La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función.

Carlos Armando Cuevas Vallejo [1] & José Luis Díaz Gómez [2]

ccuevas@cinvestav.mx, jdiaz@gauss.mat.uson.mx

1 DME CINVESTAV-IPN & 2 Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Autor de correspondencia: Carlos Armando Cuevas Vallejo

Resumen. En este artículo trataremos de mostrar que el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos constituye un factor importante que se debe considerar cuando se elabora una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas.

Creemos que el conocimiento de dicho desarrollo contribuye a visualizar en una dimensión más amplia la verdadera complejidad del concepto a enseñar. En particular, en este artículo trataremos el concepto de función.

Mostraremos que siendo el concepto de función uno de los más importantes en la matemática y en la modelación de fenómenos naturales, los problemas de su enseñanza y aprendizaje son un reporte frecuente. Y esto sucede a pesar de poner una cuidadosa atención en su enseñanza. En contradicción a este hecho, la mayoría de los matemáticos y maestros, consideran que este no es un concepto difícil de enseñar y aprender.

Consideramos que un conocimiento de la historia evolutiva del concepto de función, ayudará a juzgar si es difícil de aprender y por supuesto de enseñar.

Palabras clave: funsión, enseñanza, aprendizaje

Abstrac: In this article we will try to show that the historical development of mathematical concepts constitutes an important factor that must be considered when developing a didactic proposal for the teaching of mathematics.

We believe that the knowledge of this development contributes to visualizing in a broader dimension the true complexity of the concept to be taught. In particular, in this article we will deal with the concept of function.

We will show that being the concept of function one of the most important in mathematics and in the modeling of natural phenomena, the problems of its teaching and learning are a frequent report. And this happens despite paying careful attention to his teaching. Contrary to this fact, most mathematicians and teachers consider that this is not a difficult concept to teach and learn.

We believe that a knowledge of the evolutionary history of the concept of function will help to judge whether it is difficult to learn and of course to teach.

Key words: funsion, teaching, learning

Fecha de recepción: 01-01-2014
Fecha de aceptación:23-03-2015

1. Introducción

Al realizar una breve revisión del currículo de matemáticas desde el Nivel Medio Básico hasta el Nivel Superior encontramos que un tema recurrente en la enseñanza de las matemáticas es el concepto de función (SEP, 1999; CCH, 1996; UAM, 1997; UNISON, 1998). En el ámbito internacional la importancia de las funciones despertó el interés de algunos investigadores de organismos como The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989/1991) de EEUU, quienes al describir la importancia de las funciones la definieron como un *"concepto unificador en matemáticas"* y, en ese mismo país, la National Research Council agregó que "*el lenguaje del cambio y la causalidad es expresado por el simbolismo de las funciones*" (NRC, 1989, p.51). En este sentido, Fey y Good (1985) proponen que el concepto de función sea el centro del álgebra escolar, y Kieran et al. (1993) proponen que el concepto de función se introduzca al inicio del curso del álgebra escolar y que todo se construya a partir de él.
En cuanto a los planes de estudio algunos han sido diseñados teniendo el concepto de función como referencia. (v. g. Usiskin y Senk, 1992). Por otro lado se han publicado diversos documentos que reconocen la utilidad e importancia de las funciones y hacen un llamado a enfatizarlas en los planes de estudio (NCTM, 1989/1991; NRC, 1989).
Como es conocido, el tema de funciones es piedra angular para el desarrollo de temas más avanzados de la propia matemática; modela también frecuentemente innumerables fenómenos: físicos, químicos, socioeconómicos, biológicos, por mencionar algunas ciencias. Y en el aspecto curricular es un contenido obligado desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los universitarios. A pesar de ello, diversos investigadores reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender este concepto, con la consecuente influencia en una mala interpretación de conceptos matemáticos que dependen en gran parte de la comprensión del concepto de función.
En efecto, Sierpinska (1992) y Sfard (1989), reportan que los libros de texto de álgebra y cálculo utilizados en las escuelas y universidades, ofrecen diferentes versiones del concepto de función que generalmente dan origen a interpretaciones que dejan de lado características importantes del concepto.
También Nicholas (1966), Norman (1992), Goldenberg (1988) y otros, han hecho investigaciones acerca de las dificultades y errores que presentan los estudiantes con el uso de las diferentes versiones de la definición de función. Incluso existen evidencias de que la familiaridad con un aspecto de la función interfiere con el desarrollo y comprensión de otros, véase (Selden; 1992; Dubinsky y Harel, 1992; Norman, 1992).
De aquí que entonces sea importante realizar un estudio de su evolución como un factor a considerar al elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de función, que evite en lo posible lo arriba expuesto. Pero como esto añade un considerable trabajo, a la ya de por si colosal tarea de elaborar la propuesta didáctica, es natural preguntarse: ¿es importante conocer los elementos históricos alrededor del concepto de función?
Por la importancia que este concepto tiene en la enseñanza de las matemáticas, no se puede dar a esta pregunta una respuesta trivial o superficial; por el contrario, ésta tendría que estar plenamente justificada para que, independientemente del esquema didáctico, sea un factor a considerar.

2. Una Breve Visión Histórica del Concepto de Función.

Menciona Kleiner (1989, p. 283) que el concepto de función se remonta 4000 años atrás, de los cuales *3700 consistieron sólo de anticipaciones*. Considera además, que la noción de función no surgió en forma explícita sino hasta principios del siglo XVIII y que fue en el transcurso de casi 200 años (1450-1650), -descritos en detalle posteriormente-, que ocurrieron una serie de desarrollos fundamentales para el surgimiento del concepto de función. Por otro lado, Youschkevitch (1976, p. 39) distingue varias etapas principales el desarrollo del concepto de función hasta la mitad del siglo XIX. Estas etapas son:

2.1. La Antigüedad.

Mientras Pedersen opina que los matemáticos babilónicos poseyeron un auténtico "instinto de funcionalidad", ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, y esto si está presente en las numerosas tablas de cálculos de los babilónicos (Pedersen, citado por Youschkevitch, 1976, p. 42). Youschkevitch asegura que no hay ninguna idea en general de función en esta matemática.
En los elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticas. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, pero no a las funciones, se consideran a los números enteros y discretos, y a las magnitudes continuas. Esto hace difícil construir la noción de función, puesto que los números, así considerados, sólo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza. En fin, para Youschkevitch, cualesquiera que hayan sido las causas y circunstancias que condujeron a las características de la ciencia antigua descrita, el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función (Youschkevitch 1976, p. 40).

2.2. La edad media.

El período medieval Latino no hizo contribuciones significativas a la geometría Griega clásica o al álgebra Indo-Árabe; pero estuvo mucho más cerca del concepto de función que sus antepasados. A partir del siglo XIII hasta bien entrado el período moderno aparecieron con notable regularidad tratados sobre proporciones. Estos trabajos equivalen a un álgebra de relaciones del tipo $y = kx^n$, donde n tiene un valor racional. Esta teoría de proporciones fue básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de I. Newton (1643–1727) (Boyer, 1946, p. 9).
Por su parte N. Oresme (1323-1382), intentó dibujar también ciertas funciones para las cuales la tasa de cambio no era constante, las gráficas en estos casos eran líneas quebradas o curvilíneas. La latitud de formas representó una teoría primitiva de funciones en la que ésta tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra; pero faltaba el lenguaje del álgebra con el cual expresar la ley de variación o la correspondencia funcional (Boyer, 1946, p. 10).

2.3. Período Moderno.

En el transcurso de 200 años (1450-1650) ocurrieron una serie de desarrollos que fueron fundamentales para el surgimiento del concepto de función: La extensión del concepto de número para abarcar a los números reales e incluso (hasta cierto punto) los números complejos, la unión del álgebra y la geometría, la introducción del movimiento como un problema central en la ciencia, y la invención del álgebra simbólica. También la invención de la geometría analítica y el surgimiento en el siglo XVII de la ciencia matematizada sugieren una "visión dinámica y continua de la relación funcional, en oposición a la visión estática y discreta sostenida por los antiguos" (Kleiner, 1989. p. 283).
La palabra "función" apareció por primera vez en los manuscritos de G. Leibniz (1646-1716), en agosto de 1673, y en particular en su manuscrito intitulado, *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.* Leibniz la introdujo para designar un objeto geométrico asociado con una curva, v. g. coordenadas de un punto sobre la curva o la pendiente de una curva (Youschkevitch, 1976, p. 56). Es decir, en un principio Leibniz no utilizaba el término función para designar la relación formal entre la ordenada de un punto de una curva y su abscisa en el sentido moderno, sino más bien, en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo, o en una máquina. Posteriormente, Leibniz, identifico la noción de función con ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etcétera, asociadas con la posición de un punto. El cálculo desarrollado por Newton y Leibniz no era un cálculo de *funciones*, sino que fue más bien una ingeniosa colección de métodos para resolver problemas de curvas. (Kleiner, 1989).
En 1718 Johan Bernoulli (1667-1748), en un artículo dio la primera definición formal de función como:

> *Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes.* (Rüthing, 1984, p. 72).

Bernoulli en su artículo propone la letra griega φ para designar la "característica" de una función (término debido a Leibniz), escribiendo todavía el argumento sin paréntesis: φ x. (Youschkevitch, 1976, p. 60). La notación $f(x)$ la introdujo primero Clauriant y fue defendida por L. Euler (1707-1783), alrededor del año 1734 (Boyer, 1946. p. 12), y en 1748, Euler fue el primero en darle al concepto de función un papel central y explícito en su *Introduction in Analysis Infinitorun*.
A partir del siglo XVIII se perciben cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función. Matemáticos prominentes están asociados con cada una de estas etapas.

2.3.1. Primera etapa. En la primera etapa donde la función es una ecuación o fórmula está asociada con Euler (1707-1783). Euler definió una función siguiendo la definición dada por su maestro Bernoulli como:

> *Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes* (Euler, 1748, citado por Rüthing, 1984, p. 72).

Mérito grande de Euler es el de incluir expresamente las funciones implícitas además de las explícitas. El matemático francés Lagrange (1736-1813) aportó dos grandes tratados sobre funciones: *Teoría de las funciones analíticas* y *Lecciones sobre el cálculo de las funciones*, en ellos restringe la noción de función, en comparación con la noción de función de Euler mencionada anteriormente, confinándola a las llamadas funciones analíticas, las cuales están definidas por una serie de potencias en x. En la definición que propone de la noción de función, la identifica como "*toda expresión de cálculo*":

> *Llamamos función de una o varias cantidades a* ***toda expresión de cálculo*** *en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas* (Lagrange, Théorie des fonctions analytique, citado por Rüting, 1984, p. 73).

Primera gran controversia.

Un problema determinante para la evolución del concepto de función, fue el problema de la cuerda vibrante. De hecho como lo señala Grattan-Guiness (1970, p. 2) este problema cuestiona gran parte de la matemática del siglo XVIII, y en particular los fundamentos del análisis y del cálculo.
El problema consiste en una cuerda elástica atada a dos extremos fijos (como la cuerda de una guitarra). Esta cuerda se estira hasta que adquiere una forma determinada, y en ese momento se suelta para vibrar libremente. El problema es encontrar una función que modele la forma de la cuerda en un cierto tiempo t. Este problema fue resuelto por el matemático francés D'Alembert al final de 1746 y publicado en 1749 en su *Histoire* (Youschkevitch, 1976). El mismo problema, también fue resuelto por Daniel Bernoulli y publicado en 1755.
D'Alembert encontró mediante argumentos matemáticos que la solución al problema de la cuerda vibrante estaba dada por la solución a la ecuación diferencial parcial: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; ($y = y(x,t)$ y a constante) conocida como la ecuación de onda, en donde la solución debería ser una expresión analítica, lo que significaba que la solución debería estar dada por una fórmula. Incluso al dar las condiciones de frontera para la solución D'Alambert concluye que la función debe ser impar, periódica y dos veces diferenciable, y esas deberían ser las únicas soluciones posibles (Kleiner, 1989. p. 286).
Antes de continuar, debemos considerar que en esos tiempos, se sostenía que: "si dos expresiones analíticas coincidían en un intervalo, entonces ellas coincidían dondequiera"
Euler coincide con D'Alambert en la ecuación pero difiere en la interpretación de la solución. Y en ese momento aparece la solución dada por D. Bernoulli, como: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{l}\right)$ una solución diferente de la de D'Alambert y, lo que es más importante, podía ser dada por diferentes fórmulas para diferentes valores del argumento. A diferencia de D'Alambert, D. Bernoulli, llega a su solución a través de argumentos físicos y de hechos muy conocidos en torno a vibraciones musicales.
La solución de Bernoulli, significaba implícitamente que cualquier función *f(x),* en (0, *l*) puede ser expresada mediante una serie del tipo: $f(x) = y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

Euler y D'Alambert arguyen entonces que esto es absurdo por que nos llevaría en última instancia a que cualquier función arbitraria tendría que ser impar y periódica (Kleiner, 1989, p. 287).
Los matemáticos del siglo XVIII se encuentran, así con una contradicción insoluble: dos respuestas han sido obtenidas para el mismo problema (Madrid, 1980). Surgió así una controversia en la cual tomaron parte matemáticos prominentes del siglo XVIII como: Euler, Lagrange, Fourier, D'Alambert, Bernoulli, etcétera.
La discusión en esencia se daba alrededor del concepto de función y a la conexión entre dependencia funcional y la posibilidad de expresar esta dependencia por medio de una fórmula. Aunque el debate no fue resuelto en ese siglo, la consecuencia más importante es que obligó a extender la definición de función hacía las funciones definidas por partes, que ya causaban controversia dado que existían funciones que se podían expresar tanto como fórmula y como una función por partes, por ejemplo la función valor absoluto:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x \;\; si \;\; x \geq 0 \\ -x \;\; si \;\; x<0 \end{cases} \;\; ; \; f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$$

Esta noción de función permaneció prácticamente sin cambio y, en 1797 aparece otra definición de función, dada por Lagrange, pero no fue hasta los inicios de 1800 cuando Fourier, en su trabajo sobre las series trigonométricas, encontró relaciones más generales entre las variables. Desafortunadamente las interrogantes planteadas alrededor del concepto de función no fueron resueltas hasta el siglo XX. De hecho otra gran controversia, en torno al mismo concepto surgió en 1900 y en donde, otra vez eminentes matemáticos toman parte, en este caso se trata de Baire, Borel, y Lebesgue.
El punto de vista de Euler sobre las funciones evolucionó a través de varios años; en 1755 comienza a construir una noción mucho más abstracta y universal de función, en la cual el término "expresión analítica" no aparece. En su obra "*Institutions calculi differentials*" dice:

> *Sin embargo, si algunas cantidades dependen de otras, de tal modo que, si las últimas se cambian, las primeras también sufren cambios, entonces, las primeras cantidades son llamadas funciones de éstas últimas. Esta es una noción muy amplia y comprende en sí misma a todos los modos a través de los cuales, una cantidad puede ser determinada por otras. Por lo tanto, si x denota una cantidad variable, entonces, todas las cantidades que dependen de x, en cualquier forma que sea o que son determinadas por ella, son llamadas sus funciones* (Euler, 1755, "Institutiones calculi differentialis", citado por Rüthing, 1984, p. 72).

Sin embargo, como se puede constatar, permanece la concepción de que una función es aquella que se puede representar mediante una sola expresión analítica.

2.3.2. Segunda Etapa.

El trabajo de Fourier sobre la conducción de calor, *Analytic Theory of Heat* publicado en 1822, fue un paso revolucionario en la evolución del concepto de función. Fourier dio una definición de función en la que hacía notar que lo principal era la asignación de valores para la función; que esta asignación fuera llevada acabo por una o varias fórmulas no era de importancia.

2.3.3. Tercera Etapa.

En el siglo XIX, las imprecisiones alrededor de los conceptos de función y de continuidad inquietaban grandemente a la comunidad científica. De esta etapa, destacan dos definiciones de función, una dada por B. Riemann, quien definió función como:

> *Permítasenos suponer que si **z** es cantidad variable la cual puede asumir, gradualmente, todos los posibles valores reales entonces, si a cada uno de estos valores le corresponde un único valor de la cantidad indeterminada **w**, **w** es llamada función de **z*** (Riemann, 1851. citado por Rüthing, 1984. p. 74).

Esta definición no establece límites en la relación entre las variables que definen a la función y por supuesto no despejaba la imprecisión.
La otra definición fue dada por G. L. Dirichlet, quien de esta forma llega a formular por primera vez el concepto moderno de una función y = $f(x)$ en un intervalo a < x < b. En donde se define función de la siguiente forma:

> "**y** es una función de una variable **x**, definida en el intervalo a < **x** < b, si a todo valor de la variable **x** en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable **y**. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia" (Kleiner, 1989, p. 291).

Esta definición fue extremadamente general, no se decía ni una sola palabra sobre la necesidad de dar a la función por medio de una sola fórmula, sobre todo el dominio de definición. Más aún, no era ni siquiera necesario dar una fórmula del todo, sino que podía ser definida en palabras y sobre todo la frase "es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia" fue la que causo más controversia.
En 1829, Dirichlet en un artículo formalizó los resultados de su maestro Fourier, quién precisa con todo rigor las condiciones suficientes, que ahora llevan su nombre, para que una serie de Fourier represente en un intervalo acotado dado una función previa y fijada arbitrariamente: las condiciones de Dirichlet son:

1. Que la curva tuviera solamente un número finito de discontinuidades (saltos o rupturas) para el mismo intervalo.
2. Que el número de máximos y mínimos relativos sobre la curva fuera finito (esto es, no-infinito) sobre un intervalo

Dirichlet dio su famoso ejemplo de función: $f(x)=\begin{cases} m, & si\ x\ es\ racional \\ p, & si\ \ x\ es\ irracional \end{cases}$; como una función que no satisface las condiciones de su teorema:
Permítasenos a manera de síntesis destacar la enorme importancia de esta función de Dirichlet, dadas las condiciones que se tenían en esa época:
Si bien se "conocía" la naturaleza arbitraria de una función, hasta ese entonces: desde Euler a Cauchy las funciones se consideraban explicita o implícitamente como:
Producto de expresiones analíticas.
Expresiones que se pueden representar gráficamente como curvas.
Continuas.
Diferenciables.
Dominio los reales.
Y toda expresión que no cumpliera lo anterior no se le consideraba ciertamente función (Kleiner, 1989. pp. 291-295; Monna, 1973. pp. 58-60). La función propuesta por Dirichlet, definida en un intervalo, contradecía todos los supuestos anteriores.

A partir de ello, un diluvio de funciones "patológicas", y clases de funciones, se sucedieron en el siguiente medio siglo. Los matemáticos comenzaron a trabajar con funciones que no satisfacían las condiciones 1 y 2 de Dirichlet y que tenían el número más grande de discontinuidades y las propiedades más extravagantes.

> "Me he alejado, como de cierta llaga lamentable con miedo y horror de funciones continuas y derivables en ningún punto (carta de Hermite a Stieltjes del 20 de mayo de 1893. Citado por Monna 1973. p. 65)

Un malestar en la comprensión y el uso del concepto de función se manifiesta en ese tiempo y se condensa en la siguiente frase:

> Un [texto] define función de manera Euleriana; el otro que ***y*** debe cambiar con x de acuerdo con una regla, sin explicar este misterioso concepto; el tercero la define como Dirichlet; el cuarto no la define en absoluto; pero todos deducen de ellas, conclusiones que no están contenidas en ellas" (Hankel, 1870, citado por Kleiner, 1989 p. 293).

Segunda gran controversia año 1900.

Tal parece que esta segunda diferencia que surge alrededor del significado de función, en realidad se debe a cuestionamientos filosóficos de los fundamentos de la matemática, en donde al tratar de definir con mayor precisión los objetos matemáticos se cuestionaban precisamente dichos fundamentos, entre los cuales y por supuesto se encontraba el concepto de función.

A pesar de que ya se contaba con las definiciones de función de Dirichlet y Riemann y se contaba además con la definición de continuidad como una propiedad local dada por Darboux, recordemos que hasta ese entonces la continuidad se consideraba una propiedad global, los debates y forcejeos alrededor del concepto de función se seguían dando. En esta etapa destacan los nombres de R. Baire, E. Borel, Hadamard y H. Lebesgue (Kleiner, 1989. p. 296; Monna, 1973. p. 65).

Estos debates cuestionaban tanto los métodos de análisis como los conceptos definidos.

Tenemos que tomar en consideración que aunque por ese entonces la teoría de conjuntos de Cantor penetraba gradualmente en las matemáticas, todavía existían muchos cuestionamientos y discusiones alrededor de ello. También prevalecía el hecho de que las funciones discontinuas y funciones no-derivables no eran aceptados como objetos matemáticos. Además seguía predominando la idea de que una función debería ser una expresión analítica.

Muestra de ello, es la forma en que G. Boole, definía en 1854, a una función como:

> Cualquier expresión algebraica envolviendo al símbolo x es llamada una función de x, y puede ser representada bajo la forma abreviada en general como $f(x)$ (Citado por Rüthing, 1984. p. 75).

Gran parte del trabajo de Borel, estaba encaminado a definir con precisión los objetos matemáticos y parten de sus trabajos en teoría de funciones, una interesante lista de libros de Borel al respecto se encuentra en Monna (1973. p. 68).

Fijaba Borel que: "cualquier definición en matemáticas debería satisfacer la condición de que si dos matemáticos estuvieran hablando sobre un objeto matemático, deberíamos estar ciertos que ellos se refieren al mismo objeto." (Borel, La définition en mathématique. Citado por Monna, 1973. p. 67). Esto, en el caso de funciones, resultaba catastrófico.

Como es conocido, Baire definió como funciones de clase 0 a las funciones continuas que son límite de una sucesión de funciones capaz de representarse analíticamente; de clase 1 a las funciones discontinuas que son límite de sucesiones de funciones de clase 0, de clase 2 funciones que no están en la clase 1, pero son límite sucesión de funciones de clase 1, ..., hasta incluir los ordinales transfinitos.
Por su parte, Lebesgue desarrolla en su tesis su conocido tratado sobre teoría de la medida, en la que se basa en parte en las ideas de Borel sobre la teoría de funciones publicada en 1898.
Lebesgue, demuestra que existen funciones no representables analíticamente en el sentido de Baire y define o presenta una función que no se puede incluir en la clasificación de Baire, pero para ello utiliza el axioma de Zermelo, teoría de cardinales y algunos teoremas de Cantor. El uso en su trabajo de métodos no constructivos le lleva a una controversia con Borel, (Kleiner, 1989. pp. 295-296; Monna, 1973. pp. 71-74)
Lebesgue define lo que entiende por expresión analítica y por función representable analíticamente:

> Funciones representables o expresables analíticamente. Una función es analíticamente representable o expresable cuando uno puede construirla, siguiendo una ley sobre algunos funcionamientos, esta ley de construcción constituye una expresión analítica (Lebesgue, H. Sur les fonctions représentables analytiquement 1905. citado por Monna, 1973 p. 72)

Hace consideraciones a esas leyes e introduce clases finitas y transfinitas de funciones en forma análoga a lo hecho por Baire. El problema fue mostrar que existen funciones en cualquier clase y que existen funciones que no pertenecen a esas clases. Para hacer esto él define tales funciones.
Esta cuestión de la existencia y definición es el punto de controversia con Borel.

> "En general uno demuestra la existencia de un objeto mientras da el significado al nombre; Esto no es, sin embargo siempre así, daré un ejemplo de ello más adelante, por mientras dejo algunas reservas (Lebesgue, H. Sur les fonctions représentables analytiquement 1905. citado por Monna, 1973 p. 73)

Para Borel , los métodos no constructivos no eran válidos en la matemática, esto es, abre el debate de intuicionismo versus formalismo que a fin de cuentas nos lleva al significado y naturaleza de las matemáticas, asunto todavía en debate.

> "Gran parte del debate fue sobre teoría de funciones –el punto crítico viene a ser cuando una definición de un objeto matemático (digamos un número o una función) dado, legitima la existencia de tal objeto (Kleiner, 1989. p. 296).

Los cuestionamientos continuaron, muchos matemáticos famosos participaron y dieron ímpetu al continuo desarrollo histórico del concepto de función, de hecho se considera como uno de los periodos más fecundos de la matemática al comprendido entre fines de siglo XIX y XX, en donde varias ramas de la matemática surgieron como: Análisis complejo, Teoría algebraica de los números, Geometrías no-Euclidianas, Álgebra abstracta, Teoría de conjuntos, Lógica matemática, y otras tantas se fortalecieron como: Análisis real, Probabilidad, Cálculo de variaciones, etcétera.

Cuarta Etapa.

Carathéodory, define en 1917 a una función como una correspondencia de un conjuntoa los números reales (Monna, 1973. p. 82) y en 1939 aparece publicada en la serie Bourbaki la definición de función más aceptada hasta nuestros días que se caracterizó por la arbitrariedad del dominio y el rango. Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios.

> Sean E y F dos conjuntos, los cuales pueden ser o no distintos. A la relación entre una variable elemento *x* de E y una variable elemento *y* de F es llamada una relación funcional en *y* si, para toda $x \in E$, existe un único $y \in F$ el cual esta en la relación dada con x.
>
> Damos el nombre de función a la operación con la cual se asocia cada elemento $x \in E$ con el elemento $y \in F$ el cual esta en la relación dada con x; y se dice ser el valor de la función para el elemento x, y la función se dice ser determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función (Bourbaki N. 1968 Théorie des ensembles. Citado por Rüthing, 1984. p. 77).

"Bourbaki también dio la definición de una función como un cierto subconjunto del Producto Cartesiano E X F. Esta es, por supuesto la definición de función como un conjunto de pares ordenados" (Kleiner, 1989. p. 299). La noción de una función matemática con esta formulación se mezcló con el concepto de correspondencia, mapeo, y transformación (Vilenkin, citado por Martínez, 1993). Sin embargo, el tema no ha sido completamente resuelto. Algunas discusiones recientes entre los matemáticos han intentado remplazar la teoría de conjuntos con la teoría de categorías como un fundamento para las matemáticas. En estas discusiones, el concepto de función ha jugado un papel significativo. Kleiner (1989), establece:

> [La Teoría de Categorías] describe una función como una "asociación" de un "objeto" *A* con otro "objeto" *B*. Los "objetos" *A* y *B* no necesitan tener elementos (es decir, no necesitan ser conjuntos en el sentido usual). De hecho, los objetos *A* y *B* pueden ser eximidos de ello totalmente. Una "categoría" puede, entonces definirse como consistente de funciones (o "mapeo"), *que son tomados como conceptos indefinidos (primitivos)* que satisfacen ciertas relaciones o axiomas (Kleiner, 1989, p. 299).

La noción de categorías es más básica para las matemáticas que los conjuntos, y las categorías se pueden definir en términos de funciones, pero aún no han ganado una amplia aceptación entre los matemáticos. Sin embargo, esto sugiere que la evolución del concepto de función es continua y dinámica.

Conclusiones:

Sin duda alguna la educación es una ciencia dependiente, y depende, por ejemplo, de la antropología, la filosofía, la física, la historia, la sicología, la sociología, etcétera. Debido a ello, y a la propia evolución de los diferentes campos, los conceptos matemáticos y su uso en las matemáticas han pasado a través de numerosos cambios. El análisis de la evolución histórica del concepto de función nos muestra que éste es un concepto muy complejo, y que para llegar a la definición actual se tuvo que pasar por un proceso largo y laborioso en el cual matemáticos notables tuvieron serias dificultades y problemas.

Muestra también que los conceptos matemáticos no son entes aislados, que por el contrario como parte de una gran estructura lógico formal, para que los conceptos matemáticos evolucionen es necesario una evolución de la propia matemática. Así por ejemplo para que el concepto de función evolucionara, fue necesario la evolución del concepto de variable, de número real, de conjunto, etcétera. y el surgimiento del álgebra simbólica, de la geometría analítica, del cálculo diferencial e integral, del análisis matemático, etc. para poder así dar forma a lo que hoy se conoce como función.

Debido a ello la definición de función, en su forma actual, es un objeto muy sofisticado, consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años, y aún más, se considera que este concepto continua en evolución.

La exploración histórica del concepto de función nos muestra que este concepto evolucionó a través de distintas etapas, en las cuales encontramos diferentes definiciones de función (Rüthing, 1984); por otro lado, una revisión de los textos de álgebra y cálculo a través del tiempo nos muestra distintas versiones de la definición de función que coinciden con las definiciones de función dadas en las etapas históricas, esto nos proporciona una similitud entre el desarrollo matemático de las funciones y la enseñanza de las funciones en las escuelas Dreyfus (1990, p. 120).

Por otro lado, curiosamente algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función, -reportadas por algunos investigadores-, se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII sobre el concepto de función (Sierpinska, 1992; Markovits et al., 1986, 1988; Martínez, 1993):

También hay evidencias de que el reconocimiento de los conceptos de dominio y rango por parte de los estudiantes, pueden ser los últimos conceptos que aparezcan en su desarrollo del concepto de función. Estas dificultades corresponden a obstáculos cognitivos relacionados con el desarrollo histórico del concepto de función.

Entre los obstáculos epistemológicos significativos ligados al desarrollo histórico de la noción de función detectados, se pueden mencionar los siguientes (Sierpinska, 1992; Ruiz, 1993):

Obstáculo de la concepción estática; Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números; Obstáculo de la razón o proporción; Obstáculo de la concepción algebraica.

Durante la evolución del concepto encontramos diferentes definiciones de función, y cada definición corresponde a diferentes niveles de abstracción.

El salto de un nivel a otro se ha dado con muchas dificultades, pero estos saltos se han efectuado sobre la base de necesidades específicas, incluso, como hemos visto, esto de definir los objetos matemáticos con base a necesidades específicas para el desarrollo de sus teorías, ha llevado a serios cuestionamientos ontológicos.

El análisis realizado también permite obtener algunas ideas pedagógicas coincidentes con Sierpinska (1992), para la enseñanza del concepto de función y que de alguna manera se pueden incluir en la implementación algún modelo didáctico (Díaz, 2001):

- Debemos de buscar que el estudiante se interese en la explicación de los cambios, y en encontrar regularidades entre los cambios. Que perciban los cambios y las relaciones entre ellos como un problema digno de una explicación científica. Además se les debe dar la oportunidad de utilizar este conocimiento para explicar fenómenos de su vida diaria.
- Las funciones en forma analítica se presentarán primero como una herramienta en la modelación de situaciones de la vida real. La presentación de la situación real no debe idealizarse hasta el punto de convertir la construcción del modelo en un ejercicio simple, fácil y con una única respuesta.
- Es conveniente utilizar métodos de interpolación para el uso y construcción de tablas numéricas, ya que estas proporcionan contextos matemáticos dentro de los cuales se obtienen niveles más profundos de la noción de función.
- Debemos de conducir a los estudiantes a que sean capaces de percibir y verbalizar las variables que cambian. Es decir, los estudiantes deben de ser capaces de decir no sólo q*ué cambia,* sino también *cómo cambia.*
- Se debe de proporcionar un amplio espectro de formas de dar las funciones, de hablar sobre las funciones, y representar las funciones. Es decir el estudiante debe adquirir cierta flexibilidad en el uso de los modos de expresión y representación de las funciones.
- A nivel de precálculo una definición parecida a la Dirichlet estaría justificada desde los puntos de vista didáctico y epistemológico. Esto esta de acuerdo con la propuesta de Sierpinska de introducir la definición de función a través de una definición informal de Dirichlet, que coincide con el desarrollo histórico del concepto de función (Cap1, p. 16), y con la opinión de Sfard de no utilizar una descripción estructural para introducir una nueva noción matemática. (Cap. 2, p. 73).
- Introducir los conceptos de funciones a través de problemas prácticos de la vida real, a fin de que el alumno los asocie con conceptos familiares (Cuevas, 2002, p. 31; Marnyanski, Cap. 2, p. 53), y para que los alumnos encuentren sentido a la relación situación-gráfica (y viceversa) Janvier (Cap. 2, p. 62). Además de que una comprensión general del concepto debe de incluir el ser capaces de utilizarlo en un contexto diferente al que se enseño (Cuevas, 2002, p. 32; Brosseau, 1997, pp. 54-69; Markovits et al., Cap. 2, p. 62; Sierpinska, Cap. 2, p. 70), las funciones deben de aparecer en primer lugar como herramientas para modelizar ciertas situaciones de la vida real o científicas.

- Que el alumno enfrente y realice tareas de transformación y de conversión de representaciones entre al menos dos sistemas de representación, como sugieren Duval, 1998, p.185; Even, Cap. 2, p. 65; Janvier, Cap. 2, p. 60; Sierpinska, Cap. 2, p. 71; Thomas, Cap. 2, p. 51.

Por otro lado, las investigaciones revisadas tienen la característica de que toman como objeto de estudio al sujeto, y analizan el comportamiento que éste manifiesta en el curso de situaciones. Sin embargo, se le dedica poco espacio al análisis de las situaciones de enseñanza que producen estos aprendizajes, concediéndole poca significación a la mediatización que ejerce el sistema didáctico sobre el alumno. También, al analizar la enseñanza a través de la observación de las conductas, se debe de tomar en cuenta, que éstas no tienen un sentido intrínseco, y que no se pueden comprender si no es en relación a las condiciones que las han hecho posibles (Díaz, 2001).

Continuando con esta idea, también al efectuar el análisis de los resultados del aprendizaje de los alumnos, se deben de considerar las condiciones en que este aprendizaje se ha obtenido, tratando de determinar los posibles fenómenos didácticos ligados a la actividad de enseñanza. En particular creemos, que muchos de los problemas con la comprensión del concepto de función, se ahondan o se magnifican con una forma deficiente de enseñanza, y que en general está faltando un esfuerzo por orientar la instrucción alrededor del proceso de aprendizaje.

En lugar de esperar que los estudiantes aprendan los nuevos materiales imitando la conducta del profesor, o escuchando una clase, debemos de considerar los procesos mentales a través de los cuales se adquieren los nuevos conceptos abstractos. Este último acercamiento requiere una comprensión de, o por lo menos una hipótesis sobre, la psicología de adquisición de conceptos.

Por todo esto, para la didáctica y en particular para nuestro trabajo docente, el desarrollo histórico constituye un factor importante puesto que contribuye en gran medida a:

1. tomar conciencia por parte del profesor de la verdadera complejidad del tema a enseñar, al ver los innumerables intentos para definir con precisión un concepto matemático, y cómo sólo la contribución de notables matemáticos durante siglos han logrado;
2. identificar obstáculos epistemológicos significativos;
3. a proponer diversas formas de construcción del concepto de función y desde luego;
4. a no plantear soluciones triviales al problema de la enseñanza, de conceptos matemáticos tradicionalmente complejos.

Bibliografía.

Cuevas, A. 2002, Les Projets D'action Practique : Un Programme Didactique Pour Enseigner les Mathématiques. Argentorotatum 2002 Srasbourgo Francia.

Boyer, C. B. (1946), Proportion, equation, function. Three steps in the development of a concept. Scripta Mathematica. 12, 5-13.

Brosseau, G. (1997), Theory of Didactical Situations in Mathematics, Kluwer Academic Publishers.

CCH. Matemáticas IV y V del Plan de estudios de bachillerato general del Colegio de Ciencias y Humanidades del D. F., México, 1996.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In P. Nesher, & J. Kilpatrick. (Eds.). Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education, pp., 113-134. Cambridge, Great Britain: Cambridge University *Press*.

Díaz G. J. L. 2001, Diseño y Construcción del Sistema Tutorial Inteligente Funcion(x), Tesis doctoral, Universidad Autónoma del estado de Morelos.

Dubinsky, E. y, Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 85-106.

Duval, R. (1998). Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II. Editor F. Hitt. Gpo. Edit. Iberoamérica. México.

Fey, J., & Good, R. (1985). *Rethinking the sequence and priorities of high school mathematics curricula*. In C. R. Hirsch (Ed.). The secondary school mathematics curriculum (pp. 43-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldenberg, P. (1988). *Mathematics, metaphors and human factors: mathematical, technical and pedagogical* challenges *in the graphical representation of functions*. Journal of Mathematical Behaviours. 7(2), pp. 135-174.

Kieran, K., Garançon, M., Lee, L., Bolleau, A., (1993). *Technology in the learning of functions: Process to object?.* Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Pacific Grove. Ca. USA. Vol. 1. pp. 91-99.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The college Mathematics Journal. 20(4), 282-300.

Markovits, Z., Eylon, B. S. & *Bruckheimer*, M. (1986*). Functions today and yesterday.* For the Learning of Mathematics. Vol. 6, No.2, pp. 18-24.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M.(1988). *Difficulties students have with the function concept.* In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.). The Ideas of Algebra. 1988 Yearbook, pp. 43-60. Reston, VA: NCTM.

Martínez, A. M., (1993)*. Knowledge and Development of Functions in a Technology-Enhanced High School Precalculus Class: A Case S*tudy. Doctoral Dissertation. The Ohio State University.

Monna A. F. (1972/73). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. Arch. Hist. Ex. Sci. 9

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional standarts for teaching mathematics. Reston, VA: The Author.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, D. C: National Academy Press.

Nicholas, C.P. (1966*). A* dilemma *in definition*. American Mathematical Monthly, 73, 762-768.

Norman, Alexander (1992). *Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 215-232.

Norman, Alexander (1992). Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 215-232.

Ruiz, H. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Borrador de Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

Rüting, Dieter. (1984). *Some definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki.* The Mathematical *Intelligencer*. Vol. 6, No. 4.

Selden, A., & J. Selden (1992). Reaserch perspectives on conceptions of function sumary and overview. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 1-21.

SEP. Libro de texto de matemáticas de tercer año de secundaria, 1999. Secretaria de Educación Publica, México.

Sfard, A. (1989*).* Transition *from operational to structural conception: the notion of function revisited*. Proceedings of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3 (pp. 151-158). Paris, France.

Sierpinska, Anna, (1992). *On undesrtanding the notion of function.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 23-58.

Usiskin, Z., & Senk, S. L. (1992). The University of Chicago School Mathematics Project Materials. Glenview, IL: Scott, Foresman.

Vilenkin, N. Ya. (1968). *Stories about sets.* Academic Press.

Youschkevitch, A. P. The *Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. Hist. Ex. Sci. 16 (1976) 37-85.