El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados

Laurent Vivier

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Diderot

FRANCIA

Autor de correspondencia: Laurent Vivier

Resumen. Actualmente en Francia, no se enseñan los números reales en secundaria ni en preparatoria. Sin embargo, los números reales constituyen la base del cálculo. En este artículo, estudiamos la posibilidad de una enseñanza de los números reales a partir de los desarrollos decimales ilimitados.

Pero no basta tener una escritura semiótica de tipo numérico para tener un número: es necesario poder efectuar las operaciones usuales (suma, diferencia, producto y cociente). Nuestra propuesta se apoya sobre una construcción innovadora del campo de los racionales sólo a partir del registro de los desarrollos decimales ilimitados periódicos. Esta restricción a los racionales permite evitar las dificultades atadas a las operaciones sobre los números reales y, al mismo tiempo, tenemos un campo numérico suficientemente consistente. En efecto, problemas importantes se colocan en el marco de los racionales como la famosa igualdad 0.999...=1 que discutiremos a partir de nuestras búsquedas.

Un test ha sido propuesto en Francia a cuatro clases de *seconde* (preparatoria 1) y una clase de primer año de universidad. Presentamos los resultados de este test que se enfocó sobre la

El Cálculo y su Enseñanza.© septiembre 2011- septiembre 2012, Año 3.Vol.3 No. 1. Cinvestav, México D.F. P.p.129-170.

comparación y la suma de dos desarrollos decimales ilimitados periódicos.

Palabras clave: número racional; desarrollos decimales; operaciones; registro de representación.

Abstrac: Currently in France, actual numbers are not taught in middle school or high school. However, the real numbers form the basis of the calculation. In this article, we study the possibility of teaching real numbers from unlimited decimal developments.

But having a numerical semiotic writing is not enough to have a number: it is necessary to be able to carry out the usual operations (sum, difference, product and quotient). Our proposal is based on an innovative construction of the field of rationals only from the registration of the periodic unlimited decimal developments. This restriction to rationals allows us to avoid the difficulties associated with operations on real numbers and, at the same time, we have a sufficiently consistent numerical field. Indeed, important problems are placed in the framework of rationals such as the famous equality 0.999 ... = 1 that we will discuss from our searches.

A test has been proposed in France to four classes of seconde (preparatory 1) and a class of first year of university. We present the results of this test that focused on the comparison and the sum of two periodic unlimited decimal developments.

Keywords: rational number; decimal developments; operations; representation register.

Currently in France, actual numbers are not taught in middle school or high school. However, the real numbers form the basis of the calculation. In this article, we study the possibility of teaching real numbers from unlimited decimal developments.

But having a numerical semiotic writing is not enough to have a number: it is necessary to be able to carry out the usual operations (sum, difference, product and quotient). Our proposal is based on an innovative construction of the field of rationals only from the registration of the periodic unlimited decimal developments. This restriction to rationals allows us to avoid the difficulties associated with operations on real numbers and, at the same time, we have a sufficiently consistent numerical field. Indeed, important problems are placed in the framework of rationals such as the famous equality 0.999 ... = 1 that we will discuss from our searches.

A test has been proposed in France to four classes of seconde (preparatory 1) and a class of first year of university. We present the results of this test that focused on the comparison and the sum of two periodic unlimited decimal developments.

Keywords: rational number; decimal developments; operations; representation register.

1. Introducción

El objetivo principal de este estudio es el número real en la enseñanza francesa hasta el principio de la universidad. Los números reales constituyen la base del análisis y, desde este punto de vista, son esenciales pues el análisis es un dominio introducido en el *lycée* o preparatoria (ver anexo 3 para una presentación del sistema educativo francés).

Sin embargo, no se debe pensar que sea necesario definir el conjunto **R** antes de entrar en el análisis. En efecto, como dice Margolinas (1988), si se toma un punto de vista axiomático, es necesario que **R** sea definido antes de entrar en el análisis, claro que si se toma un punto de vista histórico, entonces el conjunto **R** es el resultado del trabajo matemático. Sin embargo, no se puede excluir que un conocimiento de los números reales sea necesario para entender el análisis. Isabelle Bloch, en su tesis, precisa :

> « On peut penser qu'une connaissance insuffisante des nombres réels pourrait être un obstacle à l'enseignement de l'analyse ; cependant, bien que ce soit probablement exact, l'option prise par l'enseignement actuel est de ne pas consacrer de temps ni d'activités spécifiques à l'apprentissage de la notion de nombre réel, même à l'université. » (Bloch, 2000, página 117)

Queda la pregunta crucial de saber cuáles son *los conocimientos suficientes para la enseñanza en preparatoria*. Es una pregunta difícil y solamente vamos a intentar de hacer del "número real" un objeto efectivo de la enseñanza en preparatoria. En esta perspectiva, utilizamos los desarrollos decimales ilimitados que han sido eliminados poco a poco de la enseñanza francesa desde la reforma de 1970.

Empezaremos por exponer, rápidamente, la posición de los números reales en la enseñanza en Francia desde el comienzo del siglo XX. Esto permitirá precisar los objetivos generales del estudio. Seguidamente, presentaremos los marcos teóricos y precisaremos el punto de vista que vamos a desarrollar en este artículo. En la sección 3, expondremos los resultados experimentales de un estudio que se realizón en clase de preparatoria 1 y también en primer año de universidad. Por último, en una cuarta sección, regresaremos sobre ciertas discusiones y especialmente sobre la igualdad entre 1 y 0.999….

2. Ámbito del estudio

2.1 Los números reales en la enseñanza francesa desde hace un siglo

En sus trabajos, Bronner (2005), ha estudiado la evolución de la enseñanza de los números reales en Francia desde hace 150 años. Analiza las diferentes reformas del sistema educativo y distingue cinco períodos durante el siglo XX. Los exponemos rápidamente.

- El primer período, de 1854 a 1947, se apoya esencialmente sobre los *Elementos* de Euclides, la medida de los dimensiones con una distinción entre los números fraccionarios e inconmensurables, especialmente por medio de la raíz cuadrada.
- Después de un período de desestabilización donde la medida de las dimensiones fue suplantada poco a poco por una construcción más algébrica de los números, empieza el período de las “matemáticas modernas”, de 1968 a 1977. En este último período había una fuerte presencia de la teoría de los conjuntos. En la clase de *quatrième* (secundaria 2) los números reales son introducidos por las sucesiones de decimales ilimitados. Los problemas sobre las operaciones de **R** son precisados en el programa de 1971: “sin evocar delante de los alumnos las dificultades teóricas considerables”.
- En el período de cierre, de 1977 a 1996, y en el período *actual*, de 1996 a 2005, los intentos de definición numérica de los

> números reales han desaparecido y ha aparecido la recta geométrica como soporte teórico del conjunto **R**.

Sin embargo, en este último período (1996-2005), subsiste una reorganización de los conocimientos sobre los números (*synthèse sur les nombres*) en las clases de *troisième* y de *seconde* (secundaria 3 y preparatoria 1). Esta reorganización de los conocimientos sobre los números de estos niveles, antes de los últimos cambios de programa de 2008-2009, se enfocaba sobre una oposición entre racionales e irracionales. Durante las dos o tres horas atribuidas a la reorganización de los conocimientos sobre los números, se labraba la noción de número racional, tanto con las fracciones como con la escritura decimal ilimitada. Ciertas pruebas de irracionalidad eran propuestas como la demostración usual de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos (esta demostración era mencionada en el programa de preparatoria 1 como un tema de estudio). En una perspectiva de extensión de los conjuntos de números, se introducía las notaciones de los diferentes conjuntos de números para determinar la naturaleza de los números – pero, de hecho, el trabajo era esencialmente un trabajo sobre las escrituras semióticas.

Sin embargo, la reorganización de los conocimientos sobre los números no alcanzaba sus fines (Vivier, 2008). La reorganización de los conocimientos que era propuesta en los anteriores programas era reducida a menudo a una clasificación de los números con una utilización formal de las notaciones de los conjuntos de números. Sin embargo, un punto importante era abordado y permitía de entrever la noción de número real por la unificación, implícito, de todos los números conocidos por una única codificación constituida por la escritura decimal[1]. Aunque de un débil alcance, un trabajo sobre las escrituras decimales ilimitadas era propuesto, en particular, con

[1] Unos libros de textos proponían algunos números irracionales en escritura decimal como el número 0.123456789101112131415161718192021… propuesto por Champernowne.

conversiones entre los registros de las escrituras decimales y fraccionaria para los racionales.

En los nuevos programas con fecha de 2009, no hay ninguna reorganización de los conocimientos sobre los números. Las escrituras decimales ilimitadas no son mencionadas en los textos oficiales. Más precisamente:

- en clase de *troisième* (secundaria 3), se lee en el programa (página 36) : "dominar los números racionales" pero, de hecho, el programa restringe el estudio a los fracciones;
- en clase de *seconde* (preparatoria 1), las palabras "racional" y "irracional" están ausentes del programa. El conocimiento de los diferentes tipos de números se practica en la resolución de problemas, sin decir nada más.

Actualmente, no se dispone de ningún registro numérico para representar los números reales lo que constituye una ruptura con los otros tipos de números. Los números reales aparecen únicamente como las abscisas de los puntos de la recta geométrica. Varias objeciones a formular son las siguientes:

- Castela (1996) afirma que aunque la recta permite una intuición global, esta intuición no aporta nada sobre los puntos (pues sobre los números también). Pero son los puntos que definen los números reales.
- Tall (1978) señala la débil precisión de la recta numérica cuando se necesita una precisión absoluta para los números – precisión absoluta que se tiene con los desarrollos decimales ilimitados por ejemplo.
- Por último, desde un punto de vista teórico, no hay ninguna diferencia entre **Q**, **R** y todos los campos intermediarios pues no se dispone del axioma de completez (Gonseth, 1926). Este axioma da a la recta una estructura de espacio topológico completo.

Ciertamente, la recta es una ostensiva importante para las representaciones gráficas y especialmente para representar los intervalos. Los intervalos son objetos esenciales del análisis, pero hace falta precisar: los intervalos de **R**. Muchos teoremas del análisis son falsos si no se considera los intervalos de **R** y hemos precisado que la recta geométrica, sin topología, no es suficiente para conseguir a **R**.

No queremos eliminar la recta geométrica como representación de **R**. Pero esto no es suficiente para una verdadera enseñanza de los números reales.

2.2 Ámbito teórico

El marco del estudio ha sido iniciado en Vivier (2008). Consiste en una articulación entre los marcos de Chevallard y de Duval. Esta articulación permite conectar el trabajo matemático desarrollado en dos registros diferentes como lo propone igualmente Pluvinage (2005) para los tratamientos en dos registros numéricos.

Chevallard (1999) organiza el trabajo matemático en *praxeologías*. Para efectuar un *tipo de tareas*, debe disponerse de *técnicas*; estas técnicas son justificadas y producidas por una *tecnología*; las tecnologías son ellas mismas producidas y justificadas por una *teoría*. Tipos de tareas y técnicas forman el bloque del saber-hacer, o *praxis*, y tecnologías y teorías forman el bloque de los saberes, o *logos*. Por ejemplo, hacer la suma de dos enteros es un tipo de tareas. Se dispone de técnicas para efectuar este tipo de tareas como el algoritmo usual de la suma. Esta técnica es justificada por la numeración de posición que constituye una tecnología. Esta última es justificada por la aritmética elemental que constituye una teoría.

Duval (1995, 2006) parte del principio que la actividad matemática es esencialmente semiótica y organiza los signos en registros de representación. Distingue dos tipos de transformaciones semióticas: un *tratamiento* que es una transformación interna a un solo registro y una *conversión* que es una transformación de una representación de un registro en un otro registro. Duval insiste particularmente en la diferencia cognoscitiva entre los tratamientos y las conversiones.

Para utilizar simultáneamente estos dos aspectos, se precisa el registro utilizado en los tipos de tareas. En efecto, no es igual hacer la suma de dos enteros según que los números enteros son: representados por fichas que pueden manipularse, codificados en base diez, codificados en base diferente a diez, u otro. Según el registro R del tipo de tareas, puede disponerse de técnicas internas al registro R, es decir un tratamiento de R. Y gracias al marco de Chevallard, se puede interpretar igualmente las conversiones como *técnicas de conversión*. No detallaremos aquí esta articulación y referimos a Nikolantonakis & Vivier (2010) para una exposición más precisa.

Chevallard (1989) define un sistema de números como un conjunto de objetos que puede compararse, sumarse y multiplicarse con las propiedades usuales. Son preguntas naturales para hablar de número. Pero falta un aspecto semiótico. En particular, si un sistema de números es introducido por un registro semiótico es necesario poder hacer las operaciones de base en este registro. Reinterpretamos eso de la manera siguiente: para efectuar un tipo de tareas relativo a un registro R, parece natural que tengamos una técnica propia al registro R. Si no, en el registro semiótico R no se podría efectuar algunos tratamientos y serían los objetos del segundo registro que deberían ser llamados “números”[2].

2.3 Enfoque del problema

[2] Tomemos por ejemplo la construcción de Lebesgue (1934) que introduce los números reales por las abscisas de los puntos de una recta geométrica. Lebesgue define bien un nuevo registro de representación que es prácticamente el de los desarrollos decimales ilimitados. Pero las operaciones de bases son definidas en el marco geométrico únicamente. Así, se define números que son, en primer lugar, los puntos afines de la recta.

Después de la identificación de un vacío didáctico institucional en la enseñanza de los números reales, Bronner (2005) propone un medio para el aprendizaje de los números reales al final de la secundaria. Toma un punto de vista numérico apoyándose sobre la raíz cuadrada, los números decimales y el cálculo aproximado para llegar a los números *idecimales* (neologismo introducido por Bronner para denominar un número que se escribe con un número infinito de cifras). Aunque la distinción decimal/idecimal propuesta por Bronner sea mucho más natural para los alumnos que la clásica oposición racional/irracional, el neologismo "idecimal" será poco empleado en este artículo. En una perspectiva semiótica, se hablará de Desarrollo Decimal Ilimitado, o DDI, para señalar una codificación que es válida para todos los números reales.

Los desarrollos decimales ilimitados, o DDI, permiten conseguir todos los números reales. Además, por una extensión simple del orden del conjunto **D** de los números decimales puede definirse los intervalos requeridos para el análisis. Únicamente subsiste una dificultad referente a los números decimales pues admiten dos escrituras diferentes (por ejemplo 3.81=3.80999…).

A continuación de Bronner, pensamos que sea posible, y también deseable, que los números reales sean introducidos en la enseñanza, al final de la secundaria o al inicio de la preparatoria, por los DDI antes de entrar en el análisis. Además, el punto de vista de Bronner permite un trabajo esencial sobre los valores aproximados y un primer trabajo sobre la noción de infinito. Sin embargo, parece que hace falta el carácter objeto de estos nuevos números. Pues para que estas nuevas escrituras numéricas sean números se necesita un poco más que únicamente poder compararlas y tener una relación con los valores aproximados[3].

[3] Se puede también preguntar: ¿estos "valores aproximados" son aproximación de qué objetos?

Así, si se quiere introducir nuevos números por los DDI, es necesario definir en paralelo y en este registro de los DDI las operaciones elementales. Ahora, referente a los DDI, sabemos proceder sólo a las comparaciones. Pero, las operaciones son demasiado delicadas a definir en el marco general para los estudiantes de preparatoria. Para eso, nos restringimos a los DDI periódicos, es decir los racionales. Esta restricción puede parecer importante pero problemas importantes en relación con los DDI aparecen en el marco limitado de los Desarrollos Decimales Ilimitados Periódicos (DDIP).

3. Posibilidad de una enseñanza en preparatoria 1 y en la universidad

3.1 El test

La investigación se propuso estudiar una posibilidad de una enseñanza de las operaciones de base, restringida pues a la suma y a la comparación, sobre las escrituras decimales ilimitadas periódicas. El nivel elegido es la clase de *seconde* (preparatoria 1). Para completar el estudio, un test ha sido propuesto igualmente al final del primer año de universidad (ver sección 3.5).

Para no aumentar inútilmente la dificultad, los números tienen períodos que siguen inmediatamente el punto decimal. Los alumnos no tenían calculadora, para no orientar los procedimientos, ni borrador, todo debía ser escrito sobre las fichas distribuidas (había para eso muchos espacios blancos). La palabra “racional” no aparece, la relación entre las escrituras periódicas y las fracciones tampoco, pues son inútiles para esta investigación. El test ha sido propuesto en dos versiones según la manera de escribir una sucesión ilimitada periódica de cifras y la convención de escritura era notificada al inicio de cada página:

- Para el test A:

NOTIFICACIÓN DE LA CONVENCIÓN

En el número 0.*aaa*…, la cifra *a* está repetida una infinidad de veces. Por ejemplo $\frac{1}{3}$ = 0.333….

Se escribe igualmente 0.272727… para significar que 27 está repetida una infinidad de veces.

- Por el test B:

NOTIFICACIÓN DE LA CONVENCIÓN

Se acordó escribir $0.\boxed{a}$ el número 0.*aaaaa*… donde la cifra *a* está repetida una infinidad de veces. Por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.\boxed{3}$.

Se escribe igualmente $0.\boxed{27}$ para significar que 27 está repetido a la derecha del punto decimal una infinidad de veces (es decir 0.27 27 27 27…).

Además que no se permitió que entre alumnos vecinos se copiaran, la idea de proporcionar dos test distintos era para estudiar el impacto que puede tener el período según una escritura de tipo proceso (test A) o de tipo objeto (test B). Ha sido elegida una escritura con el período en un cuadro[4] y no con una barra por encima que se utiliza tradicionalmente. El cuadro muestra más claramente el período y los alumnos no han encontrado nunca la escritura con la barra (además, los alumnos no se indisponen con la escritura usando el cuadro). En cambio, la escritura con los puntos ha sido encontrada sin duda en secundaria para números como $\frac{1}{3}$ (es porque reutilizamos este ejemplo).

[4] Este notación esta cercana de la notación *a*.*b*(*c*) utilizada en la investigación de Weller, Arnon y Dubinsky (2009) – se puede comparar, por ejemplo, 8.5(21), $8.5\boxed{21}$ y el usual $8.5\overline{21}$.

La tabla 1 muestra los ítems del test:

	Test A	**Test B**	**Características**
Ítem 1	*Diagnóstico sobre las sumas de fracciones y decimales*		
Ítem 2	0.222…+0.555…	$0.\boxed{4}+0.\boxed{2}$	suma sin acarreo
Ítem 3	0.888…+0.777…	$0.\boxed{5} + 0.\boxed{7}$	suma con acarreo
Ítem 4	*Comparaciones (ver sección 3.4)*		
Ítem 5ª	0.686868…+0.545454…	$0.\boxed{76}+0.\boxed{58}$	con algoritmo; suma con acarreo
Ítem 5b	0.777…+0.888 …	$0.\boxed{7} + 0.\boxed{5}$	con algoritmo; suma con acarreo
Ítem 5c	0.555…+0.222 …	$0.\boxed{2}+0.\boxed{4}$	con algoritmo; suma sin acarreo

Tabla 1: los ítems del test

Los ítems 2 y 3 son preguntas de opción múltiple donde las respuestas posibles para el ítem 3 del test B, (las respuestas del ítem 2 y del test A fueron elaboradas sobre el mismo modelo) son las siguientes:

0.12 ; $0.\boxed{12}$; 0.57 ; $0.\boxed{57}$; 1.2 ; $1.\boxed{2}$; 1.3 ; $1.\boxed{3}$; Otro ; No se puede efectuar este cálculo

Los ítems 5a, 5b y 5c nos dan información sobre la comprensión y utilización de un algoritmo de suma sobre de las escrituras periódicas (ver siguiente sección, procedimiento 3) para estudiar la ergonomía del método. Había también la variación de dos variables didácticas: el largo de los períodos, al ítem 5b, y la ausencia de acarreo, al ítem 5c. Es de notar que los ítems b y c proponen el mismo cálculo, en otro orden, que aquéllos propuestos en los ítems 2 y 3. Esto permite observar las eventuales vueltas hacia atrás para cambiar de respuestas.

Una pregunta de justificación del método estaba al final del test.

La duración prevista fue de 30 minutos, pero 20 minutos fueron suficientes en las 4 clases. Los extractos que exponemos en este artículo vienen de estas 4 clases de *seconde* (preparatoria 1), llamadas A, B, C y D, y también de un grupo de primer año de universidad, llamado U (un estudiante es llamado por una letra y un número).

3.2 Praxis sobre la suma de dos DDIP

En esta sección, nos interesamos en los procedimientos al alcance de un alumno de *seconde* para hacer la suma de dos DDIP.

Procedimiento 1

Hoy día, un solo procedimiento es verdaderamente posible. Consiste en truncar los números tomando valores aproximados, efectuar la suma de estos números decimales e inducir el resultado. Eventualmente efectuar varias sumas con muchos períodos antes de dar el resultado. Tomemos un ejemplo del test propuesto (ítem 3 del test B): para hacer $0.\overline{5}+0.\overline{7}$ puede calcularse sucesivamente 0.55+0.77=1.32 ; 0.5555+0.7777=1.3332 etc. esto es utilizando una técnica de conversión en el registro decimal finito. Pues, para hacer la suma, utilizan todas las aproximaciones disponibles, y de esta manera concluyen (ver A11 en figura 1 para un procedimiento cercano).

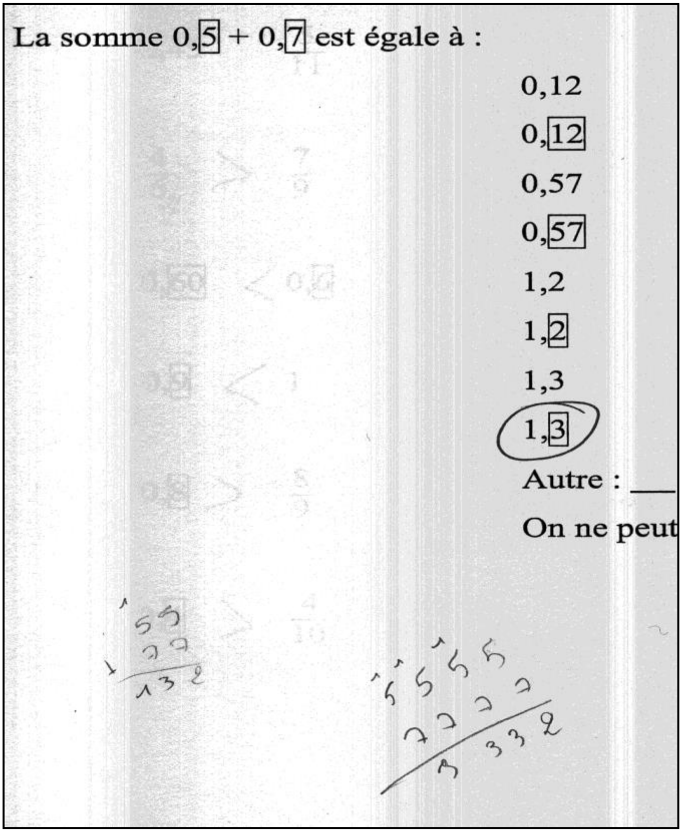
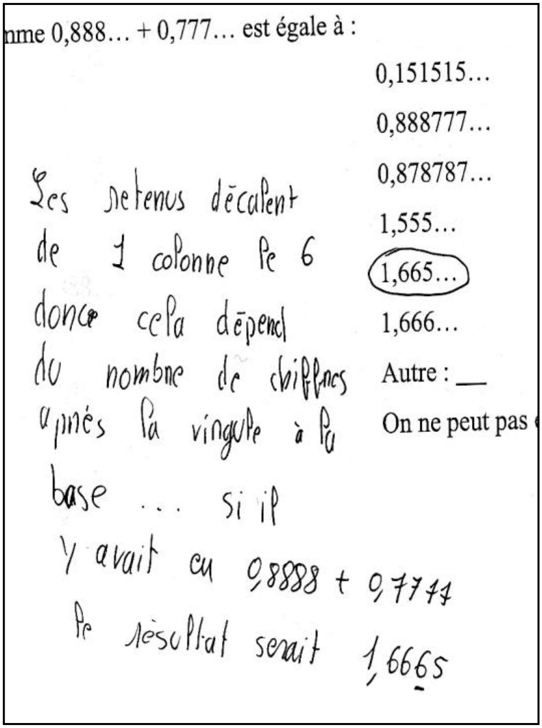


Figura 1: utilización correcta de la aproximación por A11; considera el período como un entero (55 y 77 o 5555 y 7777 pues se puede tomar varios períodos) para sumar.

Este procedimiento es complejo pues recurre a numerosas tecnologías que no son necesariamente explícitas tal: la suma es continua, para justificar las conversiones con los valores aproximados, y la suma de dos DDIP es un DDIP. En particular, si una falta de tecnología aparece, es posible no conseguir un período (ver B17 y U10 en figuras 2 y 3) y es posible conseguir las respuestas siguientes: 1.333…2 o 1.333…32 o también $1.\overline{3}2$ (ver U13 en anexo 1) aunque no fueron propuestas dentro de las elecciones para la clase de preparatoria 1 (ver sección 4).



B17
Los acarreos desplazan de 1 columna el 6 pues eso depende del número de cifras después del punto decimal al inicio… si hubiera habido 0.8888+0.7777 *el resultado sería* 1.6665

[Hay una contradicción pues escribe 1.6665 y elige la respuesta 1.6665…
La raya debajo del 6 señala que no hay ningún período. Entonces, elige la respuesta la más plausible para él.]

Figura 2: utilización por B17 de la aproximación sin conocer que el resultado es periódico.

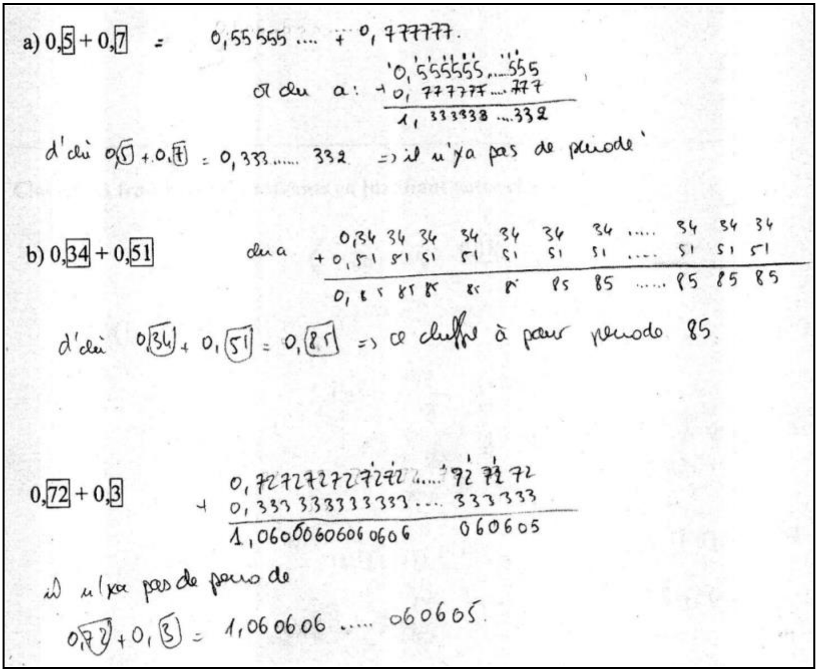


Figura 3: U10 no sabe que el resultado presenta necesariamente un período (“no hay un período”).

Procedimiento 2

Con los anteriores programas de *seconde*, era también posible hacer una conversión en el registro fraccionario y de hacer la suma en el registro fraccionario. Tomemos el ejemplo del test. Para efectuar $0.\overline{5} + 0.\overline{7}$ se puede:

1. convertir cada número por una técnica de conversión del registro de los DDIP en el registro fraccionario $0.\overline{5}$ = 5/9 y $0.\overline{7}$ = 7/9;

2. efectuar la suma en el registro de las fracciones 5/9 + 7/9 = 12/9 ;

3. eventualmente convertir de nuevo en el registro de los DDIP dividiendo 12 por 9 para conseguir $1.\overline{3}$.

Este procedimiento se apoya sobre las conversiones entre los registros fraccionario y de los DDIP y utiliza el hecho que se sabe efectuar la suma de dos racionales en el registro fraccionario pero no en el registro de los DDIP. Este procedimiento no ha sido observado, ni entre los 113 alumnos de *seconde* (preparatoria 1) ni entre los 14 estudiantes de primer año de universidad (en cambio, aparece a menudo con los estudiantes-profesores de 5 año de universidad, trabajo en curso).

Procedimiento 3

Para definir el algoritmo, hemos expuesto un ejemplo. Éste ha sido propuesto a los alumnos de preparatoria 1 para efectuar la suma $0.\overline{27} + 0.\overline{90}$ (escrito 0.272727... + 0.909090... en el test A) y para efectuar la suma $0.\overline{81} + 0.\overline{46}$ (escrito 0.$\boxed{81}$ + 0.$\boxed{46}$ en el test B) los algoritmos siguientes:

Test A

	2	7
+	9	0
1	1	7
+		1
	1	8

	8	1
+	4	6
1	2	7
+		1
	2	8

Pues: 0.272727... + 0.909090... = 1.181818...

Test B

Pues: $0.\boxed{81} + 0.\boxed{46} = 1.\boxed{28}$

El algoritmo es bastante simple, suficientemente simple para los 14 estudiantes de universidad quienes entendieron bien el algoritmo (ver anexo 2 para la presentación del algoritmo a los estudiantes de universidad) y para estudiantes profesores quienes fueron capaces de construir un algoritmo de suma sin indicación (Vivier, trabajo en curso). Hay muchas adaptaciones para las sumas en el marco general de dos DDIP, pero son simples. Este algoritmo y el de las otras operaciones proceden de trabajos de investigación en colaboración con Benoît Rittaud. Proponemos una nueva construcción del campo cuerpo **Q** y algoritmos para las 4 operaciones de base[5] con los DDIP (Rittaud & Vivier, 2011).

Con la teoría APOE (ver por ejemplo Dubinsky (1991), Dubinsky & McDonald, (2001), y Dubinsky, Weller, Michael, Mc Donald & Brown, (2005a)) describamos rápidamente los diferentes procedimientos que hemos mencionado para efectuar una suma de dos DDIP. Eso da una jerarquización de los tres procedimientos según los dos criterios siguientes: una concepción objeto o proceso del número y el desarrollo de las praxis sobre el registro de los DDIP.

- El procedimiento 1, por la aproximación, se apoya sobre una concepción del número que es de tipo proceso, y no desarrolla una nueva praxis en el registro de los DDIP, en particular

[5] La diferencia se hace sobre el mismo modelo que la suma. En cambio, la división y sobre todo la multiplicación son más delicadas.

porque no hay criterio de fin (siempre puede tomarse más periodos).

- El procedimiento 2 de los anteriores programas toma el número en su concepción objeto pero no desarrolla una nueva praxis en el registro de los DDIP.
- El procedimiento 3 toma el número en su concepción objeto y desarrolla una praxis sobre los DDIP.

Notemos igualmente un cuarto procedimiento. Como lo describe Tall (1978), es posible de estudiar los DDIP por las series geométricas para efectuar una conversión en el registro fraccionario. Ciertamente, este procedimiento no está al alcance de un alumno de preparatoria 1. Pero aunque este punto no es enseñado en Francia en primer año de universidad, eso hace parte de los programas del liceo (preparatoria). Así, esperábamos la utilización de series geométricas, mismo de manera rudimentaria, por los estudiantes de primer año de universidad. Pero no hubo ninguna serie geométrica. Parece haber una desconexión entre los números y las sucesiones.

Este último procedimiento es complejo pues se apoya sobre la relación entre un proceso, dado por la serie, y un objeto, el límite. Hay además una conversión necesaria de un DDIP en una serie. Este procedimiento puede permitir desarrollar una praxis sobre los DDIP (puede justificar el procedimiento 3) pero arriesga de enmascarar un algoritmo simple como éste propuesto.

3.3 Resultados para la suma

Los resultados del diagnóstico son buenos. Queda algunos errores profundos tal la concepción de un número decimal como dos números enteros separados por el punto decimal. Para la suma de dos números escritos en dos registros diferentes hay más problemas. (84% de éxito para 4.52 + 0.497 y 66% de éxito para $3.4 + \frac{2}{9}$).

En el ítem 2, sin que nos haya causado sorpresa, los resultados son muy buenos (81% de éxito) pues no hay adaptación respecto al registro usual de los decimales. Las dificultades empiezan por el ítem 3. El éxito es sólo del 29% con el 21% de alumnos quienes rectifican su respuesta después del trabajo con el algoritmo, es decir el 8% de éxito en primera intención.

Para los ítems del 5, alrededor de la mitad de los alumnos lo logran perfectamente; el 50% de los alumnos logran el ítem 5a y asimismo el 72% si no se exige que el período sea marcado (es decir con un cuadro o con los puntos según el test). Hay pues un aumento del 8% de éxito al ítem 3 al 50% de éxito al ítem 5a. Desde este punto de vista, dado que esta el primer encuentro con este tipo de tareas, los objetivos son alcanzados. Parecería posible de considerar una enseñanza de la suma de dos DDIP desde la clase de preparatoria 1.

Sin embargo, eso es a moderar. Una caída de éxito (ver tabla 2) aparece de 5a a 5b y 5c, sobre todo si no tiene en cuenta el período (así se cuantifica la buena utilización de la práctica del algoritmo de la suma de los períodos). Esto se explica de dos maneras: es fácil localizar los errores en 5b que se hallan esencialmente en la práctica del algoritmo. Más allá de las adaptaciones necesarias, puede pensarse que la diferencia viene del hecho de que para 5a el algoritmo es directamente visible cuando para 5b y 5c el algoritmo se encuentra sobre otra página. Para 5c, el cálculo es más simple, pero hay el 12% de alumnos quienes llevan un acarreo imaginario. Esto parece similar a los errores de los alumnos de la escuela primaria cuando aprenden el algoritmo de la suma de dos enteros.

	Ítem 5a	**Ítem 5b**	**Ítem 5c**
Éxitos globales	50%	46%	49%
Éxitos sin tener en cuenta el período	72%	58%	68%

Tabla 2: éxito a los ítems 5a, 5b y 5c

Además, hay sólo aproximadamente el 12% de justificaciones aceptables. Estas justificaciones son muy rudimentarias y se limitan a menudo a una evocación de acarreos. Así, no se puede excluir una práctica a ciegas de un algoritmo para una parte de los alumnos.

3.4 Diferencias entre los dos test

Miremos las diferencias entre los dos test referente a la suma ahora. Sobre el diagnóstico, los resultados enseñan una pequeña diferencia: los alumnos del test A logran las sumas un poco más que aquéllos del test B. Se nota (ver tabla 3):

- un mejor éxito en el ítem 3, mismo sin contar las rectificaciones, para A;
- errores de concatenación propia al test B;
- alrededor de dos veces más de errores en relación con el punto decimal en el ítem 3 (es decir, sin pasar un acarreo de la parte decimal a la parte entera) para B que para A.

El empleo de los puntos (test A) parece ser más propicio a la entrada en este tipo de tareas de suma de dos DDIP.

Para la escritura del período, se nota:

- un mejor éxito en el ítem 5a, sin contar el período, para B;
- un mejor éxito global en el ítem 5a, contando el período, para A.

Esto constituye una inversión de las tasas de éxito. Parece que marcar el período en el resultado de la suma es más fácil para los alumnos del test A – esto puede explicar la inversión de los éxitos para el ítem 5a según que se cuenta o no el período. Esta inversión no se reproduce para los ítems 5b y 5c, pero la caída de éxito para el test B es de alrededor del 20% para 5a y 5b y del 30% para 5c cuando es siempre inferior al 10% para el test A. Podría pensarse que la utilización en el algoritmo del período es más fácil para los alumnos del test B pues es más visible, pero parece que sea aproximadamente equivalente entre los dos test. Así, puede pensarse que la escritura con los puntos sea igualmente más propicia para una buena utilización del sistema semiótico.

Por fin, hay dos veces más de justificaciones adecuadas para el test A que para el test B. Así, parece que la escritura con los puntos sea igualmente más propicia a la comprensión del método.

	Test A…	**Test $\boxed{B}$**
Éxito global en el ítem 3	36%	23%
Éxito en el ítem 3 sin rectificación	12%	5%
Error de concatenación en el ítem 3 (0.$\boxed{5}$+0.$\boxed{7}$=0.$\boxed{57}$)	0%	9%
Error atado al punto decimal en el ítem 3 (0.$\boxed{5}$+0.$\boxed{7}$=0.$\boxed{12}$)	25%	47%
Éxito global en el ítem 5a	57%	44%
Éxito en el ítem 5a sin contar el período	68%	75%
Éxito global en el ítem 5b	57%	35%
Éxito en el ítem 5b sin contar el período	63%	54%
Éxito global en el ítem 5c	61%	35%
Éxito en el ítem 5c sin contar el período	71%	65%
Justificaciones adecuadas del algoritmo	16%	8%

Tabla 3: éxitos a los ítems del test A y del test B

Ciertamente, el hecho de que el empleo de los puntos sea más propicio que la pequeña *caja* donde se encierra el período no es una sorpresa. Aunque el período es más visible en el test B, evidentemente los alumnos están más acostumbrados a la escritura con los puntos; ya la han encontrado sin duda. Por otro lado, la significación de la *caja* es definido por los puntos.

3.5 Resultados sobre la comparación

Globalmente, para la comparación, los resultados no son buenos, también para los diagnósticos (ver las primeras dos líneas de la tabla 4). Insistimos en el hecho que todos los números son simples. Se nota poco conversiones entre los dos registros de los racionales. Específicamente, solo 5 alumnos utilizan, y a menudo con errores, una técnica de conversión del registro fraccionario hacia el registro de los DDIP – sin embargo, es una técnica que permite proceder todas las comparaciones propuestas.

Para la comparación de dos DDIP, hay una diferencia natural entre los dos test (el 79% para A y el 39% para B). La buena tasa de éxito al test A es explicada por el hecho que la aplicación directa de la técnica sobre los decimales da el buen resultado. La débil tasa para el test B muestra que la noción de período como un objeto no es evidente en comparación con una percepción proceso, poniendo de los puntos para significar la repetición.

Sin embargo, el test B parece mostrar que sea igual de comparar dos DDIP (con la necesidad de comprender el funcionamiento del período para una adaptación de la técnica de comparación de dos decimales) y de comparar dos fracciones simples (la diferencia entre las frecuencias 47% y 39% no son significativos para la población considerada).

	Test A…	Test $\boxed{\text{B}}$	A y B
un decimal y una fracción	$\frac{7}{11}$ y 0.63 : 34%	0.45 y $\frac{5}{11}$: 40%	37%
dos fracciones	$\frac{8}{9}$ y $\frac{5}{6}$: 50%	$\frac{4}{6}$ y $\frac{7}{9}$: 47%	49%
dos DDIP	0.888… y 0.808080… : 79%	$0.\boxed{60}$ y $0.\boxed{6}$: 39%	
una fracción y un DDIP	$\frac{4}{9}$ y 0.444… : 36%	$0.\boxed{8}$ y $\frac{8}{9}$: 18%	27%
una fracción decimal y un DDIP	$\frac{7}{10}$ y 0.777… : 54%	$0.\boxed{4}$ y $\frac{4}{10}$: 47%	50%

Tabla 4: éxitos por la comparación

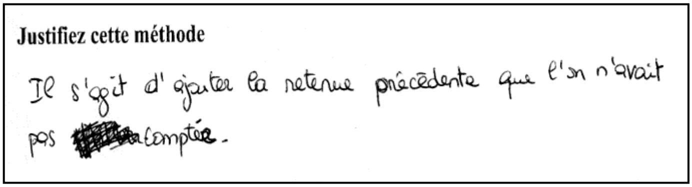
Para las comparaciones, parece que se necesita trabajar sobre las técnicas de conversiones entre los dos registros de los racionales como se hacía en los anteriores programas.

3.6 Conclusión sobre una posible enseñanza

Empecemos por dar rápidamente los resultados del test propuesto a los estudiantes de primer año universitario para la suma (ver anexo 2).

Los 14 estudiantes acabaron casi todas las sumas propuestas[6], sin el algoritmo. Utilizaron toda una técnica de aproximación. El período se colocó dentro del cuadro y los estudiantes lo escribieron con los puntos (una conversión de un período-objeto en un período-proceso).

Diez estudiantes dan los buenos resultados a las 4 sumas que siguen el algoritmo. Los otros tienen entre uno y dos cálculos falsos – hay dos estudiantes quienes llevan un acarreo sistemático al 3c. Seis estudiantes dan buenas justificaciones para el nuevo algoritmo; algunas de éstas son muy buenas como por ejemplo la siguiente:


Justifiez cette méthode

Il s'agit d'ajouter la retenue précédente que l'on n'avait pas comptée.

U9: *Se necesita de añadir el acarreo*

Figura 4: justificación de U9

Se ve aquí la importancia de tener una experiencia en matemáticas – son estudiantes que estudiaron específicamente las matemáticas desde la clase de preparatoria 2 – y también de tener tecnologías disponibles para controlar mejor las técnicas de aproximación.

Hace falta tener como objetivo una concepción objeto del período, pero, como es señalado en la teoría APOE, es necesario pasar por una concepción proceso. Así, parece que al comienzo de la preparatoria se necesita trabajar todavía con una concepción proceso del período. Eso tiene de las repercusiones sobre el registro semiótico a utilizar. Se puede así pensar que las clases con la opción matematica[7]

[6] Encontramos aproximadamente las mismas tasas de éxitos que Tall (1980). Enumera a 14 estudiantes sobre 36 que concluyen a la igualdad, con 2 estudiantes quienes no se pronuncian, o casi el 40%. Para el test presente la tasa de éxito es del 50%. Pero cierto, estas muestras no son representativas.

[7] En Francia, no hay un programa específico por la clase de *seconde* (preparatoria 1) – en particular no hay nunca opción matemática.

(preparatoria 2 y más aparentemente preparatoria 3) sean más propicios a la introducción del registro de escritura de los racionales con el período-objeto.

Desde el punto de vista de la ergonomía del algoritmo, una gran mayoría de alumnos de *seconde* y de estudiantes de universidad han preferido escribirla en una sola vez, cuando nosotros lo hemos propuesto en dos etapas: hacer la suma de los períodos, pues escribir el resultado haciendo la suma de las partes no periódicas con el eventual acarreo. En particular, U9, cuando rectifica sus cálculos con su comprensión del algoritmo, utiliza una astuta pequeña flecha (ver figura 5).

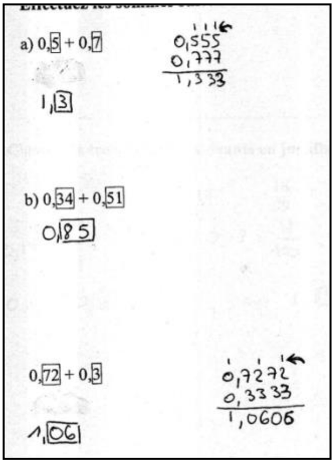


Figura 5: modificación del algoritmo por U9

Así, en Rittaud & Vivier, (2011), proponemos un algoritmo en una sola operación puesta, más cerca de la idea que los alumnos y estudiantes tienen de los algoritmos de sumas.

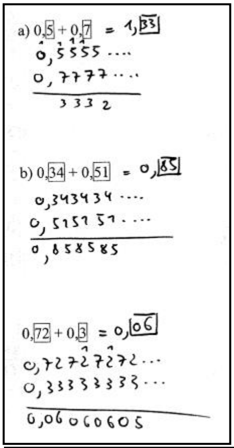
4. Discusión *infinitesimal*

4.1 El problema de las respuestas *infinitesimales* en la teoría APOE

Se nota una diferencia con el test de Margolinas (1988): Margolinas dejaba a los alumnos buscar las respuestas cuando el test de este estudio para la clase de *seconde* proponía una lista de respuestas. La siguiente respuesta, que Margolinas llama respuesta *infinitesimal*, aparece en el 15% de los casos para el test de Margolinas (no puede verse en nuestro test pues no quería presentar una escritura semiótica errónea):

$$1.\overline{4} + 3.\overline{7} = 5.\overline{2}1$$

Es un hecho que los alumnos tienen un punto de vista de tipo “cálculo aproximado”. Esta posición se encuentra en muchas producciones y especialmente en la pregunta de justificación. Margolinas no dice nada de los procedimientos utilizados por el 15% que utilizan esta escritura, pero 3 alumnos la utilizan en el test dado al final del primer año de universidad. En muchas producciones de estudiantes, se ve aparecer claramente una estrategia de búsqueda de la suma por aproximaciones (ver B17 y U10 en figuras 2 y 3 encima, U4 y U6 en figura 6 más abajo y U13 en anexo 1). Pero, para B17 (figura 2), U10 (figura 3) y U13 (anexo 1), esta aproximación no es controlada por las tecnologías. Por ejemplo, U13 ha dado una respuesta *infinitesimal*, quizás modificada después del empleo del algoritmo.



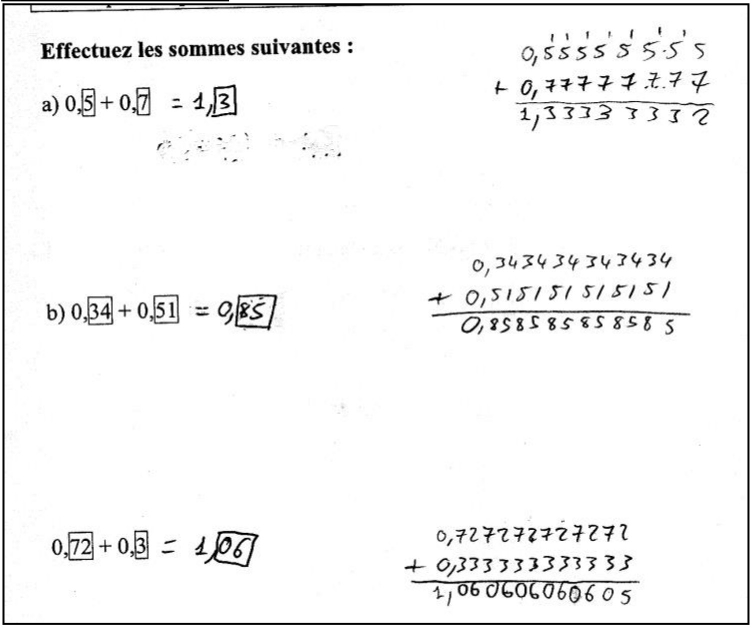


Figura 6: Utilización correcta de la aproximación, U4 (a izquierda) y U6 (a derecha)

La teoría APOE permite afinar la comprensión del fenómeno. Hemos discutido ya en la sección 3.6 de los aspectos proceso y objeto para los períodos. Para los DDIP también muchos alumnos están en un estadio proceso cuando es necesario constituir el número como un objeto – en particular para las bases del análisis. Entonces, no es una sorpresa de ver las escrituras siguientes: 5.221 luego 5.2221 luego 5.22221 para escribir por fin 5.22…1 o 5.22…21 (ver U10 en figura 3). La enseñanza en Francia toma esencialmente apoyo sobre los valores aproximados lo que favorece una percepción de los DDIP como un proceso y no como un objeto. La escritura $5.\overline{2}1$ es del mismo tipo pues, aunque el período aparece como un objeto, el “1” del proceso subsiste y se puede pensar que el proceso domine en la concepción del número.

4.2 Los desequilibrios

Margolinas da algunos elementos para desequilibrar la concepción en relación con esta escritura *infinitesimal*. Pero precisa que, sin control, estas proposiciones arriesgan de no alcanzar sus fines. La lista de los posibles desequilibrios de la escritura *infinitesimal* que sigue no es exhaustiva y nos restringimos a $0.\overline{9} = 1$ que enfoca todos los problemas. Las dos proposiciones más famosas son sin duda las sucesivas que se encuentran en particular en Tall (1978), Margolinas (1988), Richman (1999) y en ciertos libros de textos de preparatoria, con algunas variaciones:

1. $\frac{1}{3}=0.\overline{3}$ pues $3\times\frac{1}{3}=3\times0.\overline{3}$ y por fin $1 = 0.\overline{9}$;
2. $10\times0.\overline{9} = 9+0.\overline{9}$ pues $9\times0.\overline{9} = 9$ y $0.\overline{9} = 1$ (a menudo, los profesores utilizan $x=0.\overline{9}$ para efectuar los cálculos).

Tall (1978) propone dos otras posibilidades basadas sobre el algoritmo de la división:

3. Cuando se divide 1 por 9 se encuentra $0.\overline{1}$, cuando se divide 2 por 9 se encuentra $0.\overline{2}$, etc. hasta $8/9=0.\overline{8}$ y $9/9=0.\overline{9}$. Pero Tall precisa que para este último resultado hace falta permitirse un resto superior al divisor lo que puede ser molesto.
4. Se puede hacer una división por 2 para probar que $(1+a)/2=a$ para $a=0.\overline{9}$ y pues $a=1$. Esta proposición es, para Tall, más "legal" que la precedente.

De hecho, es completamente *legal* de proceder como el punto 3. En el algoritmo de la división podemos cambiar $0\leq r<d$ en $0<r\leq d$, para un residuo r y un divisor d. Se obtiene así los desarrollos con el período de 9 de los números decimales[8].

Una otra posibilidad se encuentra en Richman (1999):

5. para todo a que "no se acaba": $0.\overline{9}+a = 1+a$.

Aparte el punto 5, dado sin justificación por Richman, los cuatro otros puntos se apoyan sistemáticamente sobre una concepción proceso de los números, al menos para efectuar las operaciones con los DDIP – se necesita también justificar la *legalidad* de estas operaciones. Pero volemos una igualdad entre dos objetos, dos números, y no exactamente entre dos procesos. De hecho, en términos de proceso 0.999… no puede ser igual a 1 pues eso se puede sólo si se considera 0.999… como un número, es decir después de una encapsulación. Dubinsky et al. (2005b, páginas 261-262) precisan:

> « An individual who is limited to a process conception of .999… may see correctly that 1 is not directly produced by the process, but without having encapsulated the process, a conception of the "value" of the infinite decimal is meaningless. However, if an

[8] Ver a este propósito (Rittaud & Vivier, 2011). Además, a la inversa de la idea común, parece que la sucesión de los 9 es finalmente más natural del punto de vista matemático que la sucesión de los 0 para escribir los períodos de los decimales.

> individual can see the process as a totality, and then perform an action of evaluation on the sequence .9, .99, .999, …, then it is possible to grasp the fact that the encapsulation of the process is the trancendent object. It is equal to 1 because, once .999… is considered as an object, it is a matter of comparing two static objects, 1 and the object that comes from the encapsulation. It is then reasonable to think of the latter as a number so one can note that the two fixed numbers differ in absolute value by an amount less than any positive number, so this difference can only be zero. »

Uno de los problemas cruciales, señalado por Dubinsky et al (2005), es precisamente la encapsulación del proceso. Sin encapsulación, todo esfuerzo toma el riesgo de ser en vano , por ejemplo, enseñar que $0.\overline{9}=1$. Pero, si hay una encapsulación, hace falta saber qué objeto es encapsulado. Hemos encontrado a un estudiante (U2) que escribe:

$$1 = 0,\boxed{9} + 0,\boxed{0}1$$

Figura 7: escritura *infinitesimal* de U2

Suponemos que la escritura $0.\boxed{0}1$ tiene un sentido matemático: es claro que $0.\boxed{0}1$ no es algo nulo (a causa del 1) y que es inferior de cualquier número positivo. Este estudiante llega a la conclusión natural sobre la desigualdad entre $0.\overline{9}$ y 1. Parece que hay una encapsulación de donde el período emerge como un objeto. Pero eso no es suficiente porque los argumentos que se mencionan en la cita de Dubinsky et al (2005) están dados solo en un conjunto de números[9] .

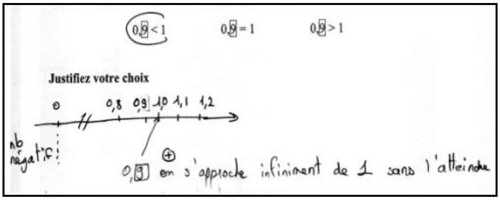
[9] En el sentido usual, pues estos argumentos no son válidos en análisis no estándar. Por otro lado, no es absurdo pensar que podría desarrollarse un sistema semiótico para el análisis no estándar a partir de las escrituras *infinitesimales*.

Regresamos al propósito de este estudio: formar los DDIP como números. Parece que el algoritmo de suma propuesto en este estudio participó en este objetivo. Además, considera los DDIP en una concepción objeto y, paralelamente, puede probarse todas las posibilidades mencionadas para justificar la igualdad $0.\overline{9}=1$. Esta posición con el algoritmo de la suma de dos DDIP parece mucho más simple que el razonamiento característico del análisis mencionado por Dubinsky et al.

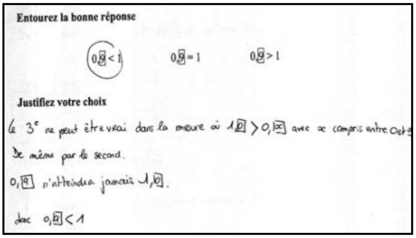
4.3 Los estudiantes y la comparación entre $0.\overline{9}$ y 1

Aunque el tema de las escrituras decimales no haya sido enseñado durante el año universitario[10], la mitad de los 14 estudiantes de universidad propone la igualdad entre $0.\overline{9}$ y 1. Las validaciones relativas a la desigualdad muestran una concepción de tipo proceso (ver figuras 8 y 9):

Figura 8: concepción proceso de U1



U7 : *se acerca infinitament e de 1 sin*



U1 : *El 3^er^ no puede ser verdadero pues*

Figura 9: concepción proceso de U7

[10] Probablemente se recuerdan de la enseñanza de *seconde* (preparatoria 1) con el programa anterior de 2009 (ver sección 2.1).

La utilización de dos cálculos diferentes para efectuar 3×1/3 predomina. De los 7 estudiantes que aceptan la igualdad, 6 estudiantes utilizan 3×1/3 para justificar la igualdad y 1 estudiante (ver figura 10) utiliza 9×1/9:

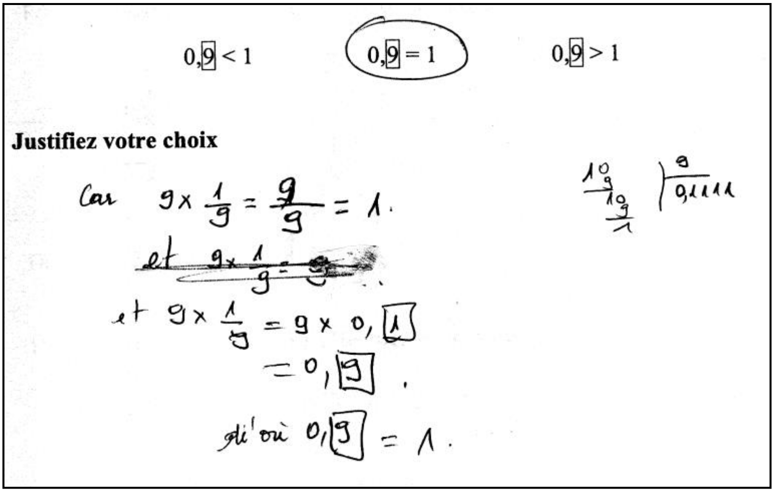
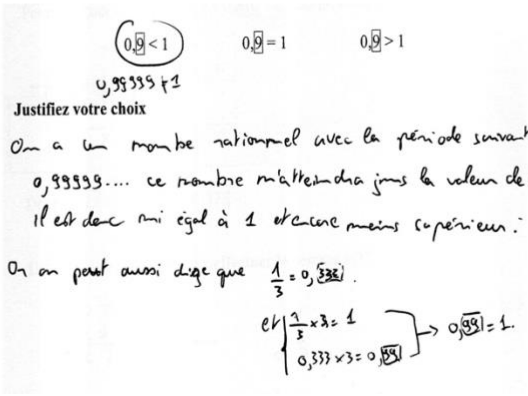


Figura 10: utilización de 9×1/9 por U13

Los tres estudiantes que proponen la desigualdad utilizando el cálculo de 1/3×3 llegan a una contradicción y para dos de ellos la contradicción no es explícita (ver figura 11). Así, como la afirmó Margolinas, sin control, no es seguro que este tipo de cálculo lleva a un desequilibrio.

Además, ¿cómo el doble cálculo de 3×1/3 podría desequilibrar una concepción de tipo proceso? Por un lado, la desigualdad 0.$\overline{9}$<1 viene de la concepción proceso y, por otro lado, uno de los cálculos de 3×1/3 se apoya sobre esta concepción. Por ejemplo, para el estudiante U4 (figura 11) hay una contradicción evidente. Sin embargo, concluye la desigualdad.

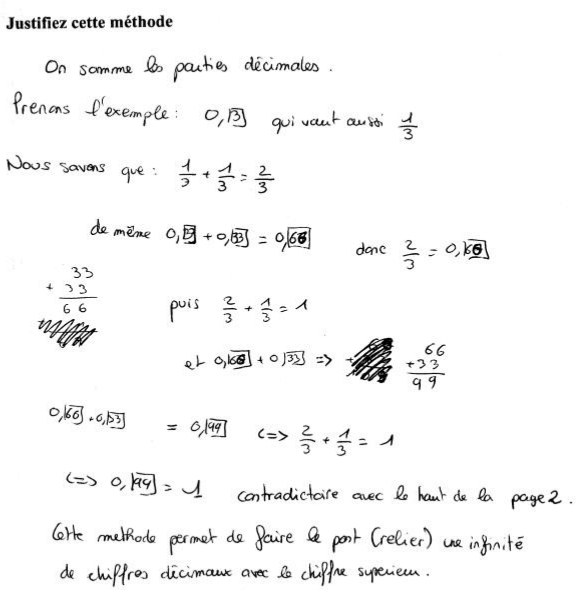


U4 : *Se tiene un número racional con el siguiente período :* 0.99999…. *este número no alcanzará nunca el valor* 1

Figura 11: contradicción implícita de U4

Puede añadirse que la decisión de U4 es razonable. Así, si se abandona la desigualdad, y la concepción proceso también, ¡se debe igualmente abandonar la igualdad pues el doble cálculo de 3×1/3 se apoya sobre una concepción proceso! Sin evocar los aspectos psicológicos, está más simple de abandonar la igualdad pues se efectúa con tratamientos que no se dominan (y por otra parte, ¿estos tratamientos son *legales*?).

Nuestro algoritmo no escapa sin duda al problema de control señalado por Margolinas, pero el estudiante (ver U1, figuras 8 y 12) que llegó a una contradicción a partir de nuestro algoritmo, es éste quien aclara la contradicción. Quizás por un efecto didáctico pues el algoritmo fue propuesto por un profesor, concluyó (ver el fin de la figura 12) sobre el punto esencial: la identificación de la sucesión 0999… con 1000… es decir la identificación del DDIP $0.\overline{9}$ con 1.



Justifiez cette méthode

On somme les parties décimales.

Prenons l'exemple : $0,\boxed{3}$ qui vaut aussi $\frac{1}{3}$

Nous savons que : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

de même $0,\boxed{3} + 0,\boxed{33} = 0,\boxed{66}$ donc $\frac{2}{3} = 0,\boxed{6}$

$33 + 33 = 66$

puis $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

et $0,\boxed{66} + 0,\boxed{33} \Rightarrow$ $66 + 33 = 99$

$0,\boxed{66} + 0,\boxed{33} = 0,\boxed{99} \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\Leftrightarrow 0,\boxed{99} = 1$ contradictoire avec le haut de la page 2.

Cette méthode permet de faire le pont (relier) une infinité de chiffres décimaux avec le chiffre supérieur.

U1 : *Se suma las partes decimales. Tomemos el ejemplo:* $0.\boxed{3}$ *quien vale también* 1/3 *Sabemos que:*

Figura 12: contradicción explicita de U1

5. Conclusión

El conjunto de los números reales constituye la base del análisis. Así, se puede pensar que es necesario tener una enseñanza específica de los números reales. Pues, parece necesario introducir un registro semiótico numérico para los números reales, porque la recta geométrica es insuficiente. Es el punto de vista que desarrolla Bronner con sus *idecimales*. Sin embargo, como pone en evidencia el marco teórico desarrollado, es necesario poder efectuar las operaciones de bases sobre este nuevo registro de representación.

A partir de este marco general, es toda una enseñanza sobre los DDI que se debe pensar, construir y, sobre todo, probar para saber si favorece una mejor concepción de los números reales. Los resultados de esta investigación permiten precisar algunos elementos como, por ejemplo, la manera de escribir el período de los DDIP. En esta perspectiva, el algoritmo propuesto puede ser de gran ayuda pues parece favorecer una concepción objeto de los DDIP.

¿Y en la universidad, por qué no introducir la multiplicación de los DDIP? La multiplicación es difícil, pero da acceso a un conocimiento profundo de los números racionales y permite comprender ciertas dificultades de la multiplicación de los números reales.

Acabamos sobre la restricción necesaria para los DDIP, en lugar de los DDI en general. Parece que es una gran restricción, pero:

- primero, con los DDIP, el número es tratado como un objeto lo que es una concepción importante para poder avanzar en matemáticas. La suma de dos números reales en el registro de los DDI, es igualmente muy fácil de definir. Efectuando la suma de izquierda a la derecha, cada nueva cifra decimal calculada no cambiará excepto en el caso de una sucesión de 9. Pero, para la suma de dos DDI en general, no se puede escapar de una concepción "proceso" del número real – en particular porque no se puede saber *a priori* el largo de una sucesión de 9.
- en segundo lugar, muchos problemas sobre el asunto son relativos a los DDIP y son, por esto, abordados en didáctica de las matemáticas. Es el caso de la relación $0.\overline{9} = 1$.
- Finalmente, en matemática, en una investigación relativa a una extensión infinita de una codificación (aquí con los DDI), es natural interesarse en las codificaciones periódicas.

La discusión sobre la relación $0.\overline{9} = 1$ no es reciente. En general, esta igualdad es discutida en el marco del análisis, con las sucesiones, las series, los límites. Es sobre este punto que pensamos haber traído una nueva comprensión de esta igualdad. En el marco de los DDIP que desarrollamos, esta igualdad marca el paso de una escritura numérica a la escritura de un número. Del punto de vista semiótico viene naturalmente $0.\overline{9}<1$, y del punto de vista de los números es necesario tener $0.\overline{9} = 1$ (ver Rittaud & Vivier (2011) para una discusión precisa).

La mayoría de las investigaciones sobre la famosa igualdad $0.\overline{9} = 1$ hacen referencias a las nociones de infinito potencial y actual. Estas nociones de infinitos son ineludibles en el paso de 0.999... a $0.\overline{9}$ que permiten la encapsulación del período. Pero luego, no es necesario hacer de nuevo referencia al proceso para intentar de justificar la igualdad $0.\overline{9} = 1$. La utilización del razonamiento matemático característico del cálculo es difícil (*sus diferencia es menos que cualquier número positivo pues es nula*, ver por ejemplo Dubinsky et al. (2005)). Este razonamiento puede parecer sospechoso a los alumnos y, sobre todo, necesita tener números antes. Pero precisamente, es necesario tener la igualdad para conseguir de los números. Pensamos que es el punto importante de la investigación de Weller et al. (2009) pues propusieron un trabajo sobre las sumas de DDIP. Utilizaron la computadora para hacer las sumas con dos conversiones – es el procedimiento 2 en sección 3.2. Nos parece que nuestra investigación, que se apoya sobre el procedimiento 3, abre una nueva posibilidad para justificar la igualdad $0.\overline{9} = 1$ que es la base de la construcción de los números reales por los desarrollos decimales.

6. Bibliografía

BLOCH, I. (2000). L’enseignement de l’analyse à la charnière lycée / université – Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, *Thèse de doctorat*, université Bordeaux I, France.

BRONNER, A. (2005). La question du numérique dans l’enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires, *Actes de la XIIIème école d’été de didactique des mathématiques*, Ste Livrade, 18-26 août 2005.

CASTELA C. (1996), La droite des réels en seconde : point d'appui disponible ou enjeu clandestin ? *IREM de Rouen*.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x* 19, pp. 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 95-126, Kluwer Academic Publishers.

DUBINSKY, E., WELLER, K., MICHAEL, A. MC DONALD, M. A. & BROWN, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 1, *Educational Studies in Mathematics*, 58, pp. 335–359.

DUBINSKY, E., WELLER, K., MICHAEL, A. MC DONALD, M. A. & BROWN, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 2, *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 253–266.

DUBINSKY, E. & MCDONALD, M.A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in Derek Holton, et al. (eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 273–280.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne.

GONSETH, F. (1926). Les fondements des mathématiques, de la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme, Albert Blanchard, Paris (réédition de 1974).

LEBESGUE, H. (1934). La mesure des grandeurs, Albert Blanchard, Paris (réédition de 1975).

MARGOLINAS, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x* 16, pp. 51-66.

NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2010) Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce. In J-C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola, R. Gras (Eds) Analyse Statistique Implicative. Objet de recherche et de formation en analyse des données, outil pour la recherche multidisciplinaire. Prolongement des débats. *Quaderni di Ricerca in Didattica* Suppl 1 N°20 - Palermo : GRIM Università di Palermo (pp. xx-yy) ISSN on-line 159-4424.

PLUVINAGE, F. (2005). Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo, in *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, Cortés, J. C. & Hitt F. (eds.), UMSNH, UQAM y Cinvestav, Morevallados Editores, Mexico, p. 35-60.

RICHMAN, F. (1999). Is .999. . .= 1?, *Mathematics Magazine*, 72(5), 396–400.

RITTAUD, B. & VIVIER, L. (2011). Algorithmes des 4 opérations de base sur les rationnels en écritures décimales et construction du corps **Q**, *Repères-IREM*. (Article soumis.)

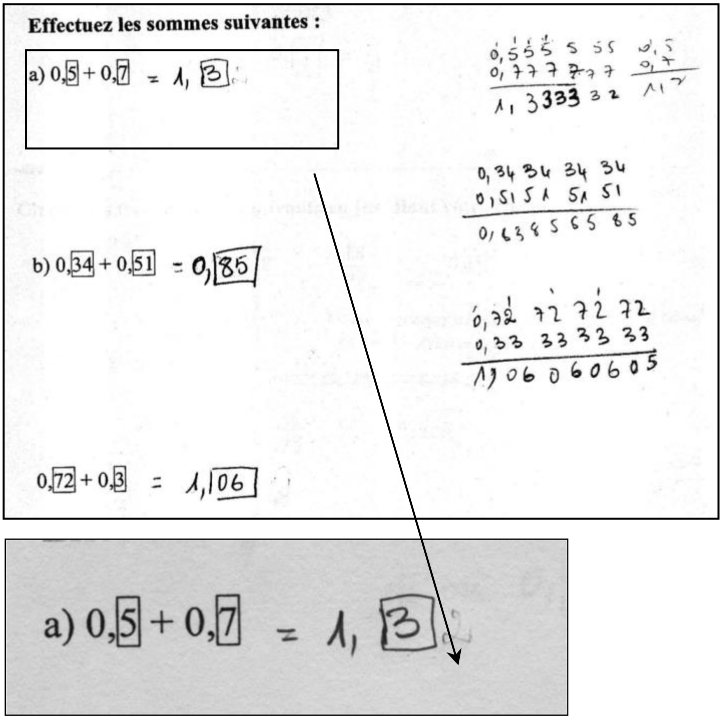
TALL, D. O. & SCHWARZENBERGER, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits, *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.

TALL, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus, Poster presented at the *Fourth International Congress on Mathematical Education*, Berkeley, 1980.

VIVIER, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, 13, IREM de Strasbourg.

WELLER, K., ARNON, I. & DUBINSKY, E. (2009). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), Routeledge.

7. Anexo 1: el estudiante U13



El « 2 » fue borrado, sin duda por un retroceso del trabajo sobre el algoritmo. Así, en su primera intención, este estudiante ha dado una respuesta infinitesimal.

Anexo 2: Test sobre las sumas en la universidad

CONVENCIÓN
Se acordó para la escritura decimal de un racional, colocar un cuadro en una secuencia de cifras para indicar un período. Así, el número 0.27272727… de período 27 se escribe $0.\boxed{27}$.
Observación: se puede también escribir $0.\boxed{2727}$ o todavía $0.\boxed{272727}$, etc.

- Primero, se debe efectuar las siguientes sumas (sin el algoritmo):

$0.\boxed{5} + 0.\boxed{7}$ $\qquad$ $0.\boxed{34} + 0.\boxed{51}$ $\qquad$ $0.\boxed{72} + 0.\boxed{3}$

- Luego, el algoritmo ha sido propuesto con el siguiente ejemplo:

	2	7	2	7	2	7
+	8	1	0	8	1	0
1	0	8	3	5	3	7
+						1
	0	8	3	5	3	8

Pues: $0.\boxed{27} + 0.\boxed{810} = 1.\boxed{083538}$.

- Los estudiantes debían utilizar este algoritmo para efectuar las siguientes sumas:

$0.\boxed{37} + 0.\boxed{905}$ $\qquad$ $0.\boxed{8} + 0.\boxed{73}$ $\qquad$ $0.\boxed{31} + 0.\boxed{49}$

$0.\boxed{7} + 0.\boxed{5}$

Anexo 3: presentación del sistema educativo francés

En Francia, antes de la universidad, hay tres etapas de enseñanza que se reparten en dos ciclos: la enseñanza primaria (5 años) y la enseñanza secundaria (7 años). Más precisamente para la enseñanza secundaria:

- hay 4 años en el *collège*, las clases son *sixième*, *cinquième*, *quatrième* y *troisième*;
- hay 3 años en el *lycée*, las clases son *seconde*, *première* y *terminale*.

Sólo las clases de *première* y *terminale* tienen un programa específico con opciones.

Referimos en este artículo en los niveles en México de la manera siguiente:

- las clases de *cinquième*, *quatrième* y *troisième* son llamadas secundaria 1, secundaria 2 y secundaria 3 respectivamente ;
- las clases de *seconde*, *première* y *terminale* son llamadas preparatoria 1, preparatoria 2 y preparatoria 3.