

# **Nuestro laboratorio: un lugar y seis momentos para descubrir diferentes facetas del Cálculo Vectorial**

**Añino María Magdalena; Pita Gustavo; Miyara Alberto; Merino  
Gabriela Alejandra**

[maena@gigared.com](mailto:maena@gigared.com); [gdpita@bioingenieria.edu.ar](mailto:gdpita@bioingenieria.edu.ar)  
[ajmiyara@fceia.unr.edu.ar](mailto:ajmiyara@fceia.unr.edu.ar); [merino.gabriela33@gmail.com](mailto:merino.gabriela33@gmail.com)

**Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos  
Argentina**

**Autor de correspondencia:** Añino María Magdalena

**Resumen.** Cálculo Vectorial es una asignatura del segundo año de la carrera de Bioingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, República Argentina. Desde hace dos décadas hemos realizado innovaciones tanto curriculares como metodológicas tratando de responder a las necesidades formativas del futuro Bioingeniero. A partir del año 2008 comenzamos a trabajar sistemáticamente generando un proyecto de Investigación – Acción. El objetivo del mismo es mejorar nuestra formación y nuestra práctica docente para facilitar el aprendizaje. En este trabajo sintetizamos los cambios metodológicos que, fundamentados en criterios de la Didáctica de la Matemática y de la Psicología Cognitiva, nos orientan a la creación de un espacio: el laboratorio.

**Palabras claves:** Cálculo Vectorial, laboratorio, investigación-acción.

*El Cálculo y su Enseñanza.* Año 3Enero-Diciembre © 2011, Cinvestav-IPN, México. P.p- 13-34

**Abstrac:** Vector Calculus is a subject in the second year of the Bioengineering career at the Faculty of Engineering of the National University of Entre Ríos, Argentina. For two decades we have made both curricular and methodological innovations trying to respond to the training needs of the future Bioengineer. As of 2008 we began to work systematically generating a Research - Action project. The objective of it is to improve our training and our teaching practice to facilitate learning. In this work we synthesize the methodological changes that, based on criteria of the Didactics of Mathematics and Cognitive Psychology, guide us to the creation of a space: the laboratory.

**Keywords:** Vector Calculus, laboratory, action-research.

## 1. Introducción

Cálculo Vectorial es una asignatura del segundo año de la carrera de Bioingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, República Argentina. Desde hace dos décadas hemos realizado innovaciones tanto curriculares como metodológicas tratando de responder a las necesidades formativas del futuro Bioingeniero. A partir del año 2008 comenzamos a trabajar sistemáticamente generando un proyecto de Investigación – Acción (I-A).

Según John Elliott se puede definir la I-A como el estudio de una situación (en este caso la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Vectorial en el segundo año de Bioingeniería) para tratar de mejorar la acción en esta comunidad constituida por docentes y estudiantes. El objetivo del mismo es mejorar nuestra formación y nuestra práctica docente para facilitar el aprendizaje. Metodológicamente se estructura en ciclos. A partir de un diagnóstico inicial se delimita el problema, se construye un marco teórico que oriente la planificación

e implementación de una estrategia didáctica, se observan los resultados y a partir de ellos se inicia un nuevo ciclo para mejorar aquellos aspectos que resultaron deficitarios.

En este trabajo sintetizamos los cambios metodológicos que, fundamentados en criterios de la Didáctica de la Matemática y de la Psicología Cognitiva, nos orientan a la creación de un espacio: el laboratorio. Describimos este lugar como un ámbito en el cual la actitud y práctica de la interrogación, experimentación, observación, reflexión y formalización teórica, hacen posible descubrir diferentes facetas del Cálculo

## 2. El Laboratorio

¿Qué es un laboratorio? Al consultar el Diccionario de la Real Academia Española acerca del significado del término “laboratorio” nos encontramos con las siguientes acepciones: “Lugar dotado de los medios necesarios para realizar investigaciones, experimentos y trabajos de carácter científico o técnico.” “Realidad en la cual se experimenta o se elabora algo”. En este trabajo se concibe al laboratorio desde la segunda acepción. El lugar físico puede ser el aula o la sala de computación que se convierten en laboratorio cuando la actividad que allí se desarrolla promueve: el surgimiento de interrogantes, la búsqueda de respuestas, el enunciado de conjeturas, la refutación de una idea, la modelización matemática de un fenómeno o problema, la experimentación, el “hacer operaciones destinadas a descubrir, comprobar o demostrar determinados fenómenos o principios”.

El Término “Laboratorio Matemático” usado en el sentido explicado en el párrafo anterior no es nuevo, pues ya fue usado por dos grandes maestros: Julio Rey Pastor funda en 1915 el Laboratorio y Seminario

Matemático; el Profesor Miguel de Guzmán, fallecido en abril de 2004, impartió en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid una asignatura de carácter introductorio y denominada “Laboratorio de Matemática”, dirigida a los estudiantes que inician estudios universitarios.

En este trabajo sintetizamos la experiencia de transformar la clase tradicional en una actividad de Laboratorio. Fue realizada en la asignatura Cálculo Vectorial que se imparte en el segundo año de la carrera de Bioingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, República Argentina en el marco de un proyecto de **Investigación – Acción**, en el cual a través de ciclos de diseño e implementación de estrategias didácticas, análisis de los resultados y reflexión, se persigue una mejora continua en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

### **3. Un momento inicial para motivar y presentar “situaciones problemas”**

El profesor no comienza el tema presentando definiciones y propiedades sino que propone un interrogante o un problema que no se pueda abordar con los conceptos previos pero que a partir de ellos se puedan construir nuevos conocimientos y encontrar respuestas. La tecnología puede brindar esas preguntas. Existen diferentes programas con facilidades gráficas, numéricas y simbólicas que permiten diseñar una actividad de observación de “objetos matemáticos” por parte de los estudiantes, a partir de la cual comenzar a indagar sus propiedades.

**Ejemplo N°1:** Al iniciar el estudio de la Superficies definidas en forma paramétrica el estudiante ya ha trabajado con superficies definidas por funciones de dos variables y curvas en el espacio definidas mediante sus ecuaciones paramétricas. Es el momento apropiado para observar las gráficas de superficies generadas por un software (Ver Figura 1) y preguntar ¿Cómo un software nos permite

ver en la pantalla de la computadora (un plano) una superficie en el espacio?

#### **4. Un segundo momento para explorar y extraer conclusiones**

Continuamos con el Ejemplo N°1. Es ahora el momento de diseñar una experiencia exploratoria simple. ¿Qué observamos en la superficie cilíndrica de la Figura 1? ¿Podemos reproducir la familia de curvas que nos permiten visualizar el cilindro? ¿Qué conceptos conocidos podemos aplicar? Durante la experimentación áulica, los alumnos, bajo la guía del docente, deberán llegar por sus propios medios a la necesidad de dos parámetros para describir a una superficie. Para ello seguirán los siguientes pasos:

a) Repasarán sus conocimientos anteriores de definición de curvas en el espacio, y en particular la noción de que la representación gráfica de una función vectorial es una curva cuando cada una de sus componentes es una función de una única variable, llamada parámetro. También harán una breve revisión del concepto de coordenadas polares, y en particular de cómo se representa una circunferencia en polares.

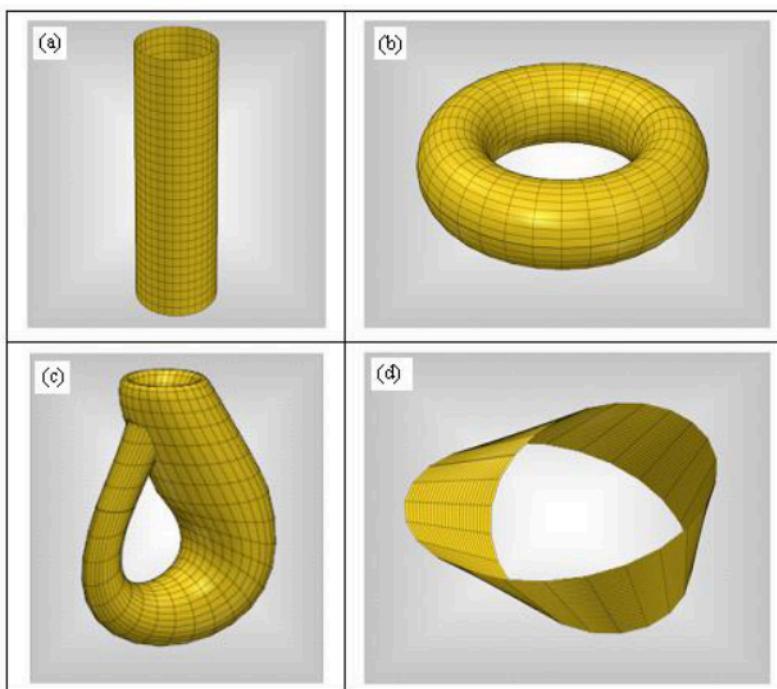


Figura 1: En esta figura se muestran cuatro superficies generadas con el software MuPAD: (a) Cilindro, (b) Toro, (c) Botella de Klein, (d) Cinta de Möbius.

Las ecuaciones de las superficies vienen dadas en el Apéndice 1.

b) A continuación, se les muestra la Figura 2. Se les hace observar que el contorno de la superficie cilíndrica está definido por familias de curvas (rectas y circunferencias). En una misma familia deben identificar las características comunes y lo diferente:

Las circunferencias son todas de igual radio y con centros no coincidentes pero todos en el eje  $y$ ; por otro lado, se encuentran ubicadas en diferentes planos pero todos paralelos.

Las rectas, por su parte, tienen todas la misma dirección, paralela al eje del cilindro, y difieren solamente en el punto de paso. Si

seleccionamos a este último sobre la intersección del cilindro con el plano  $xy$ , vemos que pertenece a una circunferencia sobre dicho plano, en este caso de radio 1. Recordando coordenadas polares, el alumno llega a la conclusión de que el punto de paso de cada una de las rectas de la familia depende exclusivamente de su coordenada angular, dado que la coordenada de distancia al origen asume el mismo valor para cada punto.

c) Ahora es el turno de expresar estas curvas en lenguaje matemático; esto es, de traducir en fórmulas lo que se expresó sobre ellas en forma coloquial.

Para las circunferencias, tenemos que las coordenadas  $x$  y  $y$  de cada uno de sus puntos dependen de un ángulo:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta & , & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y &= \sin \theta & & \end{aligned} \tag{1}$$

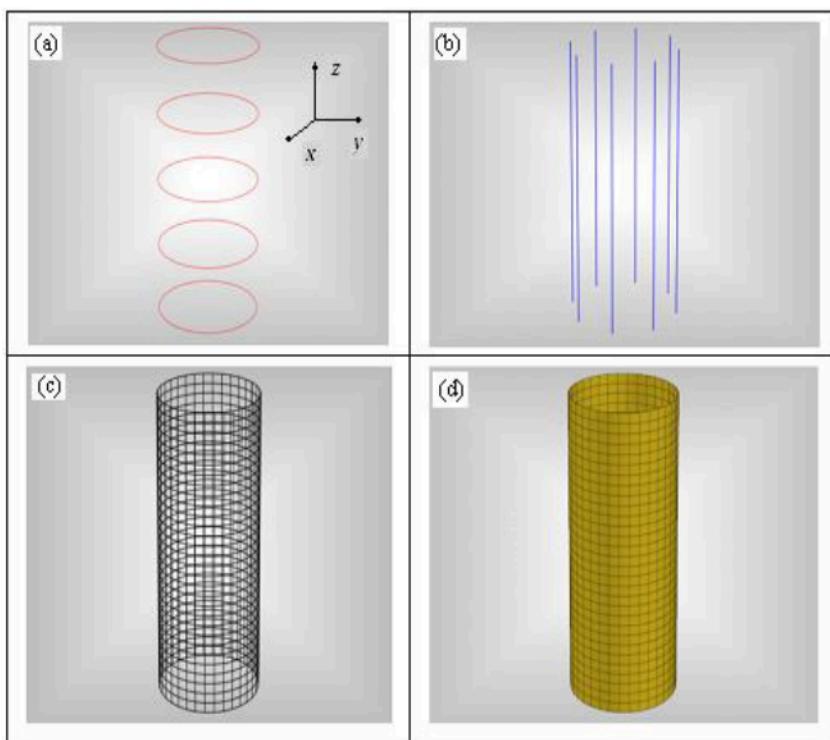


Figura 2: En esta figura se muestra la construcción de la superficie cilíndrica de ecuación,  $x^2 + y^2 = 1$ , con  $-1 \leq z \leq 3$ , a partir de dos familias de curvas. En (a) se observa una familia de circunferencias de igual radio, ubicadas en planos paralelos al plano coordenado  $xy$ , con sus respectivos centros a lo largo del eje  $y$ . En (b) se observa una familia de rectas paralelas al eje  $y$ , cada una de las cuales pasa por un punto de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ . (c) Gráfica de ambas familias de curvas. (d) Visualización del cilindro.

Falta expresar el hecho de que están todas en diferentes planos paralelos al de la base. Esto significa que la componente  $z$  es la misma para todos los puntos de una misma circunferencia (esto es,  $z = \lambda$ , donde  $\lambda$  es una constante), pero distinta para cada una de las diferentes circunferencias. De esa manera, las tres componentes de los puntos de cada miembro de esta familia de circunferencias vienen dados por:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ y } \lambda \text{ cualquier valor entre } -1 \text{ y } 3 \\ z &= \lambda \\ (2) \end{aligned}$$

De esa manera vemos que necesitamos dos parámetros: uno,  $\theta$ , para describir todos los puntos de cada circunferencia, y otro,  $\lambda$ , para desplazar la circunferencia verticalmente, obteniendo así todos los miembros de la familia.

Similarmente, cada recta puede expresarse de forma paramétrica. Si  $(x_0; y_0; 0)$  es un punto de paso de la recta sobre el plano  $xy$ , entonces su ecuación vectorial será:

$$\mathbf{r}(t) = (x_0; y_0; 0) + \lambda \mathbf{k}$$

(3)

O, componente a componente,

$$x = x_0$$

$$y = y_0$$

$$z = \lambda$$

(4)

$$-1 \leq \lambda \leq 3$$

Vemos que lo que diferencia a las distintas rectas entre sí es el punto de paso. Pero éste pertenece a la intersección del cilindro con el plano  $xy$ , es decir a una circunferencia de radio 1 centrada en el

origen. Si recordamos nuevamente la representación de un punto de una circunferencia en polares, tendremos:

$$x = x_0 = \cos \theta$$

$$y = y_0 = \sin \theta$$

(5)

De esa manera obtendremos la familia de rectas escribiendo:

$$x = \cos \theta$$

$$y = \sin \theta \quad , \quad -1 \leq \lambda \leq 3 , \text{ y } \theta \text{ cualquier valor entre } 0 \text{ y } 2\pi.$$

$$z = \lambda$$

(6)

Nuevamente vemos que necesitamos dos parámetros para describir de forma completa la familia de rectas: uno,  $\lambda$ , para obtener todos los puntos dentro de una misma recta, y otro,  $\theta$ , para mover la recta en el espacio cambiando su punto de intersección con el plano  $xy$ . Notamos que las ecuaciones que obtuvimos para las circunferencias y las rectas son formalmente idénticas y lo único que varía es qué mantenemos fijo y qué hacemos variar si queremos obtener unas u otras.

d) Ahora el alumno usa el lenguaje propio del software para visualizar las curvas. Recurriendo —en nuestro caso— al software MuPAD, primero se trazan las circunferencias. Aquí se fija una altura, digamos 1,5, y se hace variar  $\theta$ :

```
lambda = 1.5
x := cos(theta):
y := sin(theta):
(7)
z := lambda
theta = 0 .. 2*PI
```

Al representar esto, el alumno ve una circunferencia. Ingresando luego el mismo código con otros valores de  $\lambda$  (-0,5; 1; 2; ...), obtiene otras circunferencias a distintas alturas. Puede luego representarlas todas juntas, Figura 2(a).

Para trazar las rectas, se fija un valor de  $\theta$ , digamos  $30^\circ$ , y se hace variar  $\lambda$ . Así:

```
theta = PI/6
x := cos(theta):
y := sin(theta):
(8)
z := lambda
lambda = -1 .. 3
```

Al representar esto, el alumno ve una recta. Ingresando luego el mismo código con otros valores de  $\theta$  ( $\pi/4$ ;  $\pi/2$ ;  $\pi/3$ ; ...), obtiene otras rectas con distintos puntos de paso. Puede luego representarlas todas juntas, Figura 2(b). Puede luego ordenar que se representen simultáneamente las familias de circunferencias y rectas obtenidas, Figura 2(c).

e) Llegado este punto, surge la pregunta (espontánea o inducida al alumno): dado que tenemos las mismas ecuaciones para las circunferencias y las rectas, pero en un caso dejamos fijo un parámetro y en el otro caso el otro, ¿qué pasaría si escribimos las mismas ecuaciones, pero haciendo variar ahora ambos parámetros? La situación sería ahora esta:

```
x := cos(theta):
y := sin(theta):
z := lambda
lambda = -1 .. 3
(9)
theta = 0 .. 2*PI
```

El alumno verá ahora representada una superficie, en la cual están incluidas las curvas (circunferencias y rectas) obtenidas anteriormente, ayudando a identificar su contorno, Figura 2(d).

### 5. Un tercer momento para formalizar

La formalización llega después de la experimentación. Continuamos con el Ej. N° 1: El alumno ha visto la necesidad de trabajar con dos parámetros: uno para trazar una curva y un segundo parámetro para desplazarse en el espacio y generar otra curva de la familia no superpuesta a la anterior.

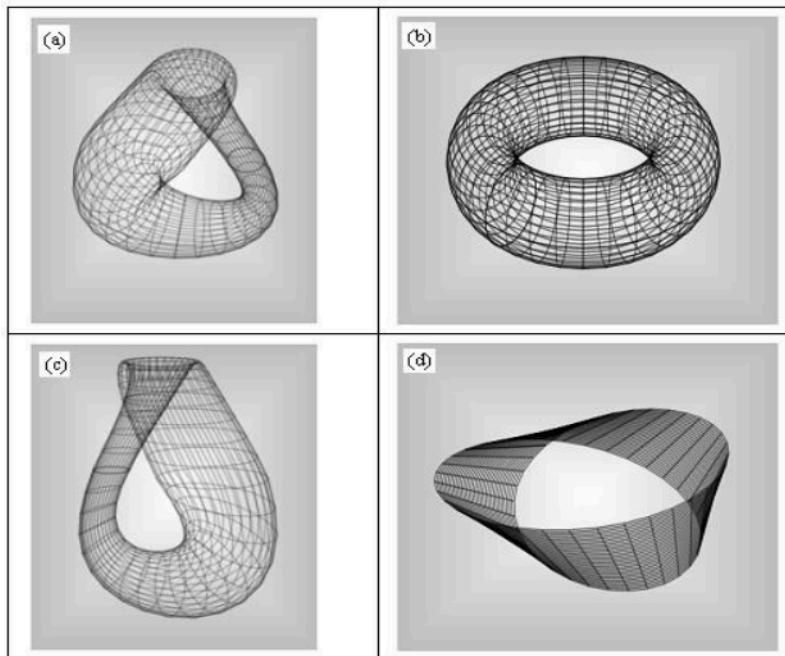


Figura 3: En esta figura se pueden observar las curvas isoparamétricas correspondientes a las siguientes superficies: (a) y (c) Botella de Klein, (b) Toro, (c) Banda de Möbius

El profesor ayuda a extraer conclusiones. Surgen así dos conceptos: el de *curva isoparamétrica* o *reticular* y el de *superficie parametrizada*.

Este último se presenta naturalmente como el conjunto imagen de una función  $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con dominio  $D$  en una región de  $\mathbb{R}^2$ , en la cual dos parámetros toman valores.

De esa manera, cada punto de la superficie es un elemento de  $\mathbb{R}^3$  cada una de cuyas componentes es función de ambos parámetros. Así, el vector posición de dichos puntos viene dado por:

$$\Phi(u; v) = x(u; v)\mathbf{i} + y(u; v)\mathbf{j} + z(u; v)\mathbf{k} \quad (10)$$

En el Apéndice 1 se detallan las expresiones para las componentes de las superficies parametrizadas mostradas en la Figura 1. Cuando uno de los dos parámetros permanece constante (digamos  $v = v_0$ ) y el otro varía, se obtiene una expresión en que cada componente es función de *una* variable. De anteriores clases el alumno recuerda que esto último corresponde a una curva. Se tendrá así:

$$\Phi(u; v_0) = x(u; v_0)\mathbf{i} + y(u; v_0)\mathbf{j} + z(u; v_0)\mathbf{k} = \mathbf{r}(u) \quad (11)$$

Auxiliado por el software, el alumno puede jugar con distintos valores de  $v_0$  de modo que las expresiones del Apéndice 1 se conviertan en expresiones paramétricas de curvas, y graficar estas últimas. A continuación puede mantener fijo el parámetro que antes variaba y viceversa ( $u = u_0$ , y  $v$  variable), obteniendo:

$$\Phi(u_0; v) = x(u_0; v)\mathbf{i} + y(u_0; v)\mathbf{j} + z(u_0; v)\mathbf{k} = \mathbf{r}(v) \quad (12)$$

Nuevamente, el alumno puede jugar con distintos valores de  $u_0$  para generar diferentes curvas, que también puede graficar, superponiéndolas con las anteriores. El resultado será como el ilustrado en la Figura 3: colecciones (familias) de curvas en las cuales uno de los parámetros se mantiene fijo. Se conoce a estas como curvas isoparamétricas. También se las denomina reticulares, debido al aspecto de redecilla que adopta el conjunto de todas estas curvas superpuestas.

De esta manera el profesor no comunica a los estudiantes conocimientos acabados sino que conduce la dinámica de formación y desarrollo de los conceptos.

## 6. Un cuarto momento para afianzar métodos y reflexionar

En las distintas ciencias experimentales al trabajo de laboratorio le sigue en general una actividad de exposición y debate de resultados. Siguiendo esta pauta, a la tradicional clase de resolución de ejercicios la hemos transformado en un *seminario*. En el mismo se exponen los ejercicios propuestos y resueltos en grupos pequeños. Estos incluyen la realización de *diagramas de flujo*. Estos esquemas son ampliamente usados en ingeniería para representar gráficamente un proceso necesario para producir un resultado. El resultado puede ser un producto, un servicio, información o una combinación de los tres. También se emplean estos diagramas en informática para describir las partes de un programa antes de escribirlo en el correspondiente lenguaje. Permite observar en el programa el funcionamiento de estructuras condicionales como “mientras” o “si...entonces”. Adicionalmente, los diagramas de flujo facilitan a otras personas la comprensión de la secuencia lógica de la solución planteada y sirven como documentación del proceso de solución de un problema (ver Figura 4).

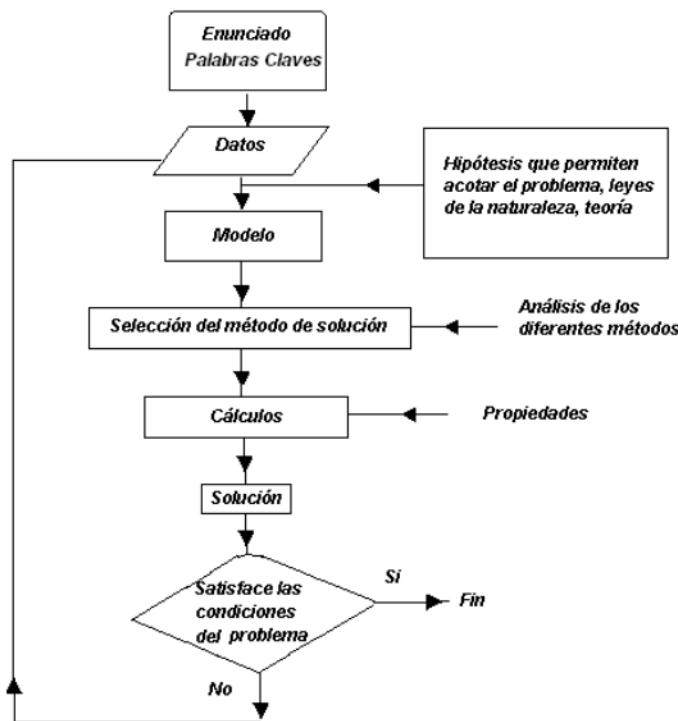


Figura 4: Se observa un Diagrama de flujo que documenta un proceso de resolución de problemas.

## 7. Un quinto momento para abordar problemas de otras áreas

El trabajo con modelos matemáticos relacionados con áreas de la bioingeniería da significado y sentido a los conceptos. En este quinto momento, el alumno es expuesto a situaciones de la práctica profesional que puede abordar a través de las herramientas que acaba de adquirir.

**Ejemplo 2.** Las superficies cuádricas suelen aparecer en representaciones geométricas del cuerpo humano. Estos modelos se usan en radioterapia para estudiar la distribución de dosis absorbida en el cuerpo humano. En Biomecánica se emplean modelos geométricos simples para estudiar la dinámica del cuerpo humano en distintas circunstancias (Figura 5).

## 8. Un sexto momento de integración

Al terminar una unidad temática hemos encontrado que la construcción en clase de un *mapa conceptual*, el cual se genera a través del diálogo entre el docente y los estudiantes, permite mostrar de una manera explícita como se relacionan los conceptos anteriores con los nuevos. Se establecen de esta manera nuevos nodos y nuevas rutas en una red que se va tornando más compleja y cuya visualización facilita la recuperación de conceptos quizás olvidados. Existen herramientas informáticas gratuitas que permiten la construcción de mapas conceptuales y la exportación de cada diagrama como página web.

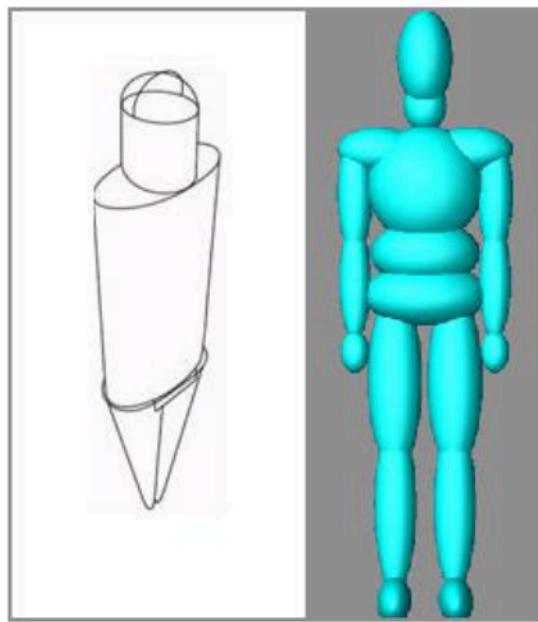


Figura 5: Se ilustra a la izquierda un fantoma usado en radioterapia y a la derecha un modelo simple usual en biomecánica.

## 9. Conclusiones

La interacción entre docentes, estudiantes y contenidos ha cambiado. Al tomar el estudiante el rol protagónico se ha obtenido un mejor rendimiento académico.

En la Figura 6 se muestra la evolución de los estudiantes que alcanzan la condición de “regulares” (deben rendir un examen final), “promocionados” (han aprobado el curso a través de las evaluaciones parciales) y “libres” (deben retomar el curso). El porcentaje de libres ha decrecido de un 50% en el año 2009 a un 23 % en el año 2011.

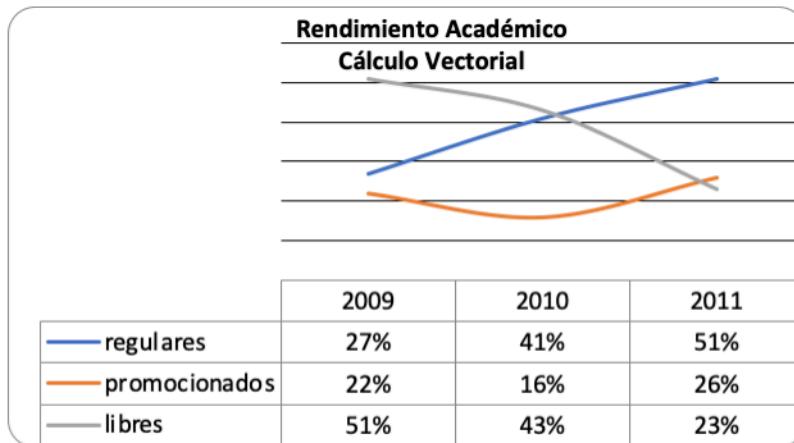


Figura 6: *Rendimiento académico de los estudiantes de Cálculo Vectorial*

Después de sucesivas experiencias, en el contexto de un proceso de Investigación – Acción hemos ido encontrando momentos para desplazar paulatinamente el eje principal del proceso de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo hacia la actividad que realiza el estudiante con la guía y supervisión del profesor, en un espacio que hemos llamado “Nuestro Laboratorio”.

**Apéndice 1.** Ecuaciones de las superficies mostradas en la Figura 1 y subsiguientes

Cilindro:

$$\begin{cases} x = \cos u & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = \sin u & , -1 \leq v \leq 3 \\ z = v & \end{cases}$$

Toro:

$$\begin{cases} x = 3 \cos u + \cos v \cos u & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = 3 \sin u + \cos v \sin u & , 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = \sin v & \end{cases}$$

Cinta de Moebius:

$$\begin{cases} x = 2 \cos u + v \cos \frac{u}{2} & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = 2 \sin u + v \cos \frac{u}{2} & , -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2} \\ z = v \sin \frac{u}{2} & \end{cases}$$

Botella de Klein:

$$\begin{cases} bx(u) = -6 \cos u (1 + \sin u) \\ by(u) = -14 \sin u \\ r(u) = 4 - 2 \cos u \\ x(u, v) = bx(u) - r(u) \cos u \cos v, \quad u \leq \pi \quad 0 \leq u \leq 2\pi \\ x(u, v) = bx(u) + r(u) \cos v, \quad u > \pi \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = r(u) \sin v \\ z(u, v) = by(u) - r(u) \sin u \cos v, \quad u \leq \pi \\ z(u, v) = by(u), \quad u > \pi \end{cases}$$

## Bibliografía

- Artigue, M.; Douady, R; Moreno, L.; Gómez, P. (1995) Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral R. (julio/2001-enero/2002), “Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior”, Sinéctica 19.
- De Guzmán (1998). “La Educación Matemática”. Conferencia en el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8 (Sevilla 1996), publicada en las Actas del Congreso, Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla, 1998).
- Elliott, J (2007), *Reflecting Where the Action Is: The Selected Works of John Elliott*. London: Routledge
- Hernández H., Delgado R. (2001). Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Rosario: HomoSapiens Ediciones.
- Stewart, J. (2008). Cálculo. Trascendentes tempranas. México: CENGAGE Learning.

