estudiantes de cálculo aprenden a calcular límites cuando x tiende al infinito de expresiones racionales. Aprenden que el límite es igual a la razón cuando el grado del numerador es igual al del denominador, que el límite es igual a cero cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador y que el limite no existe en otro caso.

Es posible encontrar algunos de los coeficientes de una descomposición en fracciones parciales multiplicando por la variable x la fracción f(x)/g(x) y calcular el limite cuando $x\to\infty$ del resultado de la multiplicación (Joshi, 1983), (Wiener & Will, Calculus to algebra connections in partial fraction decomposition, 1994)

Ejemplo 5. Expresar $\dfrac{4x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x-3}$ en fracciones parciales.

Por los casos 1 3 se tiene

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{4x^2+\mathrm{x}+1}{(x-3)(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}$$

Por la regla 1 y 2 se tiene que la suma de fracciones parciales es

Por la técnica 3.1 y cubriendo (x – 3) calculamos A

$$A=\left[\frac{4x^2+\mathrm{x}+1}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)}\right]_{x=3}=\frac{4(3)^2+3+1}{(3^2+3+1)}=\frac{40}{13}\ .$$

Por tanto

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{40}{13(x-3)}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (22)$$

Multiplicando por x la última ecuación, tenemos

$$\frac{4x^3+x^2+x}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{40x}{13(x-3)}+\frac{Bx^2+Cx}{x^2+x+1}$$

Y tomando $\lim\limits_{x\to+\infty}$ a la igualdad anterior obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+x^2+x}{x^3-2x^2-2x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{40x}{13(x-3)}+\frac{Bx^2+Cx}{x^2+x+1}\right)$$

De donde $4=\frac{40}{13}+B$ y de obtenemos $B=\frac{12}{13}$

Así, remplazando B en (22) tenemos

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{40}{13(x-3)}+\frac{(12/13)\,x+C}{x^2+x+1} \qquad (23)$$

$$\frac{4x^3+x^2+x}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{40}{13(x-3)}+\frac{12x/13+C}{x^2+x+1}$$

Ahora, haciendo x=0 en la ecuación método clásico (23), se obtiene

$$-\frac{1}{3}=\frac{40}{-39}+C \text{ de donde } C=\frac{27}{39}$$

Finalmente remplazando C y simplificando tenemos el resultado

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{40}{13(x-3)}+\frac{36x+27}{39(x^2+x+1)}$$

Ejemplo 6. Descomponer en fracciones parciales $F(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+x+1)(x^2+2)}$

De acuerdo con el caso 3 de la sección 2 tenemos que la suma de fracciones parciales es

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2} \tag{24}$$

Multiplicamos por x ambos lados de la expresión (24) para que las fracciones de la derecha tengan el mismo grado y el de la izquierda el denominador el mismo grado que el denominador

$$\frac{x^4}{(x^2+x+1)(x^2+2)}=\frac{Ax^2+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2} \tag{25}$$

3.6. Técnica de cubrimiento de Heaviside mejorada para factores cuadráticos.

Esta técnica se debe Yiu-Kwong Man (Man Y. K., 2011) (Man Y.-K. , An Improved Heaviside Approach to Partial Fraction Expansion and its Applications, 2008) mejora la técnica de encubrimiento de Heaviside para manejar la descomposición de fracciones parciales a través de divisiones y sustituciones polinomiales solamente, sin necesidad de resolver las complejas raíces del polinomio cuadrático irreductible involucrado, o usar la diferenciación o resolver un sistema de ecuaciones lineales. El procedimiento se realiza de la siguiente manera:

1. Primero se encuentran los coeficientes

$$a_{i,ni}=\left.\frac{f(x)}{g(x)}(x-a_i)^{ni}\right]_{x=a_i}$$ Observe que esta es la técnica de Heaviside

2. Después se encuentran los siguientes coeficientes

$$a_{i,ni-j}=\left[\frac{f(x)}{g(x)}-\sum_{k=0}^{j=1}\frac{a_{i,ni-k}}{(x-a_i)^{ni-k}}\right](x-a_i)^{ni-j}\Big|_{x=a_i}$$

Esta técnica de encubrimiento primero se aplica para calcular las $a_{i.n}$. Luego, las fracciones parciales conocidas se restan de F (x) y se simplifican para convertirse en una nueva función. A continuación, se aplica la misma técnica para manejar las nuevas funciones obtenidas una y otra vez, hasta que se encuentren todos los coeficientes $a_{i,ni-j}$ desconocidos. Pero veamos la aplicación con dos ejemplos.

Ejemplo 6. Encontrar la descomposición en suma de fracciones parciales de

$$F(x)=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

Por la regla I y el caso 3 se tiene que la descomposición es

$$F(x)=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+2}$$

Calculemos (ax + b) utilizando la técnica 3.6., cubriendo (x^2+1) y haciendo x^2 = -1

$$ax+b=(x^2+1)F(x)\Big]_{x^2=-1}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)}\Bigg]_{x^2=-1}=\frac{-\cancel{x}-1+\cancel{x}+2}{-1+2}=\frac{1}{1}=1$$

Calculemos ahora (cx + d), cubriendo (x^2+2) y haciendo x^2 = -2

$$cx+d=(x^2+2)F(x)\Big]_{x^2=-2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)}\Bigg]_{x^2=-2}=\frac{-2x-2+x+2}{-2+1}=\frac{-x}{-1}=x$$

Por lo tanto

$$F(x)=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+2}$$

Ejemplo 7. Descomponer

$$F(x)=\frac{x^3+x+3}{(x^2+1)^2}$$

Solución: Por la regla II y el caso 4 se tiene

$$F(x)=\frac{x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{ax+b}{(x^2+1)}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}$$

Utilizando la técnica 3.6 encontremos ($cx + d$), primero cubrimos $(x+1)^2$ y hacemos $x^2 = -1$, así se tiene que

$$cx+d=(x+1)^2F(x)\Big]_{x^2=-1}=(x^2+1)^2\left(\frac{x^3+x+3}{(x^2+1)^2}\right)\Bigg]_{x^2=-1}=x^3+x+3\Big]_{x^2=-1}=x(-1)+x+3=3$$

De donde ($cx + d$) = 3. Ahora calculamos ($ax + b$). Cubrimos en $\left[F(x)-\frac{3}{(x^2+1)^2}\right]$ el factor $(x+1)$ y realizamos las siguientes operaciones

$$ax+b=(x^2+1)\left[F(x)-\frac{3}{(x^2+1)^2}\right]\Bigg]_{x^2=-1}=(x^2+1)\left(\frac{x^3+x+3}{(x^2+1)^2}--\frac{3}{(x^2+1)^2}\right)\Bigg]_{x^2=-1}=\frac{x^3+x}{(x^2+1)}\Bigg]_{x^2=-1}$$
$$=\frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)}\Bigg]_{x^2=-1}=x$$

De donde tenemos el resultado

$$F(x)=\frac{x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{(x^2+1)}+\frac{3}{(x^2+1)^2}$$

4. Conclusiones y recomendaciones.

Lo que se ha presentado es una descripción de un enfoque para tratar fracciones parciales que, al menos, parece más simple que el que se enseña en muchos libros de cálculo, utilizando elementos del cálculo como los límites y las derivadas, después de todo, este tema se trata en un curso de cálculo integral. En cada caso, se usa un ejemplo específico para ilustrar el principio general; esto no pretende ser una presentación exhaustiva de las técnicas, si se desea conocerlas más a fondo los remitimos a la bibliografía.

El método de Heaviside mejorado resulta ser un método práctico y menos tedioso para calcular los coeficientes en la descomposición en fracciones parciales de una fracción propia en el caso de raíces reales distintas, o de raíces cuadráticas irreducibles, o cuando el polinomio del denominador es una función de la forma $g(x) = (x - a)^n$. A los estudiantes con los que he trabajado estas técnicas les han resultado más fáciles que el método de los coeficientes indeterminados.

5. Bibliografía

A., M. A. (2006). Descomposición en fracciones parciales. *Scientia Et Technica, XII*(31), 259-264.

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics.* Wiley: Dover Publications.

Chrystal, G. (1961). *Textbook of Algebra* (Vol. part one). Dover Publications.

David, A. (2011). *Investigating Methods of Partial Fraction Decomposition.* Austin Texas: The University of Texas at Austin.

Dennis G. Zill, W. S. (2011). *Cálculo de una variable* (Cuarta ed.). Mc Graw Hill.

Edwin J. Purcell, D. V. (2007). *Cálculo* (Novena ed.). Pearson Educación.

H. Joseph Straight, R. D. (1984). An alternative method for funding the partial fraction desomposition of a rational function. *The American Mathematical Monthly, 91*(6), 365-367.

https://www.utdallas.edu. (s.f.). Recuperado el 03 de 10 de 2017, de https://www.utdallas.edu/~pkr021000/EE%203301%20Fall%2013/Partial%20Fractions.pdf

Huang, X. C. (1991). A shortcut in partial fractions. *The College Mathematics Journal, 22*, 413-415.

Joseph Wiener, W. W. (1193). Calculus to algebra connection in partial fraction decomposition. *The Amatyc Review, 15*(1), 28-31.

Joshi, P. T. (1983). Efficient techniques for partial fractions. *Two year College Mathematics Journal, 14*(2), 110-118.

Lethold, L. (1998). *Cálculo* (7 ed.). Oxford University Press.

Man, Y. K. (2011). On partial fraction decomposition of rational functions with irreducible quadratic factors in the denominators. *Proceedings of the World Congress on Enginnering.* London U. K.

Man, Y.-K. (2008). An Improved Heaviside Approach to Partial Fraction Expansion and its Applications. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, *II.* London, U.K.

Man, Y.-K., & Leung, A. (2012). Teaching a New Method of Partial Fraction Decomposition to Senior Secondary Students: Results and Analysis from a Pilot Study. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Martínez, A. (2006). descomposición en Fracciones Parciales. *Scientia Et Technica, 12*(31), 259-264.

Rose, D. A. (2007). Partial Fractions by Substitution . *The College Mathematics Journal, 38*(2), 145-147 .

Roy, R. (2011). The Cotes-Newton Factorization of x^n-1. *International Conference on Special Functions in the 21st Century: Theory and Applications.* Washington, D. C.

Schultz, P. (1983). An Algebraic Approach to Partial Fractions. *The Two-Year College Mathematics Journal, 14*(4), 346-348.

Smith, D. (1958). *History of Mathematics.* New York: Dover Publications.

Smith, R. T., & Minton, R. B. (2003). *Cálculo* (Segunda ed., Vol. 1). Mc Graw Hill.

Steward, J. (2010). *Cálculo de una Variable Conceptos y Contextos* (Cuarta ed.). Cengage.

Steward, J. (2012). *Calculus* (7 ed.). Cengage.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo de una variable* (12 ed.). Pearson Educación.

Tong, H. T. (1977). Fast Algorithms for Partial Fraction Decomposition. *SIAM Journal on Computing, 6*(3), 582-593. doi:https://doi.org/10.1137/0206042

Wiener, J. (1986). An Algebraic Approach to Partial Fractions . *The College Mathematics Journal, 17*(1), 71-72.

Wiener, J., & Will, W. (1994). Calculus to algebra connections in partial fraction decomposition. *The AMATYC Review, 15*(1-2), 28-31.