

# Aprendizaje de la Integral Definida en estudiantes de Ingeniería

Patricia del Socorro Narro Ramírez, María Isabel Kanagúsico  
Muñoz, Karla Cecilia Marente Ibarra  
[mariaisabelkanagusico@hotmail.com](mailto:mariaisabelkanagusico@hotmail.com)  
Universidad Autónoma de Coahuila.  
México

**Resumen:** En el presente estudio se documenta el tipo de aprendizaje logrado por estudiantes de ingeniería en relación a la integral definida. Las actividades planteadas en un examen diagnóstico implican el reconocimiento de dicha integral en diferentes registros de representación y el tránsito entre ellos, así como su aplicación a la solución de problemas.

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes adquieren un aprendizaje algorítmico y memorístico. Con base en lo anterior, se propone una reestructuración del contenido programático del curso de Cálculo integral, además, implementar metodologías de aprendizaje centradas en el estudiante que faciliten la construcción de conceptos.

**Palabras clave:** Aprehensión conceptual, Integral definida, Registros de representación, Reconocimiento, Tratamiento, Tránsito.

**Abstrac:** This study documents the type of learning achieved by engineering students in relation to the definite integral. The activities outlined in a diagnostic test imply the recognition of said integral in different representation registers and the transit between them, as well as its application to the solution of problems.

The results show that most of the students acquire algorithmic and rote learning. Based on the above, a restructuring of the programmatic content of the



Comprehensive Calculus course is proposed, in addition, to implement student-centered learning methodologies that facilitate the construction of concepts.

**Keywords:** Conceptual apprehension, Definite integral, Representation records, Recognition, Treatment, Transit.

## 1. Introducción

El aprendizaje de las Matemáticas se ha caracterizado por la memorización de fórmulas y reglas que el estudiante repite sin que tengan un significado para él, en consecuencia, no consigue la comprensión conceptual ni la aplicación a la resolución de problemas.

En esta ponencia se reportan los resultados obtenidos al realizar un examen diagnóstico sobre el concepto de integral definida a 176 estudiantes de ocho especialidades de ingeniería de la Universidad Autónoma de Coahuila, Unidad Saltillo.

## 2. Fundamentación

En la investigación se utilizó como idea central la Teoría de las representaciones, en particular el trabajo de Duval, R. “Semiosis y Pensamiento Humano” (1999), en lo que se refiere al uso de los diferentes registros para posibilitar el aprendizaje de un concepto.

En él afirma que la comprensión conceptual de un objeto, “Noesis” es inseparable de la “Semiosis” (comprensión o producción de una representación semiótica<sup>1</sup>)

---

<sup>1</sup>**Representación semiótica.** Son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento.

Con el propósito de evidenciar la estrecha relación entre *semiosis* y *noesis* en el funcionamiento cognitivo del pensamiento, Duval, señala que el aprendizaje de las Matemáticas constituye un campo de estudio ideal para mostrar esta relación, ya que hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la *semiosis* que son:

- A. La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado. Esta formación implica una selección de rasgos y datos en el contenido por representar y se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación.

La función de las reglas es asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento de la representación así como la posibilidad de su utilización para los *tratamientos*.

- B. El *tratamiento* de una representación es la transformación de ésta en el registro mismo donde ha sido formada.
- C. La *conversión* de una representación es la transformación a otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. La *conversión* es una actividad cognitiva diferente e independiente de la del *tratamiento*.

Por otra parte para el logro de la *noesis* se requiere además del registro natural (lenguaje verbal) la creación y coordinación de diferentes registros de representación.

Para explicar esta necesidad se ha encontrado lo siguiente:

- a. La existencia de varios registros posibilita el cambio entre ellos y este cambio tiene como objetivo permitir efectuar *tratamientos* de una manera más económica y más potente.
- b. La complementariedad de los registros. Toda representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa y de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan, de ahí la necesidad de complementar los registros.
- c. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación.

De ahí que el recurrir a varios registros parece incluso una condición necesaria para no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones y para que se les pueda reconocer en cada una de ellas. Es decir, lo que importa es el objeto representado y no sus diferentes representaciones semióticas posibles.

### **3. Objetivo general**

Indagar si los estudiantes de diferentes ramas de la ingeniería de la U. A. de C. Unidad Saltillo logran la aprehensión conceptual de la integral definida y la aplican en la resolución de problemas.

### **4. Metodología**

El estudio se abordó con un enfoque mixto; cuantitativo, con algunos datos de corte cualitativo a fin de documentar las dificultades enfrentadas por los estudiantes.

El grupo de estudio consistió de 176 estudiantes inscritos en ocho programas de ingeniería en tres facultades y que en el momento cursaban las asignaturas de Cálculo multivariable y/o Ecuaciones diferenciales.

Actividades implementadas:

Se diseñaron tres instrumentos: Perfil de participantes, Cuestionario diagnóstico y Perfil de los docentes asignados al curso de Cálculo integral.

El Cuestionario diagnóstico y Perfil de participantes se aplicaron en una sesión de clase de 2 horas, sólo se permitió el uso de lápiz y papel. Además se proporcionó un formulario básico. La Encuesta a docentes se realizó mediante entrevista personal.

El “Cuestionario diagnóstico” consta de doce reactivos con dos clases de actividades, las denominadas de reconocimiento y las de tránsito.

Las actividades de reconocimiento se refieren a la identificación de la integral definida en diferentes registros de representación: geométrico, algebraico y numérico. Además, todas las respuestas deben justificarse a fin de conocer si los estudiantes poseen los conceptos involucrados o contestan al azar.

Las actividades de tránsito se relacionan con la conversión entre los registros geométrico, algebraico y verbal. Al igual que en las actividades de reconocimiento, en estas actividades, las respuestas deben justificarse con el mismo objetivo descrito.

Se efectuó el análisis cuantitativo reportado en forma porcentual considerando el criterio siguiente:

Valor de verdad. Se establecieron categorías tomando en cuenta si los estudiantes acertaron o fracasaron al contestar cada uno de los reactivos. Se incluye la categoría no contestó a fin de tener una visión de la totalidad de las respuestas.

En relación al análisis cualitativo, se documentó el tipo de dificultades enfrentadas por los estudiantes. Además a fin de validar el estudio, se consideró el criterio de triangulación consistente en recabar y analizar la información desde distintos ángulos a fin de compararla.

Es decir, obtener el mismo resultado en el análisis considerando fuentes diferentes. En este sentido, en el estudio se cotejaron los resultados obtenidos del Cuestionario diagnóstico, Perfil de los participantes y Perfil de los docentes.

## **5. Resultados**

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en el Cuestionario diagnóstico, el Perfil de los participantes y el Perfil de los docentes.

A continuación se muestran los resultados de algunos reactivos del Cuestionario diagnóstico que involucran actividades de reconocimiento y tránsito en diferente registros de representación.

### **5.1, Primer reactivo.**

El objetivo consiste en indagar si el estudiante expresa con sus palabras el concepto de integral definida.

Los resultados muestran que los estudiantes no logran la aprehensión conceptual, únicamente logran un acercamiento a la aprehensión de alguna de la representaciones semióticas.

Por ejemplo, la definición que expresa Eric de la integral definida es:

*Es la forma de calcular el área total  
bajo la curva de una función, que es  
un valor acumulado de forma que  
si se hablara de velocidad la acumulada sería  
la distancia recorrida...*

Se observa que el estudiante logra un acercamiento a la interpretación geométrica de la integral definida, además de la interpretación física.

Es importante señalar que la mayoría muestra un acercamiento a la interpretación geométrica y el resto de los que contestan posee la imagen de la representación algebraica.

El análisis cuantitativo de resultados se muestra en forma gráfica<sup>2</sup> y a continuación se hace una breve descripción de la información relevante.

Además, se describen algunas de las dificultades enfrentadas por los estudiantes.

## 5.2, Segundo reactivo.

Consta de cinco ejercicios de integración mediante tratamiento algebraico, del tipo que se aborda generalmente en los cursos de Cálculo integral. El objetivo es comprobar el nivel de conocimiento que los sujetos conservan uno o más semestres después de haber concluido dicho curso.

---

<sup>2</sup> El eje vertical indica el porcentaje, en el eje horizontal se se presentan 3 barras correspondientes a aciertos, errores y no contestó, G para la totalidad de la población, F1, F2 y F3 para cada una de las facultades participantes.

Como se aprecia en la figura 1, el resultado general indica que más del 55% no se anima siquiera a intentar resolver los ejercicios; de los que lo intentan, sólo el 11% obtiene un resultado correcto y el resto comete errores algebraicos, omisión de signo e identificación del diferencial, principalmente.

También se observa que en las facultades F1 y F3 se tiene un nivel de conocimiento muy similar, mientras que los sujetos de la F2 optan por el “No contestó”.

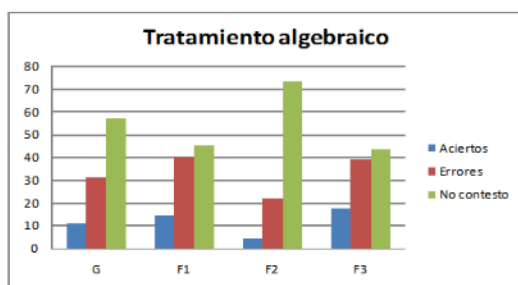


Figura 1 Tratamiento en el registro algebraico



A continuación se muestra el trabajo realizado por Manuel

$$\begin{aligned}
 2.) \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\sin 3x}} dx &= -\frac{1}{6} \int \frac{-6 \cos 3x dx}{(1-2\sin 3x)^{1/2}} \\
 u = 1-2\sin 3x & \\
 du = -6 \cos 3x dx & \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{(1-2\sin 3x)^{3/2}}{3/2} \\
 &= -\frac{(1-2\sin 3x)^{3/2}}{9} + C
 \end{aligned}$$

Se observa que el estudiante identifica la función a integrar y el diferencial correspondiente, completa en forma correcta el diferencial, sin embargo omite el signo en el exponente de la función lo cual lo conduce a un resultado erróneo.

### 5.3, Quinto reactivo.

El objetivo, en este caso, consiste en indagar si el estudiante reconoce el teorema del valor medio en el registro geométrico y logra aplicarlo a una situación que implica una razón de cambio de volumen con respecto a la temperatura de un gas.

La figura 2 muestra que el 62 % de los participantes no dan respuesta a este reactivo, de los que responden, sólo el 11 % acierta. Además se observa que en la F3 el 47% de los sujetos contesta las preguntas, logrando un 18% de aciertos, superior al promedio general, mientras que en F1 y F2 los estudiantes muestran un desempeño por debajo de éste con un 9 % y 6 % de aciertos respectivamente.

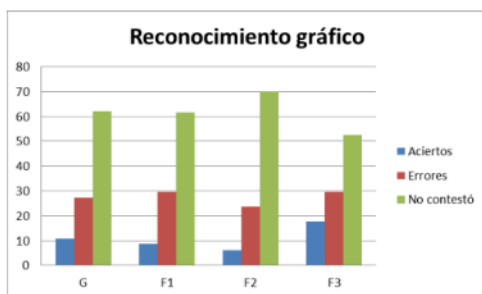


Figura 2 Reconocimiento en el registro geométrico

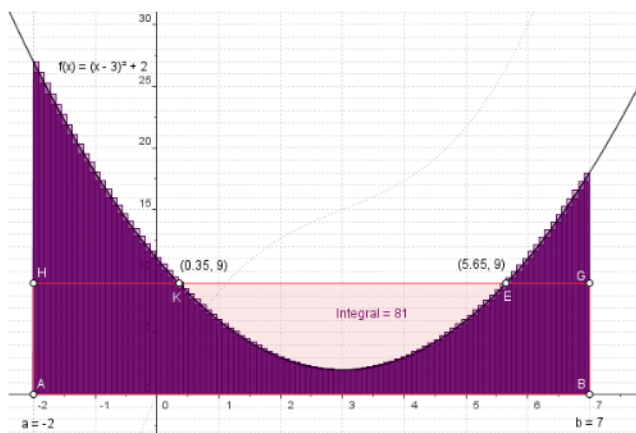
Por ejemplo, veamos el caso de Héctor

- V. La figura mostrada en la siguiente página satisface el teorema del valor medio para integrales. Utiliza la figura para contestar las siguientes preguntas.

- a. ¿La  $\int_{-2}^0 f(x) dx$  es un número negativo? No  
 b. El área del rectángulo ABGH es 81

Si en la gráfica mostrada,  $\frac{dv}{dt}$  representa el cambio de volumen con respecto a la temperatura para cierto gas. Contesta las siguientes preguntas.

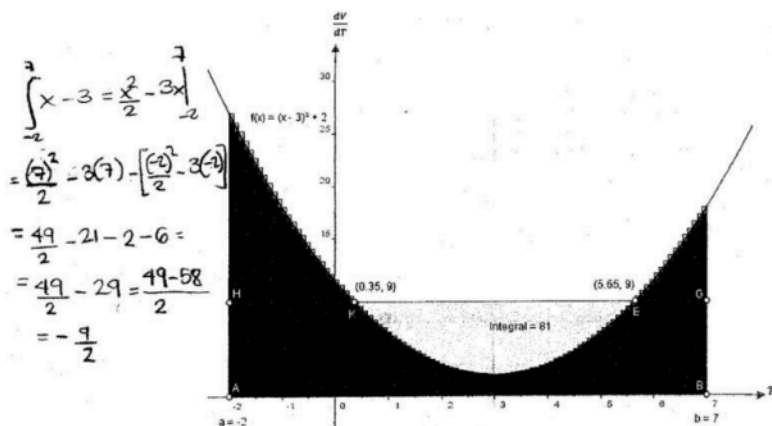
- c. ¿Cuál fue el cambio de volumen en el intervalo  $[-2, 7]$ ? 81  
 d. ¿Cuál es el volumen medio en el intervalo  $[-2, 7]$ ? 81  
 e. ¿Para cual(es) valor(es) de temperatura se obtiene el volumen medio?  
0.35 y 5.65



Héctor responde en forma acertada a 4 de las preguntas excepto en el inciso d al confundir el cambio total en el volumen con el volumen medio.

El trabajo de Irma, muestra que no es capaz de reconocer en este registro el teorema del valor medio, por tal motivo, intenta transitar hacia la representación algebraica y en ésta comete los siguientes errores: Utiliza un integrando diferente al mostrado, de manera que aunque aplica acertadamente la regla de Barrow, no obtiene el valor correcto de la integral, además de que no calcula el valor medio ni los números para los cuales ocurre dicho valor.

Es importante señalar que no valida el resultado ya que el signo obtenido no corresponde a la figura proporcionada.



## 5.4, Séptimo reactivo.

En este caso se pretende determinar el cambio total en el volumen de un gas a partir de la representación numérica del flujo de dicho gas en un intervalo de tiempo. El objetivo es indagar si el estudiante reconoce en el registro numérico, el cambio total como una aproximación a la integral definida.

La figura 3 muestra que el 86 % de los participantes no responde la pregunta. El promedio general de aciertos es de 4.7%. Se observa que el desempeño en F3 es superior a la media, aun cuando es una minoría la que da una respuesta. Mientras que en F1 y F2 la participación es prácticamente nula.

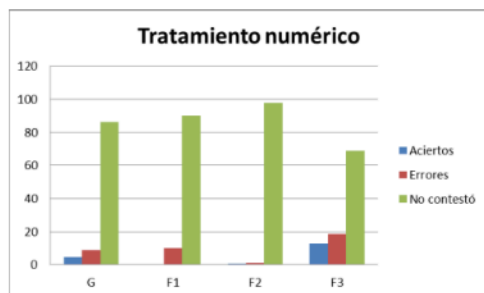
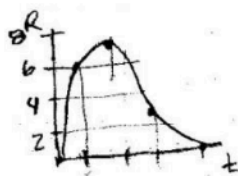


Figura 3 Tratamiento en el registro numérico

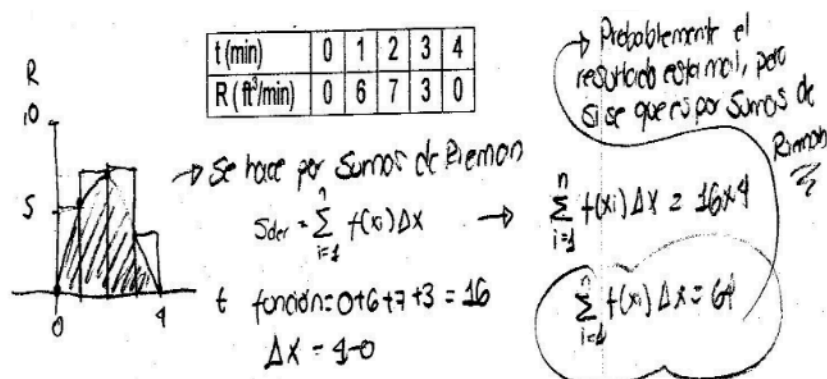
Por ejemplo, Jesús David decide efectuar tránsito hacia la representación geométrica, sin embargo, no considera que la escala vertical es de 1:2 por lo cual su aproximación corresponde a la mitad de la esperada,



$$y = 6.7 x^3$$

Debe señalarse que la aproximación en el registro numérico mediante sumas de Riemann implicaba un trabajo más sencillo que el cambio de registro.

Ahora veamos el trabajo realizado por José Luis



El estudiante transita hacia la representación geométrica, sin embargo busca la solución mediante tratamiento en el registro numérico, no obstante se equivoca al calcular el valor de  $\Delta t$ . Además hace evidente que está familiarizado con la notación utilizando la variable  $x$ , al considerar  $\Delta x$  y  $f(x)$  en lugar de  $\Delta t$  y  $R(t)$ .

### 5.5, Noveno reactivo.

Consiste en determinar si  $\int_{-2}^3 (x^2 - 4) dx$  es positiva o negativa, sin calcularla. Se sugiere construir la gráfica para tal efecto.

La figura 4 muestra que en general el 62% de los participantes no contestaron, el 18 % obtiene el resultado correcto, mientras que el 20% equivoca la respuesta.

La población de F3 es la que obtiene el mayor número de aciertos con un 36%, mientras que en la F2 el 86 % opta por no contestar.

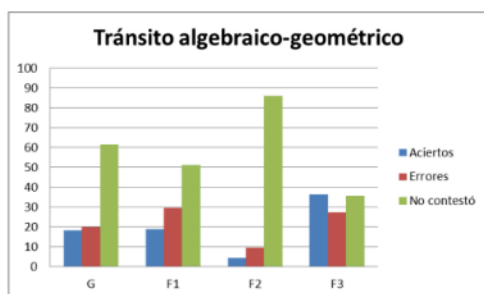


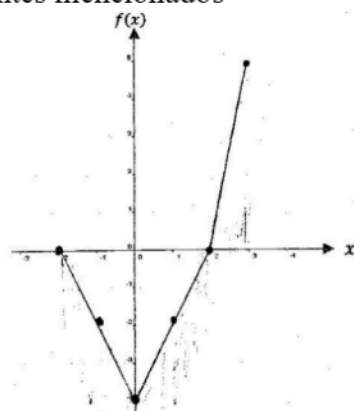
Figura 4 Tránsito algebraico-geométrico

Algunas de las dificultades enfrentadas por los estudiantes en la solución del reactivo se describen a continuación:

De los estudiantes que construyen la gráfica, muchos muestran un desconocimiento del comportamiento de la función cuadrática, ya que utilizan líneas rectas para unir los puntos determinados en la tabulación.

También se observó que interpretan literalmente la definición de área bajo la curva, por ejemplo, Teresa, acierta la respuesta, aunque su justificación muestra los 2 errores antes mencionados

Negativa,  
Es más grande  
el área negativa bajo  
la curva que la positiva



### 5.6, Décimo primer reactivo.

En este reactivo se presenta una situación relacionada con el movimiento de una partícula. Se pretende que el estudiante realice tránsito de la representación verbal a la geométrica y mediante tratamiento en este registro, encuentre la solución a la pregunta planteada.

La figura 5 muestra que el 58% de los participantes optó por la opción no contestó, de los que contestan sólo el 11 % acierta. Además, la población de F3 alcanza un promedio de aciertos de 20%, el cual está por encima de la media general, mientras que en F1 y F2 el porcentaje de aciertos es de 7% y 6% respectivamente.

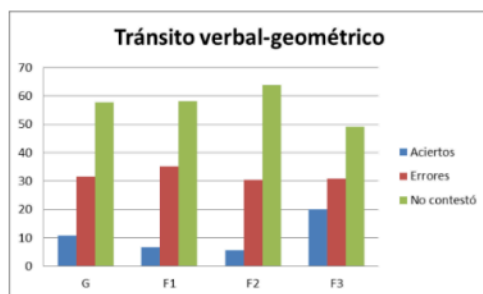
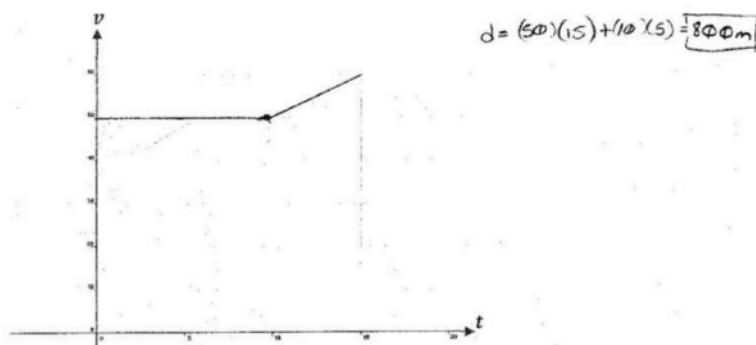


Figura 5 Tránsito verbal-geométrico

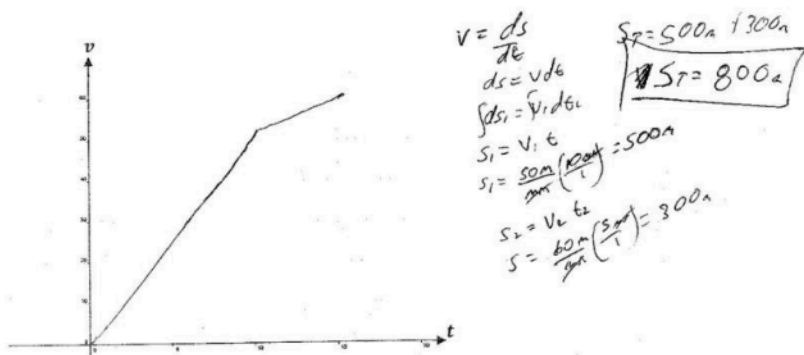
Por ejemplo veamos el trabajo realizado por Teresa

- XI. Una partícula se mueve con una velocidad de 50 m/min durante 10 minutos, los siguientes 5 minutos mantiene una aceleración constante hasta alcanzar 60 m/min y choca con una placa metálica. Construye la gráfica y encuentra la distancia que recorrió la partícula durante los 15 minutos.



Se observa que la estudiante transita con éxito hacia la representación geométrica, reconoce el cambio total en la distancia como el área bajo la gráfica de la función velocidad, sin embargo, al realizar tratamiento en esta representación falla al calcular el área del triángulo como el producto de la base por la altura.

En el caso de Juan, éste no acierta el tránsito hacia la representación geométrica, ni siquiera se percata que en la gráfica muestra que la partícula parte del reposo. Además al realizar tratamiento considera la velocidad constante, contrario a lo mostrado en la gráfica.



## 5.7, Resultados de encuesta Perfil de los docentes



De acuerdo a la información proporcionada por los docentes, la mayoría de los textos utilizados privilegia el aprendizaje en el registro algebraico.

Una minoría de los docentes, utiliza textos que abordan la integral definida en los diferentes registros de representación y el tránsito entre los mismos.

Aun cuando algunos docentes manifiestan utilizar tecnología como apoyo para el aprendizaje, la información proporcionada por los estudiantes mostró que el uso consiste en la proyección de materiales y sólo en un grupo de F3 se utiliza software de geometría dinámica y hoja de cálculo para la construcción de conceptos, utilizando hojas de trabajo.

Respecto al perfil docente, en F1 y F2 los niveles son mínimo y deseable según PROMEP con una experiencia promedio de 5.5 años, mientras que en F3 el perfil es mínimo con una experiencia de 15.5 años en promedio.

La forma de evaluación en F3 es departamental y se establece en academia mientras que en F1 y F2 queda a criterio del maestro.

Además se analizó el contenido programático de la asignatura de Cálculo integral para la U.A. de C. El resultado muestra que dicho programa se elaboró en reunión de representantes del área de todas las facultades que imparten programas de ingeniería dentro de la reforma curricular de 2004

El contenido está organizado en cuatro unidades, de las cuales, únicamente en la primera se aborda el concepto de integral definida, el resto de las unidades se enfocan en el aprendizaje algorítmico de la integral y algunas aplicaciones.

## 6. Conclusiones

Los resultados muestran que los estudiantes no logran la aprehensión conceptual “Noesis” de la integral definida. El aprendizaje logrado consiste en acercamientos a la aprehensión de alguna representación semiótica, “Semiosis” principalmente la algebraica y en menor proporción la geométrica.

Es decir, el aprendizaje de los estudiantes es mecánico, no han logrado construir imágenes mentales ricas; pueden proceder algorítmicamente, sin embargo, no han reflexionado sobre la interpretación del concepto ni logran aplicarlo a la resolución de problemas.

Por lo tanto, los resultados obtenidos son congruentes con el programa de la asignatura, los textos utilizados, las metodologías de aprendizaje y formas de evaluación. En consecuencia se puede inferir que la calificación aprobatoria del curso de Cálculo integral se obtiene mediante un aprendizaje memorístico, que en la mayoría de los casos perdura un lapso mínimo de tiempo.

Lo anterior hace evidente la necesidad de una modificación integral de la asignatura, en la que se enfatice la aprehensión conceptual. Para tal efecto se propone reducir el contenido temático en lo referente a tratamiento algebraico aprovechando la potencialidad de la tecnología para realizar tales tareas, de manera que se disponga de mayor tiempo para

la construcción de conceptos y sus aplicaciones a la resolución de problemas.

En la construcción de conceptos el uso de hojas de trabajo con apoyo de tecnología ofrece una alternativa que propicia la participación activa del estudiante en el aprendizaje y favorece el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático.

## 7. Bibliografía

**Ayres, F. Jr. & Mendelson, E.** (1991), *Cálculo diferencial e integral*. México. Mc Graw-Hill

**Duval, Raymond.** (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

**Granville, William Anthony.** (1992). *Cálculo Diferencial e Integral*. México. Limusa

**Hughes Hallett, D. & Gleason, A.** (2003). *Cálculo Aplicado*. México. CECSA

**Larson / Hostetler.** (1999). *Cálculo Diferencial e Integral*. México. Mc Graw-Hill.

**Leithold, L.** (1998), *El Cálculo*. México. Oxford University Press.

**Smith & Milton.** (2002). *Cálculo Diferencial e Integral*. México. Mc Graw-Hill,

**Stewart, James.** (2007), *Cálculo Diferencial e Integral*. México. Thomson.

**Swokowski, Earl W.** (1989). *Calculo Con Geometría Analítica*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.

**Thomas, George.** (2006), *Cálculo de una variable*. México. Pearson Educación.

**Zill, Dennis G.** (1989), *Calculo con Geometría Analítica*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.