ENSEÑANZA DE LAS INTEGRALES APLICADAS CON GEOGEBRA

René Saucedo, Joaquín Godoy, Rubén Fraire, Héctor Herrera.

resa6314@hotmail.com, joaquin_godoy@utcj.edu.mx, ruben_fraire@utcj.edu.mx, hherrera@itcj.edu.mx

Instituto Tecnológico de Cd. Juárez y Universidad Tecnológica de Cd. Juárez. México

Autor de correspondencia: René Saucedo

Resumen. Nuestro trabajo es una alternativa para la enseñanza y la motivación en el aprendizaje del cálculo integral mediante el uso del software GeoGebra, con modelos reales de aplicación, el objetivo de la investigación es mostrar la vinculación que existe entre la enseñanza del cálculo integral y la manipulación algebraica. Utilizamos GeoGebra para facilitar la interpretación de los objetos que se estudian enriqueciendo la simulación y la visualización del tema.

Palabras clave: Enseñanza, aprendizaje, calculo integral.

Abstrac. Our work is an alternative for teaching and motivating the learning of integral calculus through the use of GeoGebra software, with real application models, the objective of the research is to show the link that exists between the teaching of integral calculus and manipulation algebraic. We use GeoGebra to facilitate the interpretation of the objects under study, enriching the simulation and visualization of the subject.

Keywords: Teaching, learning, integral calculus.

Introducción

Dentro de las bondades de nuestro tiempo es menester reconocer que la tecnología interactiva ha venido a proporcionar otra dimensión en el proceso enseñanza-aprendizaje, en particular para las matemáticas. La versatilidad de esta tecnología radica en la manera dinámica para abordar algunos de sus temas mediante el uso de modelos creados en computadora[3,4], para el estudiante es un lenguaje que se ha convertido en algo cotidiano a la vez que lo abstrae de la monotonía del cuaderno de cuadricula. Por mucho tiempo una preocupación natural en toda sala de maestros ha sido: cómo abordan los alumnos los problemas matemáticos para su solución?, esta problemática ha sido abordada recurrentemente por educadores[5], matemáticos y profesionales dedicados a la investigación del proceso de enseñanza de las matemáticas y aunque ha habido avances la diversidad de particularidades y de entornos no ha permitido encontrar una solución específica para optimizar el proceso de la enseñanza.

Fecha de recpción: 14-09-2013
Fecha de aceptación: 27-11-2013

A lo largo de la evolución de la educación se ha venido dando el fenómeno de adecuación[6] al proceso enseñanza-aprendizaje en cada etapa histórica, en algunos momentos muy lentamente y otros por demás acelerados, cada uno de ellos buscando resolver su problemática en particular, la nuestra es quizá la etapa más álgida ya que se requiere que sea un proceso, flexible, dinámico, interdisciplinario y multicultural y con una serie de atenuantes socio-económicas que la rebasan continuamente. Desde nuestra perspectiva si la tecnología permite a los alumnos visualizar e interactuar con los objetos de estudio y les permite llegar a la solución de un problema específico, consideraremos que estamos participando activamente para que el alumno construya su propia estrategia de solución y/o de crearle un ambiente de libertad que fomente el trabajo grupal y la participación propositiva a los problemas planteados, en el entendido que el desarrollo en las actividades de aprendizaje, el estudiante deberá poner en juego el máximo de sus potencialidades intelectuales. La visualización y el uso de las múltiples representaciones de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación de conceptos. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático, y considerar lo visual como un preludio hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje[7,8]. Entonces, por lo anterior es importante diseñar formas de trabajo para el aula, planeando estratégicamente lo que se quiere que los alumnos hagan y como guiarlos para que lo hagan, así el uso de modelos creados en computadora permiten al estudiante interactuar de manera directa con el problema planteado da una posibilidad y visión de desarrollo educativo, además que en el proceso de trabajo en equipo permite una posibilidad de sociabilización ya que en el ambiente escolar en estos últimos años a preponderado este aspecto de la educación, hablando por supuesto del entorno de la enseñanza a través de competencias. "En matemáticas cuando los estudiantes se enfrenta a problemas donde solo tienen que aplicar reglas o algoritmos, generalmente lo hacen con cierta fluidez y eficacia al resolverlos. Sin embargo cuando se le pide explicar o interpretar cierta información relacionada con la solución de estos problemas, estos mismos alumnos muestran serias dificultades[9]".

Duval en su teoría de los registros de expresión propone remplazar la acumulación de conocimientos ajenos desarticulados, por un modelo en donde éstos se combinan en una ayuda recíproca. En este sentido los conceptos son vistos como objetos por aprehender, y "mientras más interacción se tenga con el objeto, se tendrá una mejor percepción o representación mental del mismo[10]". Por su parte Hit[11] considera que la visualización de los conceptos matemáticos está ganando terreno, al grado tal que los mismos avances psicopedagógicos han demostrado la utilidad de crear imágenes mentales apropiadas para potenciar su conceptualización. Así, "…pensar visualmente demanda procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica". Agrega también que: "presentaciones no visuales son utilizadas para comunicar ideas matemáticas[12]"

Problema 1:

Un ejemplo clásico del planteamiento escolar es sin duda el del Teorema de Torricelli, el cual utilizamos en algunos problemas de física con el cálculo integral como herramienta. El teorema establece que la velocidad de salida de un líquido por una perforación practicada en un recipiente a una profundidad h desde el borde como se muestra en la Fig. 1 está dada por:

$$v = \sqrt{2gh}$$

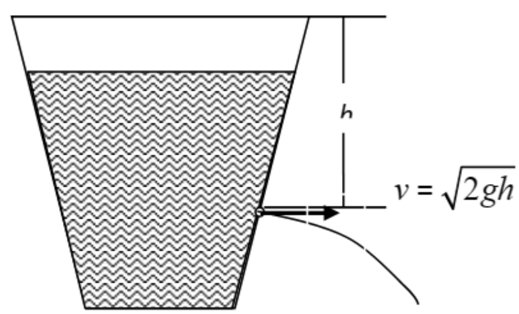

Fig. 1 Recipiente perforado a una distancia h del borde

El líquido sale, el nivel va disminuyendo y por lo tanto también la velocidad de salida, la velocidad de salida no depende de la forma del recipiente, únicamente depende de la profundidad h.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del teorema.

Se tiene un depósito en forma de cono invertido como se muestra en la Fig. 2 de radio R y altura H. En el fondo del depósito se la ha practicado una perforación de radio r, si al inicio el depósito está lleno de agua, determinar el tiempo que tarda en vaciarse.

Sean: $H = 2.0\,m$ $R = 1.0\,m$ $r = 0.5\,m$

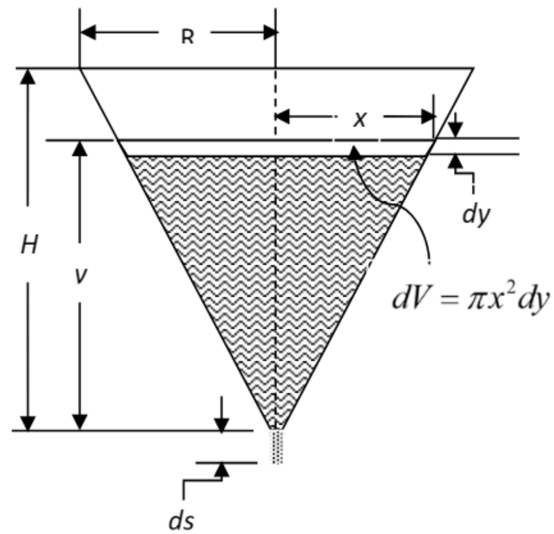

Fig. 2 Recipiente cónico

El teorema de la conservación de la masa dice que: el volumen de agua que sale por la perforación, es igual al volumen que disminuye en el depósito -si la densidad es constante- estudiaremos el fenómeno en un tiempo dt , ilustrado en la Fig. 1

En un tiempo dt el volumen que disminuye en el tanque está dada por:

$$dV = \pi x^2 dy$$

y el volumen que sale por la perforación en el mismo tiempo dt, está dada por:

$$dV = \pi r^2 ds$$

La cantidad de agua que sale por el orificio es igual a la que disminuye dentro del depósito, por lo que tenemos:

$$dV = -dV$$

El signo negativo se asigna por el aumento en la salida de agua, produce una disminución en el volumen del depósito

$$\pi x^2 dy = -\pi r^2 ds \qquad (1)$$

ds es la distancia que recorre una capa de agua que sale por el orificio en el tiempo dt, por lo que $ds = vdt$ $ds = vdt$, donde v es la velocidad con la cual sale el agua por la perforación, tenemos que:

$$ds = \sqrt{2gy}dt$$

Sustituyendo en (1)

$$\pi x^2 dy = -\pi r^2 \sqrt{2gy}dt = -\pi r^2 \sqrt{2g}\, y^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\pi x^2 dy = -\pi r^2 \sqrt{2g}\, y^{\frac{1}{2}} dt \qquad (2)$$

Donde x es el radio de la superficie libre a un cierto tiempo t, este no es constante, depende de la altura.

Considere los triángulos que se forman en el lado izquierdo mostrado en la Fig. 3

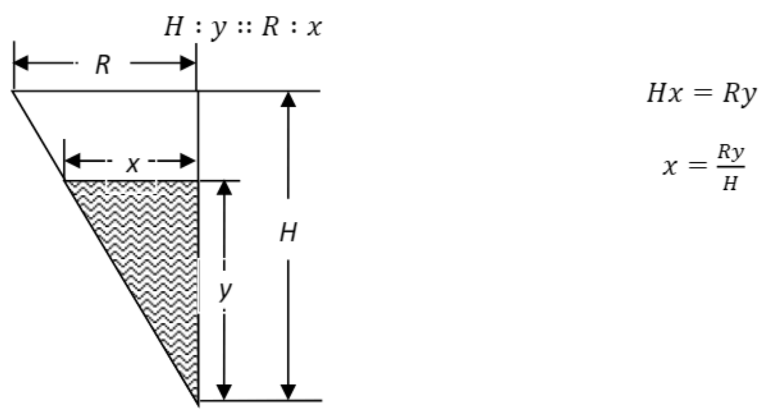

Fig. 3 Sección del depósito con dimensiones x , y.

Sustituyendo en (2) tenemos

$$\pi \frac{R^2 y^2}{H^2} dy = -\pi r \sqrt{2g}\, y^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\frac{R^2 y^2}{H^2 r^2 y^{\frac{1}{2}}} dy = -\sqrt{2g}\, dt$$

$$\frac{R^2}{H^2 r^2} y^{\frac{3}{2}} dy = -\sqrt{2g}\, dt$$

Integrando, tenemos

$$\frac{R^2}{H^2 r^2} \int y^{\frac{3}{2}} dy = -\sqrt{2g} \int dt$$

$$\left(\frac{R^2}{H^2 r^2} \right) \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right] = -\sqrt{2g}\, t + C$$

$$\frac{2R^2}{5H^2 r^2} = -\sqrt{2g}\, t + c \qquad (3)$$

Para determinar el valor de la constante c, utilizamos las condiciones iniciales, cuando $t = 0$ el deposito está completamente lleno, esto es $y(0) = H$, por lo que de (3)

$$y(0) \Rightarrow \frac{2R^2 H^{\frac{5}{2}}}{5H^2 r^2} = c$$

$$c = \frac{2R^2 H^{\frac{1}{2}}}{5r^2}$$

Por lo que

$$\frac{2R^2}{5H^2r^2}y^{\frac{5}{2}}=-\sqrt{2g}t+\frac{2R^2H^{\frac{1}{2}}}{5r^2}$$

$$y^{\frac{5}{2}}=-\frac{2H^2r^2}{2R^2}\sqrt{2g}t+\frac{2R^2H^{\frac{1}{2}}}{5r^2}\left(\frac{5H^2r^2}{2R^2}\right)$$

$$y^{\frac{5}{2}}=\frac{5H^2r^2}{2R^2}\sqrt{2g}t+H^{\frac{5}{2}} \qquad (4)$$

Cuando $y=0$, $t=t_v$ es el tiempo que tarda en vaciarse, sustituyendo en la última expresión

$$0=-\frac{5H^2r^2}{2R^2}\sqrt{2g}t_v+H^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{5H^2r^2}{2R^2}\sqrt{2g}t_v=H^{\frac{5}{2}}$$

$$t_v=\frac{2R^2H^{\frac{5}{2}}}{5H^2r^2\sqrt{2g}}=\frac{2R^2H^{\frac{1}{2}}}{5r^2\sqrt{2g}} \qquad (5)$$

$$t_v=\frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

Podemos dar la altura y del nivel del agua en términos de t y de t_v, factorizando $H^{\frac{5}{2}}$ de (4) tenemos

$$y^{\frac{5}{2}}=H^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{5H^2r^2\sqrt{2g}t}{2R^2H^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$y^{\frac{5}{2}}=H^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{5r^2\sqrt{2g}t}{2R^2H^{\frac{1}{2}}}\right)$$

De (5) vemos que

$$\frac{5r^2\sqrt{2g}}{2R^2H^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{t_v}$$

Por lo tanto:

$$y^{\frac{5}{2}} = H^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{t}{t_v}\right) \qquad\qquad y = H\left(1 - \frac{t}{t_v}\right)^{\frac{2}{5}} \qquad (6)$$

Si t=0, y=H   Entonces $t=t_v$, y=0.   Resultados que eran de esperarse.

El modelo del problema que los alumnos trabajan en el laboratorio de matemáticas, con el cual logran observar diferentes medidas de recipiente velocidad de vaciado etc. Las siguientes pantallas de GeoGebra Figuras 4 y 5, son ejemplo de la visualización del planteamiento problema usado para la investigación.

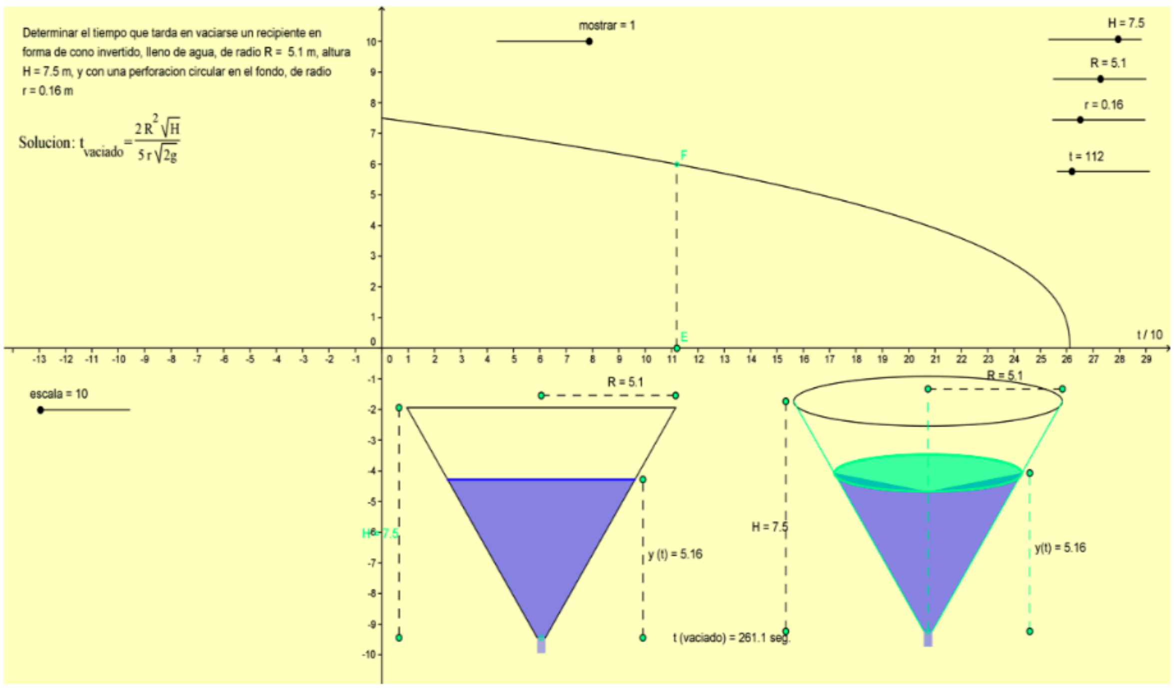

Fig. 4 Construcciones en GeoGebra

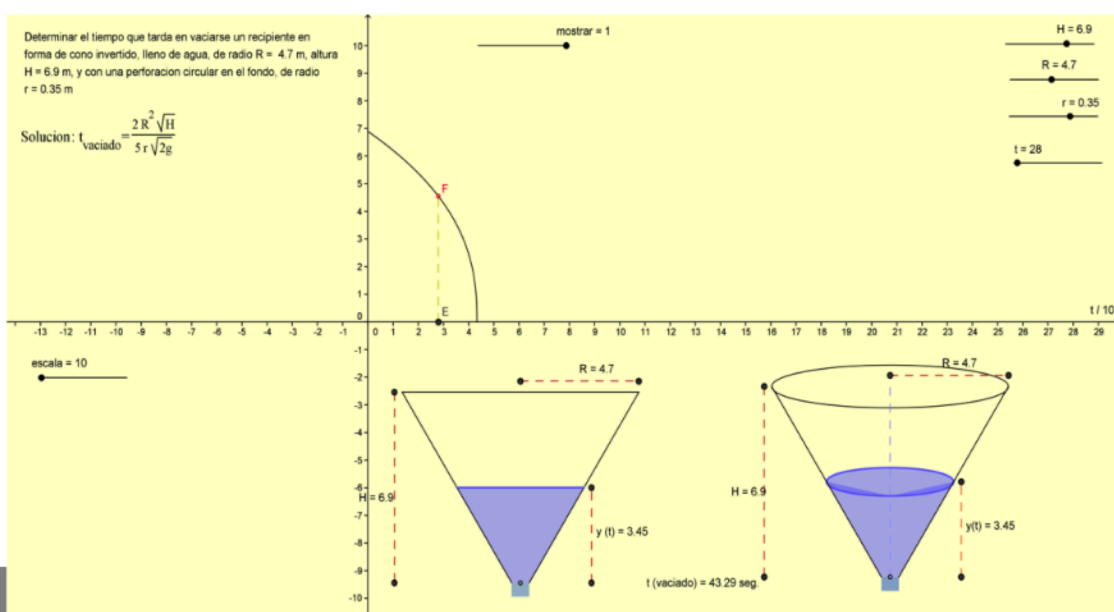

Fig. 5 Construcciones en GeoGebra del planteamiento problema para la investigación

Problema 2:

Se tiene un deposito hemisférico de radio R (ver Fig. 6). En el fondo del depósito se la a practicado una perforación de radio r, si al inicio el depósito está lleno de agua, determinar el tiempo que tarda en vaciarse. $R = 2.0\ m$ y $r = 0.5\ cm$

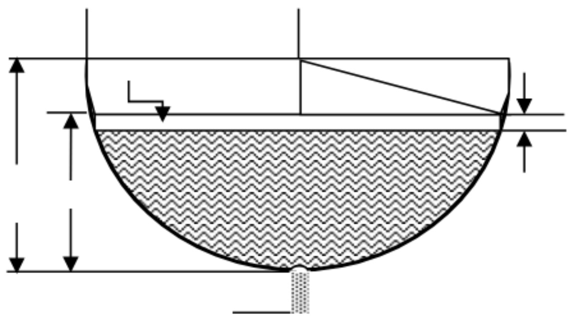

Fig. 6

Utilizaremos el teorema de la conservación de la masa, lo cual se traduciría a decir que el volumen de agua que sale por la perforación, es igual al volumen que se disminuye en el depósito (si la densidad permanece constante), estudiaremos el fenómeno en un tiempo *dt* y con la ayuda de la Fig.(6)

En un tiempo *dt* el volumen que disminuye el en el tanque está dada por

$$dV = \pi x^2 dy$$

y el volumen que sale por la perforación en el mismo tiempo *dt*, está dada por

$$dV' = \pi r^2 ds$$

ya que la cantidad de agua que sale por el orificio es igual a la que disminuye dentro del depósito, tenemos

$$dV = -dV'$$

el signo negativo es porque un aumento en la salida de agua, produce una disminución en el volumen del deposito

$$\pi x^2 dy = -\pi r^2 ds \qquad (7)$$

ds es la distancia que recorre una capa de agua que sale por el orificio en el tiempo *dt*, por lo que $ds = vdt$, donde *v* es la velocidad con la cual sale el agua por la perforación, utilizando $v = \sqrt{2gh}$ tenemos que $ds = \sqrt{2gy}dt$ sustituyendo en (7)

$$\pi x^2 dy = -\pi r^2 \sqrt{2gy}dt = -\pi r^2 \sqrt{2g} y^{\frac{1}{2}} dt$$

$$x^2 dy = -r^2 \sqrt{2g} y^{\frac{1}{2}} dt \qquad (8)$$

x es el radio de la superficie libre a un cierto tiempo *t*, este no es constante, depende de la altura. Considere el triángulo del lado derecho de la Fig. (6), por el teorema de Pitágoras

$$x^2 + (R-y)^2 = R^2$$

$$x^2 + R^2 - 2Ry + y^2 = R^2$$

$$\therefore \quad x^2 = 2Ry - y^2$$

Sustituyendo en (8), tenemos

$$(2Ry - y^2)dy = -r^2 \sqrt{2g} y^{\frac{1}{2}} dt$$

$$y^{-\frac{1}{2}}(2Ry - y^2)dy = -r^2 \sqrt{2g} dt$$

$$\left(2Ry^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy = -r^2 \sqrt{2g} dt$$

Integrando la expresión anterior

$$\int \left(2Ry^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy = -r^2 \sqrt{2g} \int dt$$

$$\frac{2Ry^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -r^2 \sqrt{2g} t + C$$

$$\frac{4Ry^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} = -r^2 \sqrt{2g} t + c \qquad (9)$$

para determinar el valor de la constante *c*, utilizamos las condiciones iniciales, cuando *t=0* el deposito está completamente lleno, esto es $y(0) = R$, por lo que de (9)

$$\frac{4RR^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2R^{\frac{5}{2}}}{5} = c \quad ; \quad \frac{4R^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{2R^{\frac{5}{2}}}{5} = c$$

$$c = \frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15}$$

sustituyendo el valor de *c* en (1.27), tenemos

$$\frac{4Ry^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} = -r^2\sqrt{2g}t + \frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15}$$

Cuando $y=0$, $t=t_v$ es el tiempo que tarda en vaciarse, sustituyendo en la última expresión

$$0 = -r^2\sqrt{2g}t_v + \frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$$r^2\sqrt{2g}t_v = \frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$$\boxed{t_v = \frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15r^2\sqrt{2g}}}$$

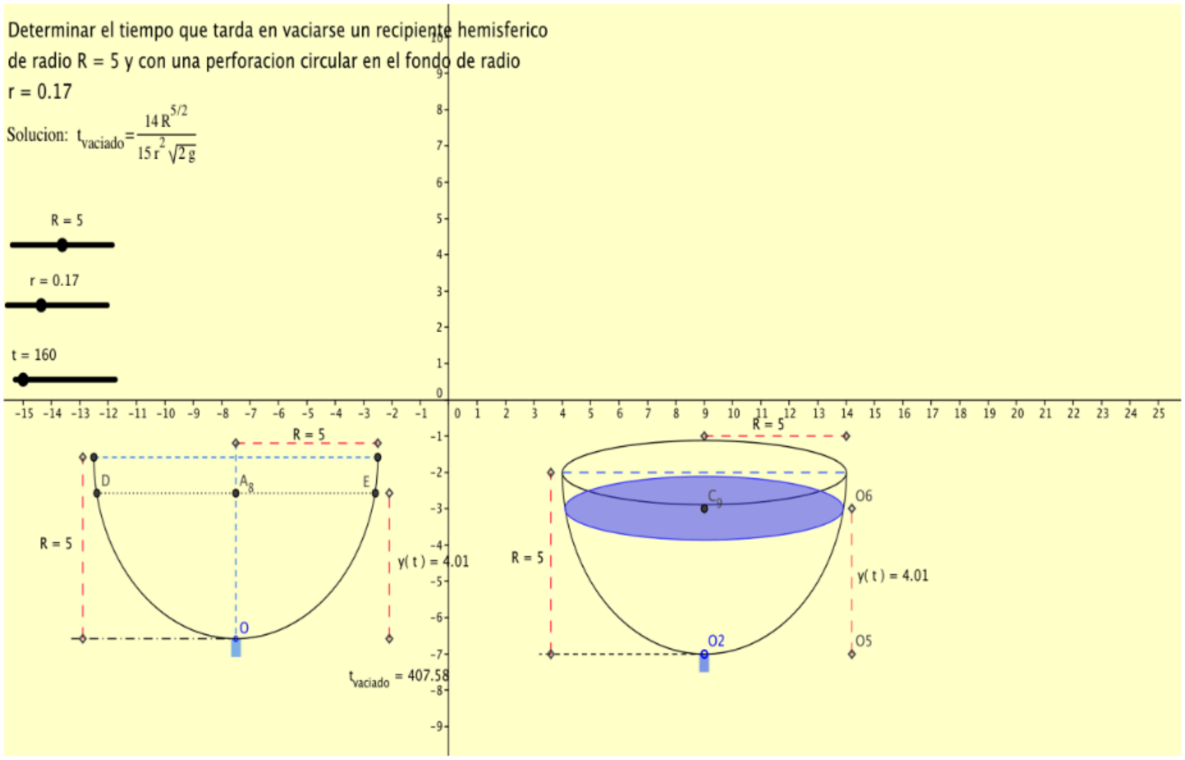

Fig. 6 Simulación de vaciado de recipiente

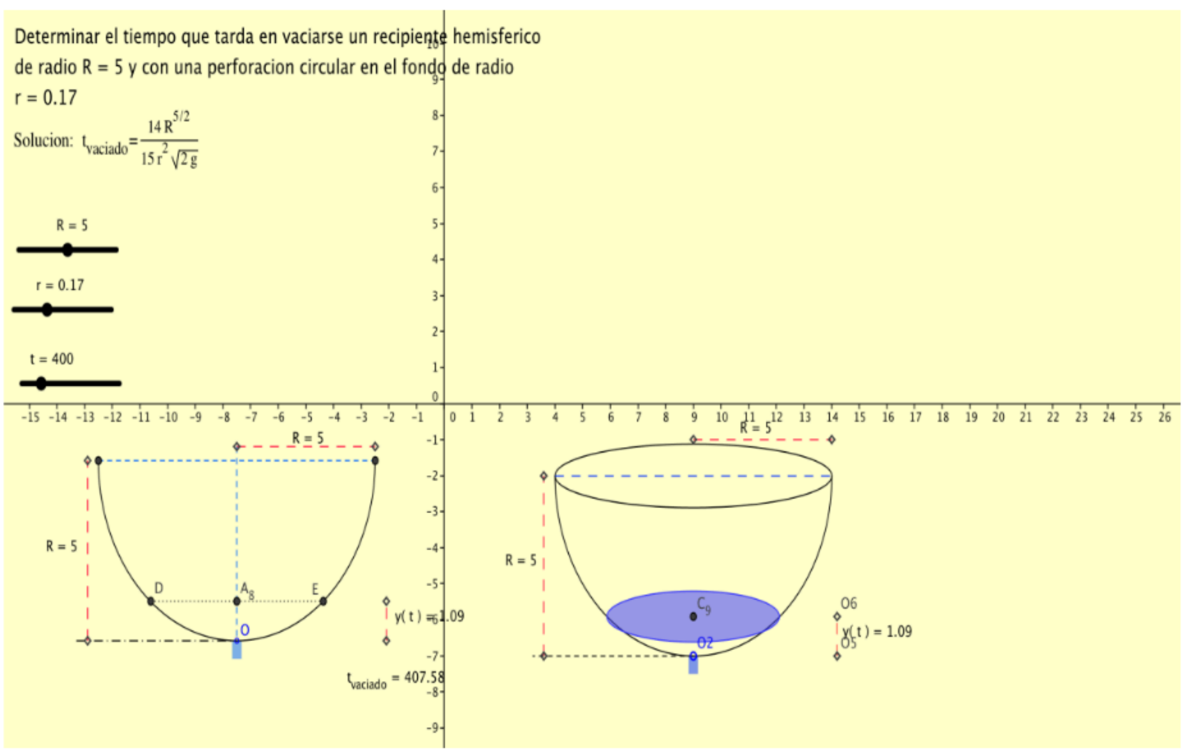

Fig. 7 Fase terminal del vaciado de recipiente

Conclusiones

Las actividades anteriormente expuestas, han mostrado el potencial didáctico de uso de estos recursos tecnológicos y se plantea la ventaja considerable que adquiere el uso de estas herramientas en la solución del problema.

El resultado fundamental de haber trabajado con tecnología y el uso de estas estrategias didácticas, como las empleadas en esta investigación, podrá contribuir de manera significativa al mejoramiento de la enseñanza matemática particularmente del cálculo integral. Por lo tanto, al llevar a cabo actividades como las descritas en este trabajo de investigación, considero que se logra una enseñanza cualitativa diferente, pues los conceptos se visualizan, no se memorizan.

El profesor juega un papel fundamental pues tiene que convertirse en observador y ayudante de sus estudiantes, inclusive él mismo descubre cosas nuevas en el desarrollo de cada una de las partes que conforman las secuencias de trabajo, entonces es importante que él adopte una actitud de serenidad, además, sus habilidades didácticas y metodológicas son muy importantes para poder resolver dificultades no esperadas, para que el material utilizado realmente sea un facilitador del aprendizaje.

Referencias

[3] Pastor, M. D. C. (1988). La Pizarra digital como recurso para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Revista Digital innovación y experiencias educativas No. 13. 2008. ISSN Granada. España.

[4] Olivero. J., Chirinos.(2007) Estrategias interactivas basadas en las nuevas tecnologías de la información aplicadas en física. Multiciencia. Vol. 7, Núm. 2, 207-217 .

[5] Hit, F. (1998). Visualización Matematica, representaciones, nuevas tecnologías y currículo, revista Educación Matemática Vol. 10 No. 2, Grupo Editorial Iberoamérica. pp 35

[6] Trigo, L.M. (1997). Principios de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, grupo editorial Iberoamérica. 44.

[7] Sepúlveda, M. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. Scielo Educación matemática. Vol. 21. Núm. 2. Agosto 2009. ISSN 1665-5826. México.

[8] Saucedo, R. (1993)., Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias en matemática educativa, 2005, Una propuesta didáctica para la enseñanza de los problemas de optimización del cálculo diferencial con Voyage 200™, cita a Patricia Balderas, Experiencias con el uso de un graficador en la enseñanza del cálculo en la escuela Nacional Preparatoria, Revista Educación Matemática Vol. 5 No. 3 Dic. 125-142.

[9] Costaguta, G. (2008). Descubriendo conocimientos para adecuar estilo de enseñanza. Argentina. Editorial Santiago del Estero.

[10] Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Citado por Hitt, en Investigaciones en Matemática Educativa. México, Grupo Editorial Iberoamérica. 2, 173-201.

[11] Hit, F., Cortés, R. (2005). Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza, (México, Morevallado editores), Cap. “Dificultades en el aprendizaje del cálculo” ponencia presentada en XI encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Mich., pp. 93.

[12] Godoy. J., Saucedo, R., Flores, S. Prototipia, la matematización del contexto. Alemania. Editorial Académica Española.