

La diferencial de una función de varias variables: una propuesta de enseñanza–aprendizaje.

María Eugenia Quintanar Pérez¹, Eric Ávila Vales², Herminio Blancarte Suárez³

1 Instituto Tecnológico de Querétaro, 2 Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Yucatán, 3 Facultad de Ingeniería Universidad Autónoma de Querétaro

mequintanar@hotmail.com, avila@uady.mx, herbs@uaq.mx

Autor de correspondencia: María Eugenia Quintanar Pérez

Resumen. De acuerdo a la experiencia personal, en los cursos impartidos de cálculo diferencial de varias variables, encontramos que la definición de la diferencial de una función en varias variables tiene dificultades intrínsecas para entenderse y asimilarse por parte de la mayoría de los estudiantes del curso de cálculo. Analizaremos varios aspectos de este problema de enseñanza–aprendizaje y consideraremos una propuesta de enseñanza, relacionada con la caracterización de la diferencial de una función escalar a través del llamado error lineal de aproximación y la extensión continua del cociente de dicho error lineal y el incremento del punto, a toda una vecindad del cero. Asimismo, el recurso del uso de calculadora en clase, para calcular valores de algunos ejemplos de funciones diferenciables escalares y su comparación con los valores aproximados proporcionados por sus respectivas diferenciales; consideramos que puede ser un recurso didáctico interesante, para abordar este problema de enseñanza–aprendizaje.

Palabras clave: Diferencial. Error lineal. Transformación Lineal.

Abstrac. According to personal experience, in the courses taught in differential calculus of several variables, we found that the definition of the differential of a function in several variables has intrinsic difficulties to be understood and assimilated by most of the students of the course of calculation. We will analyze various aspects of this teaching-learning problem and consider a teaching proposal, related to the characterization of the differential of a scalar function through the so-called linear error of approximation and the continuous extension of the quotient of said linear error and the increase of the period, a whole neighborhood of zero. Also, the resource of using a calculator in class, to calculate values of some examples of scalar differentiable functions and their comparison with the approximate values provided by their respective differentials; We consider that it can be an interesting didactic resource to tackle this teaching-learning problem.

Keywords: calculus of several variables, differential, scalar function, calculators.

1. Introducción

“La enseñanza del cálculo es un conflicto que ha permanecido durante más de dos mil años.” Richard Courant

Es este tenor, pretendemos que esta presentación, y por ende esta modesta propuesta de enseñanza, coadyuve a lograr ese consenso buscado por tantos años entre los participantes: profesores, estudiantes y usuarios de esta poderosa herramienta de las matemáticas continuas.

1.1. La diferencial de una función, como aproximación a los valores de una función.

Supondremos que la calculadora no dará “los valores reales” de una función escalar al ser evaluada en cada punto en cuestión, para una mayor discusión al respecto, véanse las referencias [Cody & Waite], [Muller]. Iniciamos pidiendo a los alumnos que realicen los siguientes cálculos en su calculadora.

a. $\cos 61^\circ = 0.48480962$

b. $\sqrt[3]{8.01} = 2.000832986$

Ahora, preguntamos a los alumnos si saben qué hizo su calculadora para obtener dichos cálculos y qué tan confiables pueden ser dichos resultados, i.e., ¿Podemos conocer el algoritmo empleado por la calculadora y la magnitud del error cometido al realizar dichos cálculos?

Así, a partir de estas dos preguntas iniciamos nuestra presentación, para tratar de dar respuestas a dichas cuestiones fundamentales.

Iniciemos analizando el siguiente dibujo

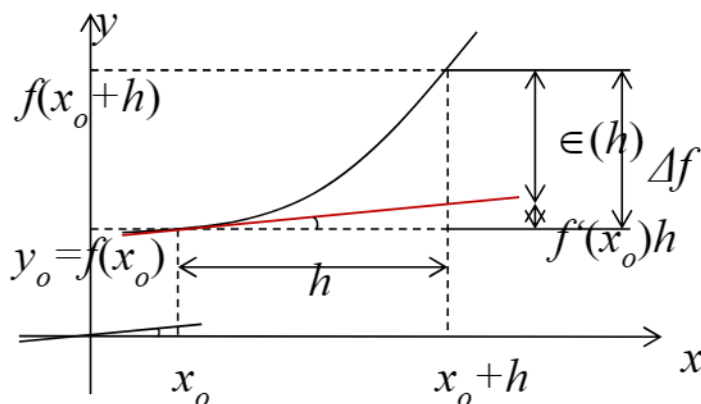


Figura 1. La recta tangente y la diferencial.

En el cual pretendemos representar geoméricamente el llamado incremento de una función $\Delta f := f(x_0 + h) - f(x_0)$ en un punto x_0 , donde $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable y dicho incremento lo representamos en términos de la derivada $f'(x_0)$, el incremento h del punto x_0 y el llamado error de aproximación que denotamos por $\epsilon(h)$. Así, la ecuación

$$\Delta f := f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \epsilon(h), \quad (1)$$

Resultará el objeto de estudio para nuestra presentación

2. Antecedentes

Consideremos una función $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b)$. Llamamos la *función derivada* que denotamos por $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a la función que cada punto $x \in (a, b)$ le asocia precisamente su derivada $f'(x)$ en el punto x . la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por $m := f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$, i.e. $y = f(x_0) + f'(x_0)h$ donde $h := x - x_0$. Llamaremos la *diferencial de la función* en el punto x_0 aplicada a h que denotaremos por $df_{x_0}(h)$, a la transformación lineal definida por

$$df_{x_0}(h) := f'(x_0)h. \quad (2)$$

Observemos que la gráfica de la diferencial es la recta paralela a la recta tangente que ha sido trasladada al origen, i.e., es la parte lineal de la recta tangente: recordemos que las gráficas de todas las transformaciones lineales no triviales de la recta en la recta son precisamente de esta forma, esto es, rectas que pasan por el origen en el plano. Así, la ecuación del incremento de la función se reescribe ahora como

$$\Delta f := df_{x_0}(h) + \epsilon(h), \quad (3)$$

O también como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \epsilon(h). \quad (4)$$

De esta manera, el error de aproximación se puede ver como

$$\epsilon(h) = \Delta f - df_{x_0}(h);$$

En palabras, diremos que “el error de aproximación respecto a un punto dado es el error cometido al aproximar el valor de la función por el valor de la diferencial en puntos alrededor del punto dado”. Como la notación $\epsilon(h)$ indica que en principio dicho error de aproximación sólo depende de h , diremos qué orden de magnitud de $\epsilon(h)$ es precisamente h y escribiremos

$$\epsilon(h) = o(h), \quad (5)$$

Posteriormente daremos una definición precisa de esta notación.

2.1. Ejemplos de las estimaciones de $\epsilon(h)$

Usando las fórmulas anteriores, justifiquemos los cálculos iniciales y los errores de aproximación de los ejemplos iniciales

1. Para $\cos 61^\circ$

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = 60^\circ, \quad h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.017453292, \quad f(60^\circ) = \cos 60^\circ = 0.5$$

$$\Rightarrow f(60^\circ + 1^\circ) = \cos 60^\circ - df_{60^\circ}\left(\frac{\pi}{180}\right) + \epsilon(0.017453292)$$

$$= 0.5 - \sin 60^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right) + \epsilon (0.017453292) = 0.484885005 + \epsilon (0.017453292), \text{ entonces}$$

$$\cos 61^\circ = 0.484885005 + \epsilon (0.017453292)$$

Y suponiendo que la calculadora da el resultado exacto, entonces hasta el orden de millonésimas

$$\epsilon (0.017453292) = 0.48480962 - 0.484885005 = -0.000075385$$

2. Para $\sqrt[3]{8.01}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8, \quad h = 0.01, \quad f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\Rightarrow f(8 + 0.01) = \sqrt[3]{8.01},$$

$$df_{x_0}(h) := f'(x_0)h = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(0.01) = 0.00083333,$$

$$\Rightarrow f(8 + 0.01) = \sqrt[3]{8.01} = 2 + 0.00083333 + \epsilon(h) = 2.00083333 + \epsilon(h);$$

entonces, si aproximamos hasta el orden de millonésimas

$$\epsilon(0.01) = 2.000832 - 2.000833 = -0.000001.$$

Así, nuestros errores absolutos de aproximación son de orden al menos de millonésimas. Mientras, por otro lado, sabemos que

$$\epsilon(0.017453292) = o(0.017453292) \text{ y } \epsilon(0.01) = o(0.01),$$

¿Quién tiene razón? Para eliminar esta ambigüedad, iniciamos con la definición de una función diferenciable en el punto x_0 . Véase [Spivak2]

Definición 1. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in (a, b)$ si existe una transformación lineal $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que se cumple el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{h} = 0$.

Observemos que la diferencial de la función debería ser un candidato natural que cumpla con el límite anterior de la definición. A continuación mostraremos que esto ocurre efectivamente si $\epsilon(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - df_{x_0}(h)$ tiende a cero cuando h tiende a cero, i.e., podemos definir a una función $R(h)$ precisamente como

$$R(h) := \begin{cases} \frac{\epsilon(h)}{h}, & \text{si } h \neq 0 \\ 0, & \text{si } h = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Entonces podemos caracterizar a las funciones diferenciables mediante la siguiente propiedad:

Una función $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $x_0 \in (a, b)$, si la función $R(h)$ es continua en $h = 0$, ya que si $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = R(0) = 0$, entonces

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-df_{x_0}(h)}{h} = 0$. En otras palabras, decimos que la función $f(x)$ es diferenciable en el punto x_0 si el error de aproximación $\epsilon(h)$ se va más pronto a cero que la propia h cuando ésta tiende a cero. Así, el comportamiento de $\epsilon(h)$ depende sólo de la propia h cuando está suficientemente cercano del cero. A dicho comportamiento de $\epsilon(h)$ se le conoce como “un comportamiento lineal de h ”. En términos, del cálculo de aproximación de los valores de una función a través de los valores de su diferencial, notemos que el error de aproximación cometido depende precisamente sólo de la cercanía de los puntos $x_0 + h$ a x_0 , i.e., depende qué tan cercana esté h del cero: $h \in (x_0 - c, x_0 + c)$ para un número $0 < c < 1$,

$$\begin{array}{ccc}
 \leftarrow & h & \rightarrow \\
 x_0 - c & x_0 & x_0 + c \\
 0 < |x_0 - h| < c
 \end{array}$$

Figura 2. Intervalo de linealización.

Así, cuanto más cercano esté h de x_0 , $\epsilon(h)$ será más pequeño.

El comportamiento anterior de $\epsilon(h)$, motiva la siguiente definición de orden de aproximación y diremos que, en general, dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$ son del mismo orden de aproximación hacia el cero y escribiremos

$$f(x) = O(g(x))$$

Es una vecindad de un punto x_0 , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

Intuitivamente, el límite anterior establece que ambas funciones tienden a cero conforme las $x \rightarrow x_0$, pero que la $f(x)$ del numerador le gana a la $g(x)$ del denominador y llega más pronto al cero. Así, a manera de ejemplo de la notación anterior,

$$\epsilon(h) = o(h)$$

En una vecindad del 0, puesto que efectivamente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0,$$

Como se mostró anteriormente. De hecho, es el primer ejemplo relevante de este tipo de comportamientos.

2.2. Eliminando ambigüedades

Volviendo a nuestros cálculos iniciales, podemos decir para los ejemplos que aseguramos que

1. $\epsilon(0.017453292) = o(0.017453292)$, i.e., aceptando previamente un error de una centésima al menos, podemos aproximar el $\cos 61^\circ$ por el valor arrojando por su diferencial df_{60° .
2. $\epsilon(0.01) = o(0.01)$, i.e., también aceptando previamente un error de una centésima al menos, podemos aproximar el $\sqrt[3]{8.01}$ por el valor arrojando por su diferencial df_8 .

Notemos que si precisamente en ambos ejemplos de un error menor que una centésima, este algoritmo no sirve, es decir, el error lineal no es suficiente y podemos intuir que errores de menor magnitud, cuadráticos, cúbicos, etc., serían necesarios para estos casos. Observemos que un error de orden cuadrático en este caso es del orden $\epsilon(h^2) = \epsilon(0.0001)$, o un error de orden cúbico $\epsilon(h^3) = \epsilon(0.000001)$. Tal parece que los valores arrojados por la calculadora tienen un error de este tipo, pero cuando hablamos de errores de aproximación lineal sólo podemos asegurar hasta el orden de una centésima para estos ejemplos.

2.3. Consecuencias y conclusiones

Este comportamiento lineal de $\epsilon(h)$ tiene varias consecuencias.

1. Proporciona “un algoritmo para evaluar una función diferenciable en una variable” al aproximar los valores de ésta en torno de un punto. Con la condición de que los valores de dicha función y su derivada sean conocidos

o sean relativamente fáciles de calcular en dicho punto y cuya limitante es precisamente la cercanía de estos valores al punto dado. Intuitivamente la condición anterior es de esperarse, conforme se aleja uno del punto de tangencia los valores de la gráfica de la función se alejan de la recta tangente.

2. La diferencial de la función en este sentido, es la mejor aproximación lineal que se puede obtener de los valores de la función en cada punto, i.e., localmente.
3. La caracterización de la diferenciabilidad de una función a través de “la extensión de la continuidad de la función $R(h)$ en $0 < |h| < c$ hasta $h = 0$ ”, i.e., “la extensión continua de $R(h)$ a toda la vecindad $(-c, c)$ ”.
4. Hemos dado un sentido y significado preciso a las llamadas diferenciales df ; de hecho, podemos hablar de reglas de operatividad de las mismas: sumar o restar diferenciales ahora tiene sentido y un significado preciso. Un ejemplo, cuando aparecen las sumas de Riemann de una función diferenciable: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, el paso al límite cuando $n \rightarrow \infty$ en el caso de particiones uniformes, nos proporciona precisamente su integral $\int_a^b f(x) dx$. Cuando los valores de la función $f(x)$ se han reemplazado por los valores de su diferencial df_x en el sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, obtenemos el método de aproximación conocido como la regla del trapecio o método de Simpson para el cálculo numérico de dicha integral que consiste esencialmente en la suma finita de las áreas de los trapecios obtenidos. Véase las referencias [Courant & John], [Spivak 1] para mayor información.

3. La diferencial en dos variables

Ahora intentaremos generalizar los argumentos anteriores para funciones de dos variables.

Iniciamos con la gráfica de la función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un abierto del plano y su gráfica $\Gamma(f) = \{(x, y, z): x = f(x, y)\} = S$ es una superficies contenida en \mathbb{R}^3 . Esto es, la curva que describía la gráfica en el caso unidimensional se transforma ahora en una superficie que representa la gráfica de la función en el caso bidimensional.

3.1. La recta tangente se convierte en el plano tangente

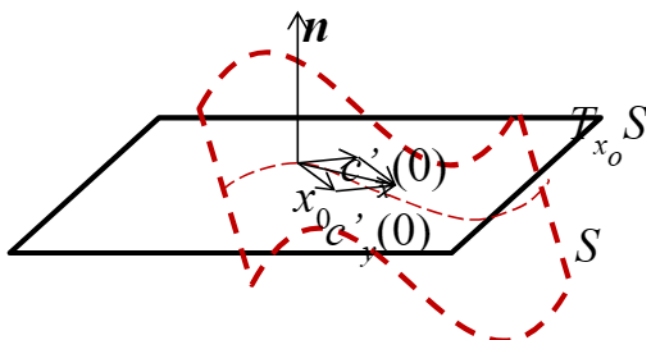


Figura 3. El plano tangente sobre una superficie.

Consideremos la superficie S como la gráfica de una función $f(x, y) = z$ en \mathbb{R}^3 y un punto sobre dicha superficie $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Consideremos ahora una curva sobre dicha superficie S y adaptada al punto P_0 . Esto es, una curva parametrizada por longitud de arco s , y **derivable** respecto de s , i.e., $c: (-\delta, \delta) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ donde $c(s) := (x(s), y(s), z(s)) := (x_0 + s, y_0 + s, f(x_0 + s, y_0 + s))$ tal que $c(0) = P_0$ y $c'(s) := (x'(s), y'(s), z'(s))$ es visto como un vector tangente anclado en propio P_0 , donde $' := \frac{d}{ds}$. El plano tangente a S en P_0 , que denotaremos por $T_{P_0}S$, se define como “el plano generado por todos los vectores tangentes a las curvas definidas sobre S , parametrizadas y derivables por la longitud de arco s y que pasan por el punto P_0 ”. Esto es

$$T_{P_0}S := \langle \{c(0): \text{donde } c(s) \text{ es una curva con las características anteriores}\} \rangle$$

Es decir, es el subespacio generado por los vectores tangentes en P_0 de las curvas parametrizadas y derivables respecto de s y definidas sobre la superficie S , que pasan por P_0 . Como casi todas las definiciones en matemáticas suelen ser poco operativas, ésta desgraciadamente, no es la excepción; no obstante, las siguientes observaciones nos permitirán encontrar una caracterización en coordenadas cartesianas del plano tangente muy sencilla.

3.2.1. Observaciones

1. Como $\dim_{\mathbb{R}} T_{P_0}S = 2$, basta considerar dos vectores tangentes en P_0 linealmente independientes para que generen a $T_{P_0}S$.

- Consideremos las trazas de las curvas c_x y c_y que resultan de las intersecciones de las superficies S (la gráfica de $f(x, y) = z$) con los planos $x = x_0$ e $y = y_0$, y que pasen por P_0 , respectivamente. Observe que este caso c_x y c_y están definidas en el intervalo $(-\delta, \delta)$ y $c_x(s) := (x_0 + s, y_0, f(x_0 + s, y_0))$ y $c_y(s) := (x_0, y_0 + s, f(x_0, y_0 + s))$ donde $x(s) := x_0 + s$ y $y(s) := y_0 + s$, respectivamente. Entonces, $\dot{c}_x(0) := (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $\dot{c}_y(0) := (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Así, $\dot{c}_x(0) := \left(1, 0, \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\right)$ y $\dot{c}_y(0) := \left(0, 1, \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)$.
- Entonces los vectores tangentes, respectivamente, vienen dados por $\dot{c}_x(0) := \left(1, 0, \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\right)$ y $\dot{c}_y(0) := \left(0, 1, \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)$ los cuales son perpendiculares y, por tanto, generadores de $T_{P_0}S$.
- Entonces el normal \mathbf{n} en P_0 , viene dado por $\mathbf{n}(P_0) := \left(-\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), -\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), 1\right)$.
- Así, hemos encontrado una caracterización cartesiana de $T_{P_0}S$

$$\begin{aligned} T_{P_0}S &= \left\{ (x, y, z) : z \right. \\ &= f(x_0, y_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y - y_0) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

3.2. La diferencial de una función escalar de dos variables

Iniciemos con la definición adaptada para este caso: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un abierto y $(x_0, y_0) \in U$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existe una transformación lineal $T_{(x_0, y_0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que se cumple el

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - T_{(x_0, y_0)}\left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (8)$$

En analogía con el caso unidimensional, un candidato natural de la transformación lineal anterior debería ser precisamente el plano tangente $T_{P_0}S$, en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$. O mejor dicho, su traslación al origen, i.e.,

$$T_{(x_0, y_0)} := \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right), \quad (9)$$

Observemos entonces que la ecuación cartesiana del plano tangente se puede reescribir como el lugar geométrico de los puntos (x, y, z) que cumplen con la ecuación:

$$z = f(x_0, y_0) - T_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Donde $x - x_0 = h$ y $y - y_0 = k$. Así, la diferencia

$$f(x_0, y_0) - z := \epsilon(h, k), \quad (11)$$

Representa el error de aproximación que ocurre cuando intentamos aproximar los valores de los puntos $(x_0 + h, y_0 + k)$ de la función $f(x, y)$ por los correspondientes del plano $T_{(x_0, y_0)}S$.

Y surge la pregunta: ¿qué orden de aproximación tiene la función $\epsilon(h, k)$? Antes de intentar resolver la pregunta veamos algunos ejemplos.

3.2.1. Ejemplos

Al igual que en el caso de la recta tangente en un punto de la gráfica de la función, podemos hacer algunos ejemplos de cálculos de valores aproximados de funciones para analizar cómo y con qué orden de aproximación en plano tangente aproxima los valores de la función en los puntos cercanos a P_0 .

1. $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2}$ y estime el error $\in (0.01, 0.02)$. En este caso, consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (4, 3)$, $(h, k) = (0.01, 0.02)$. La ecuación cartesiana del plano tangente $T_{(x_0, y_0)}S$, arroja el valor de $z = f(x_0, y_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)h - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)k = 5 - \frac{4}{5}(0.01) - \frac{3}{5}(0.02) = 4.986$. Mientras que la calculadora arroja para $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2} = 4.996$.
2. $(0.99)^3 + (2.01)^3$ y estime el error $\in (-0.01, 0.01)$. En este caso, consideremos la función $f(x, y) = x^3 + y^3$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(h, k) = (-0.01, 0.01)$. La ecuación cartesiana del plano tangente $T_{(x_0, y_0)}S$, arroja el valor de $z = f(x_0, y_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)h - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)k = 9 -$

$3(1)^2(-0.01) - 3(2)^2(0.01) = 9 + 0.03 - 0.12 = 8.91$. Mientras que la calculadora arroja para $(0.99)^3 + (2.01)^3 = 9.0909$.

3. Una hipótesis adicional debe ser mencionada y es la referente a lo suficientemente lisa que debe ser la superficie, para que siempre podamos hablar del plano tangente en cualquier punto de ésta. Por ejemplo, en el vértice de un cono no es posible definir de manera unívoca el plano tangente. A saber, consideremos la gráfica del semicono superior recto con vértice en el origen, la cual viene dada por la gráfica de la función escalar cartesiana $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \alpha\sqrt{x^2 + y^2} = z$, con una constante $\alpha := \sin \theta$, donde θ es el ángulo de magnitud constante que se forma entre el eje de simetría ZZ' y la generatriz del cono; pero en este caso, efectivamente la ecuación cartesiana del plano tangente en el origen $(0,0)$ no está determinado unívocamente debido a que las derivadas parciales en el origen no existen: $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha|h|}{h} = \pm\alpha$. Similarmente $\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \pm\alpha$.

3.2.2. Estimación del error de aproximación $\in (h, k)$ para el caso bidimensional

A continuación, en analogía con el caso unidimensional, reemplazaremos la transformación lineal de la definición por la proporcionada por el plano tangente $T_{P_0}S$ y estimaremos el error de aproximación $\in (h, k)$.

Iniciamos reemplazando la transformación lineal exigida en la definición por la ecuación del plano tangente, trasladado al origen que en los sucesivos llamaremos la diferencial de la función aplicada en el punto (x_0, y_0) y que denotaremos por $df_{(x_0, y_0)}$ i.e.

$$df_{(x_0, y_0)} \left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right) = T_{(x_0, y_0)} \left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right) := \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right) \left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right),$$

En la definición y obtenemos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - T_{(x_0, y_0)} \left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)h - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+h) - z}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Ahora, para que el límite de la definición se haga cero, es necesario que este último límite se haga cero. Esto es, que la función $R: B_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$R(h, k) := \begin{cases} \frac{\epsilon(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}}, & \text{si } (h, k) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (h, k) = (0, 0) \end{cases}, \quad (12)$$

Sea continua en $(0, 0)$, i.e.,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R(h, k) = R(0, 0) = 0, \quad (13)$$

O bien, que la función $R(h, k)$ se extienda continuamente de la bola agujerada $B_\delta(x_0, y_0)/\{0, 0\}$ a toda la bola $B_\delta(0, 0)$. Así, podemos caracterizar la diferenciabilidad de una función en términos del error de aproximación como: dada la función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde U es abierto y $(x_0, y_0) \in U$, si la función

$$R(h, k) := \begin{cases} \frac{\epsilon(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}}, & \text{si } (h, k) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (h, k) = (0, 0) \end{cases}$$

Es continua en $(0, 0)$, entonces $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) .

Como en el caso unidimensional, analicemos el significado del orden de magnitud de dicho error de aproximación $\epsilon(h, k)$. Como $\sqrt{h^2+k^2} := \|(h, k)\|$,

En términos de las “o” diremos que la Ec. (12) implica que $\epsilon(h, k) = o(\|(h, k)\|)$,

Esto es, “ $\epsilon(h, k)$ es de orden lineal respecto de la norma de vector (h, k) ”. Estimemos los ejemplos anteriores, a través de esta última propiedad para $\epsilon(h, k)$

$$1. \quad \epsilon(0.01, 0.02) = o\left(\sqrt{(0.01)^2 + (0.02)^2}\right) = o(\sqrt{0.0005}) \cong o(0.023).$$

Entonces la aproximación de $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2} \cong 4.986$ lograda a

través de su diferencial es aceptada hasta un error de al menos dos centésimas.

2. $\in (-0.01, 0.01) = o\left(\sqrt{(-0.01)^2 + (0.02)^2}\right) = o(\sqrt{0.0002}) \cong o(0.014142)$, implica que la aproximación a través de su diferencial de $(0.99)^3 + (2.01)^3 \cong 8.91$ es aceptada con un error de al menos dos centésimas.

3.3. Consecuencias y conclusiones

Como en el caso unidimensional, el comportamiento lineal de $\in (h, k)$ tiene varias consecuencias.

1. Proporciona “un algoritmo para evaluar una función diferenciable en dos variables” al aproximar los valores de ésta en torno de un punto (x_0, y_0) . Con la condición de que los valores de dicha función y sus derivadas parciales sean conocidos o sean relativamente fáciles de calcular en dicho punto y cuya limitante es precisamente la cercanía de estos valores al punto dado. Intuitivamente la condición anterior es de esperarse, conforme se aleja uno del punto de tangencia, los valores sobre la superficie (la gráfica de la función) se alejan del plano tangente.
2. La diferencial de la función en este sentido, es la mejor aproximación lineal que se puede obtener de los valores de la función en cada punto, i.e., localmente.
3. La caracterización de la diferenciabilidad de una función a través de “la extensión de la continuidad de la función $R(h, k)$ en $B_\delta(x_0, y_0)/\{0,0\}$ hasta incluir el origen $(0,0)$ ”, i.e., “la extensión continua de función $R(h, k)$ a toda la bola $B_\delta(0,0)$ ”.
4. La generalización a tres o más dimensiones de esta caracterización es plausible, se la dejamos de tarea al lector.

4. Agradecimientos

Este trabajo se realizó de manera conjunta durante la estancia sabática del Dr. Blancarte e la Facultad de Matemáticas (FMAT) de la UADY en 2009 con el apoyo de CONACyT bajo el programa “Estancias Posdoctorales y Sabáticas Vinculadas al Fortalecimiento de la Calidad del Posgrado Nacional” convocatoria 2008, convenio No. 290537-UADY. Asimismo, este coautor agradece la hospitalidad y voluntad brindadas por parte de las autoridades, personal académico y administrativo de la FMAT de la UADY, durante dicha estancia. Las ilustraciones fueron realizadas por Héctor Baños. Finalmente

agradecemos al árbitro, los comentarios y sugerencias vertidas que esperamos haber logrado para mejorar la presentación final de este trabajo. Los errores persistentes son responsabilidad de los autores.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[Budak & Fomin] Budak, B. M. & Fomin, S. V. *Field Theory and Series an Advanced Course in Higher Mathematics*, Edit. Mir Moscú.

[Cody & Waite] Cody, W. J. & Waite, W. *Software Manual for the Elementary Functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1980.

[Courant & John] Courant, R. & John Fritz, *Introduction to Calculus and Analysis*. Volume One, Interscience Publisher, US, 1965.

[Courant & John] Courant, R. & John Fritz, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Volumen Dos, Limusa, México, 1979.

[Courant & Robbins] Courant, R. & Herbert Robbins, *¿Qué es la matemática?* Editorial Aguilar, Quinta edición, segunda reimpresión, España, 1979.

[Guillermín & Pollack] Guillermín V. & Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc. USA 1974.

[Kolmogorov & Fomin] Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Edit. Mir Moscú, 1975.

[Ostberg & Perkins] Ostberg, D. L. & Perkins F. W. *An Introduction to Linear Analysis*. Addison-Wesley, World Student Series. US 1966.

[Rankin] Rankin, W. *Newton para principiantes*. Traducción Paula Grossman y Roberto Curto. Editorial Era Naciente. Editorial original Icon Books Ltd, UK 1993. Buenos Aires, Argentina 1975.

[Spivak1] Spivak, M. *Calculus, Cálculo Infinitesimal*. Reverté S. A. Segunda edición, México 1993.

[Spivak2] Spivak, M. *Cálculo en variedades*. Reverté S. A. España 1975.

[Marsden & Tromba] Marsden, J. & E. Tromba, A. J. Cálculo Vectorial. Addison Wesley Iberoamericana S. A., tercera edición, 1991.

[Muller] Muller, J. M. Elementary Functions, Algorithms and Implementations. Birhauser, Boston, 1997.

[Schey] Schey, H. M. Div, Grad, Curl and all That. An Informal Text on Vector Calculus. W. W. Norton & Company. N. Y. US 1972.